CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Conceptos Básicos de Circuitos de Orden Superior

Previo a abordar el presente capítulo, es preciso señalar que los circuitos de orden inferior incorporan un solo elemento de almacenamiento, ya sea un capacitor o un inductor. Estos circuitos son de primer orden, puesto que las ecuaciones diferenciales que los describen son de primer grado.

En este capítulo, se analizan circuitos que contienen dos elementos de almacenamiento. A estos se les denomina circuitos de segundo orden, ya que sus respuestas se describen mediante ecuaciones diferenciales que incluyen derivadas de segundo grado.

Los circuitos de segundo orden son los circuitos RLC, en los que están presentes los tres tipos de elementos pasivos, tales como se muestran en las figuras 1.1 incisos a), b), c) y d).

Es evidente que un circuito de segundo orden puede tener dos elementos de almacenamiento de diferente tipo o del mismo tipo (siempre y cuando los elementos del mismo tipo no puedan representarse con un solo elemento equivalente). Un circuito de amplificador operacional con dos elementos de almacenamiento también puede ser un circuito de segundo orden. Al igual que los circuitos de primer orden, un circuito de segundo orden puede contener varios resistores y fuentes dependientes e independientes.

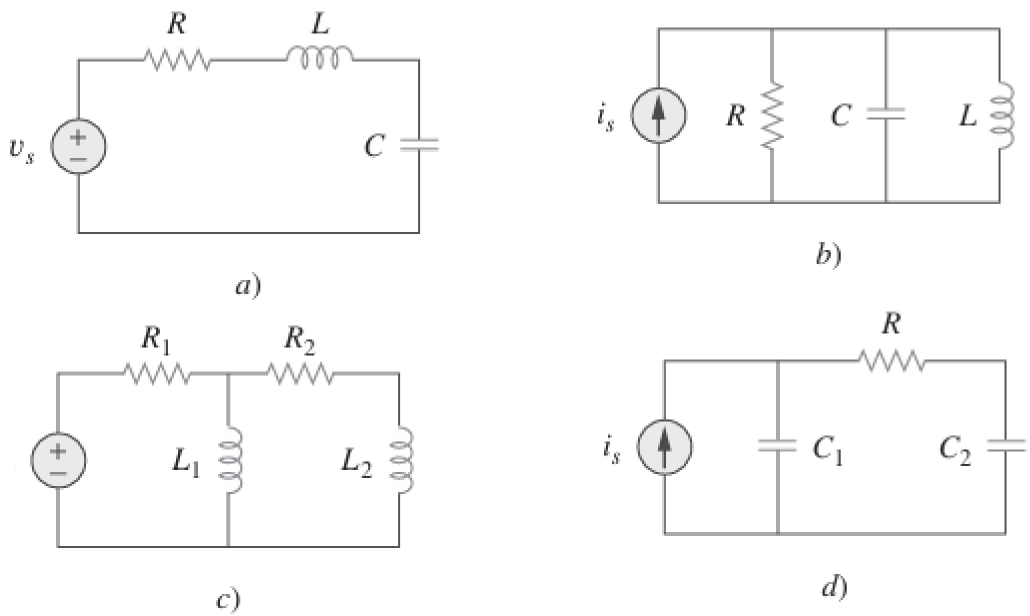


Figura 1.1. Ejemplos de circuitos de segundo orden

Los circuitos de segundo orden se caracterizan por una ecuación diferencial de segundo orden. Consta de resistores y el equivalente de dos elementos de almacenamiento de energía.

El análisis de circuitos de segundo orden será similar al realizado con los de primer orden. Primero se considerarán circuitos excitados por las condiciones iniciales de los elementos de almacenamiento. Aunque estos circuitos pueden contener fuentes dependientes, están libres de fuentes independientes. Como es de esperar, estos circuitos sin fuente darán respuestas naturales. Después se tratarán circuitos excitados por fuentes independientes. Estos circuitos darán tanto la respuesta transitoria como la respuesta en estado estable. En este capítulo sólo se analizarán fuentes independientes de cd. El caso de fuentes senoidales y exponenciales se dejará para capítulos posteriores.

Se iniciará con el aprendizaje para obtener las condiciones iniciales de las variables de circuitos y sus derivadas, ya que esto es crucial para analizar circuitos de segundo orden. Luego se tratarán circuitos RLC en serie y en paralelo, como los que aparecen en la figura 8.1, en los dos casos de excitación: mediante las condiciones iniciales de los elementos de almacenamiento de energía y mediante entradas de escalón. Posteriormente se examinarán otros tipos de circuitos de segundo orden, incluidos circuitos con amplificadores operacionales.

Un circuito de orden superior se caracteriza por tener varias constantes de tiempo y polos en su función de transferencia, que determinan su comportamiento temporal y en frecuencia. Esto implica que la respuesta del circuito a una entrada puede mostrar características como sobrepaso, amortiguamiento, o incluso oscilaciones, dependiendo de la ubicación de los polos en el plano complejo.

Para describirlos, generalmente se utilizan funciones de transferencia que son relaciones de polinomios en la variable compleja s, indicando que la estabilidad y respuesta están vinculadas a los polos y ceros de estas funciones. La naturaleza de estos polos, ya sea real o complejo conjugado, influye en la respuesta transitoria, dictando si el sistema será sobreamortiguado, subamortiguado o críticamente amortiguado.

Comprender estos conceptos permite el análisis y diseño de circuitos más avanzados, como filtros, sistemas de control y sistemas dinámicos en ingeniería eléctrica, que requieren una evaluación precisa de su comportamiento en diferentes dominios y condiciones operativas.

Los circuitos de **orden superior** son aquellos cuya respuesta ante un estímulo se describe mediante una ecuación diferencial de orden superior a dos ($n > 2$).

- **Identificación física:** Estos circuitos aparecen cuando existen tres o más elementos de almacenamiento de energía (inductores y capacitores) que actúan de forma independiente en la red.
- **Complejidad:** A diferencia de los circuitos de primer o segundo orden, los de orden superior poseen múltiples frecuencias naturales, lo que genera respuestas transitorias más ricas y complejas.

1.2. Relevancia del Análisis en el Dominio del Tiempo y la Frecuencia

El análisis en el dominio del tiempo y de la frecuencia radica en que estos enfoques permiten comprender y predecir el comportamiento de los circuitos eléctricos y electrónicos en diferentes condiciones de operación y contextos de diseño. Cada dominio aporta perspectivas distintas que complementan la comprensión global del sistema.

En el dominio del tiempo, el análisis se enfoca en cómo responde un circuito a entradas específicas como impulsos, escalones o señales transitorias. Esto es fundamental para estudiar la respuesta transitoria, determinar constantes de tiempo, comportamiento amortiguado, sobrepaso y estabilidad en condiciones dinámicas. Este enfoque ayuda a diseñar sistemas que requieran desempeño en respuesta rápida o tránsito temporal controlado, como en sistemas de control, amplificadores o circuitos de protección.

Por otro lado, el análisis en el dominio de la frecuencia se centra en la respuesta del circuito ante señales sinusoidales de distintas frecuencias, permitiendo evaluar la magnitud y fase de la respuesta. Esto es esencial en el diseño de filtros, sistemas de comunicación, y análisis de estabilidad en sistemas de control avanzado. La transformación al dominio de la frecuencia, mediante la Transformada de Laplace y posteriormente los diagramas de Bode, Nyquist y Nichols, facilitan la visualización y evaluación de la respuesta en todo el espectro de frecuencias.

La importancia radica en que muchos fenómenos físicos y sistemas reales se expresan naturalmente en términos de frecuencia, como la resonancia, el filtrado, y la atenuación de señales. Además, el análisis en frecuencia permite identificar polos y ceros que afectan la estabilidad y la respuesta global del sistema, lo cual es clave en la síntesis y optimización de circuitos y sistemas de control.

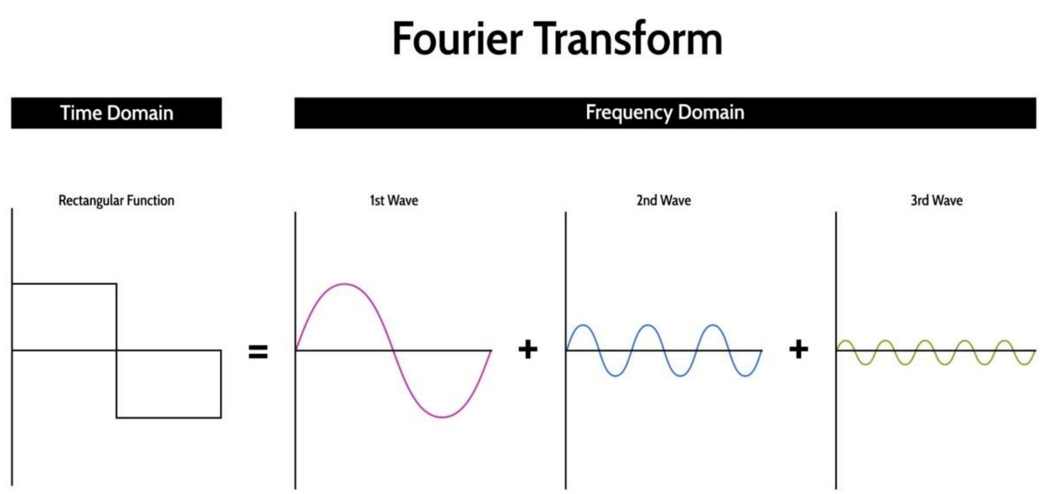
El análisis de estos sistemas en ingeniería eléctrica y electrónica se divide en dos enfoques críticos:

A. Dominio del Tiempo

- **Propósito:** Estudiar el comportamiento de las señales (voltajes y corrientes) respecto al tiempo real.
- **Importancia:** Permite visualizar transitorios, tiempos de subida y sobreimpulso, esenciales para garantizar la seguridad de los equipos ante cambios bruscos de energía.

B. Dominio de la Frecuencia

- **Propósito:** Transformar las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas mediante herramientas como la Transformada de Laplace.
- **Importancia:** Facilita el diseño de sistemas de filtrado y el estudio de la estabilidad de la red sin necesidad de resolver integrales complejas directamente.



1.3. Aplicaciones en Ingeniería Eléctrica y Electrónica

Las aplicaciones de los conceptos y técnicas abordados son fundamentales en el campo de la ingeniería eléctrica y electrónica. En ingeniería eléctrica, estos conocimientos permiten el diseño, análisis y optimización de sistemas de generación, transmisión y distribución de energía eléctrica, garantizando su eficiencia, estabilidad y seguridad. Asimismo, facilitan el desarrollo de componentes y dispositivos electrónicos, como filtros, amplificadores y sistemas de control, que son esenciales en la fabricación de equipos y tecnologías modernas. En el ámbito de la electrónica, estos principios permiten el diseño de circuitos avanzados para comunicaciones, sensores, instrumentos de medición y sistemas automatizados. Además, la comprensión de la respuesta en frecuencia y la estabilidad de las redes eléctricas y electrónicas resulta crucial para la implementación de sistemas confiables y eficientes en distintas aplicaciones industriales, residenciales y comerciales. En resumen, el dominio de los análisis en el dominio del tiempo y la frecuencia, así como el diseño de filtros y otros componentes, impulsa la innovación y el desarrollo de nuevas tecnologías que impactan directamente en la vida diaria y en el avance de la sociedad, a continuación, se amplia la descripción de las aplicaciones.

1. Diseño y análisis de sistemas de transmisión y distribución eléctrica:

La transformación de circuitos al dominio S y el análisis en frecuencia facilitan el estudio de la estabilidad y respuesta de sistemas de transmisión de energía eléctrica, permitiendo diseñar redes que minimicen pérdidas, mejoren la calidad del suministro y aseguren una operación confiable.

2. Desarrollo de filtros y sistemas de comunicación:

La comprensión de filtros Butterworth, Chebyshev y Bessel, así como el análisis en frecuencia, son esenciales para la creación de filtros que permitan eliminar ruidos no deseados, separar señales en sistemas de comunicación, radio, televisión y dispositivos inalámbricos, garantizando la integridad de la señal y la conformidad con las especificaciones.

3. Análisis de respuesta en frecuencia y estabilidad en circuitos y sistemas:

La utilización de diagramas de Bode, Nyquist y Nichols ayuda a predecir y mejorar la estabilidad en controladores automáticos, amplificadores y otros sistemas electrónicos, asegurando que operen sin oscilaciones no controladas y que tengan la respuesta deseada en términos de rapidez y precisión.

4. Estudio de circuitos con acoplamiento magnético y transformadores:

La aplicación de conceptos de inductancia mutua, transformadores ideales y redes acopladas son esenciales en la transmisión de potencia, en sistemas de distribución y en la interfaz entre diferentes sistemas eléctricos y electrónicos, optimizando el aprovechamiento de los recursos y reduciendo pérdidas.

5. Diseño de circuitos integrados y sistemas embebidos:

El análisis en dominios complejos permite modelar y simular componentes electrónicos de alta complejidad, facilitando la miniaturización, eficiencia y fiabilidad en dispositivos como microprocesadores, sensores y sistemas de control industrial.

6. Análisis de circuitos en situación de transitorios y en régimen permanente:

La transformada de Laplace permite resolver problemas con condiciones iniciales y analizar comportamientos transitorios en sistemas de potencia, circuitos electrónicos y equipos de electrónica de potencia, contribuyendo a mejorar la protección y regulación de estos equipos.

7. Optimización en diseño de sistemas de control y automatización:

La identificación de polos y ceros, junto con la respuesta en frecuencia, permite diseñar controladores que aseguren una respuesta rápida, sin sobreimpulsos ni oscilaciones, vital en robots, sistemas de automatización industrial y vuelo de aeronaves.

8. Modelado y simulación en redes de comunicación digital y analógica:

El análisis de parámetros de red y funciones de transferencia facilita la simulación y predicción del comportamiento de sistemas de redes, garantizando su correcto funcionamiento y resistencia ante perturbaciones externas.

Estos conceptos son fundamentales para:

- **Sistemas de Potencia:** Estabilidad de generadores y transformadores.
- **Telecomunicaciones:** Diseño de filtros de alta precisión para radiofrecuencia.
- **Control Automático:** Modelado de servomotores y procesos industriales de alta velocidad.

CAPÍTULO 2

ANÁLISIS DE CIRCUITOS UTILIZANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

2.1 Definición de la Transformada de Laplace y Propiedades Principales

La Transformada de Laplace es una herramienta matemática que permite convertir funciones del dominio del tiempo en funciones del dominio complejo, facilitando el análisis de circuitos y sistemas dinámicos. Formalmente, la transformada de Laplace de una función f(t), definida para t≥0, se expresa como:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

donde s es una variable compleja, s=σ+jω.

Las propiedades más importantes de la Transformada de Laplace que facilitan el análisis incluyen:

Linealidad

La propiedad de linealidad en la Transformada de Laplace establece que la operación de transformar una combinación lineal de funciones del tiempo se puede expresar como la misma combinación lineal de las transformadas de esas funciones. Matemáticamente, si tenemos dos funciones f(t) y g(t), y constantes a y b, entonces:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$$

Esto significa que la transformada de una suma ponderada de funciones es igual a la suma ponderada de las transformadas. La linealidad facilita el análisis porque permite abordar funciones complejas como combinaciones lineales de funciones más simples, cuyos transformadas ya están conocidas o son fáciles de calcular. Además, en sistemas lineales, esta propiedad refleja la superposición, que es fundamental en el análisis y diseño de circuitos y sistemas electrónicos.

Diferenciación en el dominio del tiempo

La diferenciación en el dominio del tiempo es un concepto fundamental en el análisis de circuitos y sistemas, especialmente en relación con la Transformada de Laplace. Consiste en determinar la derivada de una función de tiempo f(t), que generalmente representa una señal o respuesta del sistema, y analizar cómo esta operación se traduce en el dominio de la transformada.

En términos de la Transformada de Laplace, la diferenciación en el tiempo tiene una propiedad clave que establece que la transformada de la derivada de una función f(t) es igual a s multiplicado por la transformada de la función original, menos ciertos términos relacionados con las condiciones iniciales:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0^-)$$

Donde:

- $f(0-)$ es el valor de la función justo antes de t=0, conocido como condición inicial.

Esta propiedad permite convertir derivadas en el dominio del tiempo en algebraico en el dominio *s*, facilitando la resolución de ecuaciones diferenciales que modelan circuitos y sistemas dinámicos. La diferenciación en el dominio del tiempo es especialmente importante en el análisis de respuestas transientes, donde las derivadas representan tasas de cambio, como corrientes y voltajes en circuitos con componentes inductivos o capacitivos.

La comprensión y utilización de esta propiedad permiten analizar cómo las variaciones en las señales de entrada o en el estado del sistema afectan su comportamiento en el tiempo, además de facilitar la solución matemática de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales, simplificando significativamente el análisis de sistemas lineales.

Transformada de funciones escalón

La transformada de funciones escalón, específicamente la Transformada de Laplace de la función escalón unitario, es un concepto fundamental en el análisis de sistemas y circuitos. La función escalón, comúnmente conocida como la función de Heaviside, se denota como u(t) y se define como:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Su transformada de Laplace, que se obtiene al aplicar la integral de la definición de la transformada, es:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1\, dt = \frac{1}{s}, \quad \text{para } \mathrm{Re}(s) > 0$$

Esta transformada es crucial porque permite representar cambios o eventos abruptos en sistemas dinámicos, como el encendido de un dispositivo eléctrico, entradas de señal repentina, o cambios en condiciones iniciales. La función escalón es la base para construir señales más complejas mediante superposiciones o desplazamientos, y su transformada facilita analizar y diseñar circuitos que responden a estas entradas.

Además, en el análisis en el dominio s, multiplicar una función transformada por 1/s corresponde a integrar en el tiempo y, por tanto, a la acción de aplicar un escalón en la entrada del sistema. La transformación de funciones escalón también permite analizar cómo un sistema responde a cambios súbitos, determinando respuestas transientes o permanentes en circuitos y sistemas de control.

En síntesis, la transformada de funciones escalón es una herramienta poderosa que modela eventos o señales abruptas en el tiempo y facilita el análisis y diseño de sistemas dinámicos en ingeniería eléctrica y electrónica.

Transformada de funciones constantes y exponenciales

una función constante en el tiempo, denominada f(t)=K, donde K es una constante real, representa una señal de valor constante para todo t≥0. La transformada de Laplace de una función constante es:

$$\mathcal{L}\{K\} = \int_0^{\infty} e^{-st} K\, dt = K \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt$$

Evaluando la integral:

$$\mathcal{L}\{K\} = \frac{K}{s}, \quad \text{para } \mathrm{Re}(s) > 0$$

Este resultado indica que la transformada de una constante es una función en el dominio s que tiene un polo en el origen. Es fundamental en análisis de sistemas porque permite representar entradas o condiciones de estado constantes y analizar su impacto en la respuesta del sistema.

una función exponencial de la forma $f(t)=e^{at}$, donde a es una constante real o compleja, tiene una transformada particularmente sencilla y muy utilizada en ingeniería:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}\, dt$$

Evaluando la integral, se obtiene:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad \text{para } \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$$

Este resultado muestra que la transformada de una exponencial es una función racional en s con un polo en s=a. Las funciones exponenciales son esenciales porque representan procesos de crecimiento o decrecimiento en sistemas físicos, como la carga o descarga de un capacitor o inductor, o respuestas transitorias en circuitos y controladores.

Estas propiedades permiten abordar problemas complejos transformando ecuaciones diferenciales en álgebra simple en el dominio s.

2.2 Transformada de Laplace de Funciones y Formas de Onda Comunes

Entre las funciones típicas que se analizan en circuitos se encuentran:

Funciones escalón: u(t),

La función escalón unitario, también conocida como función de Heaviside, es una señal fundamental en el análisis de sistemas y señales en ingeniería eléctrica y electrónica. Se define como una función que permanece en cero para valores negativos de t y toma un valor constante (generalmente 1) para valores positivos de t.

Definición formal:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Descripción y utilidad:

- La función escalón modela cambios instantáneos en sistemas físicos, como el encendido de un interruptor o la aplicación repentina de una fuerza o señal a un sistema.
- Es utilizada como señal de entrada en análisis de respuestas transitorias y en la construcción de señales más complejas mediante superposición.

Propiedades importantes:

- La función escalón es una función de paso que "activa" un sistema en t=0.
- Su transformada de Laplace es:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$$

- La derivada de la función escalón en distribución corresponde a la función delta de Dirac:

$$\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$$

Aplicaciones:

- En análisis de circuitos, se utiliza para modelar cambios súbitos en voltajes o corrientes.
- En control, es empleada para analizar la respuesta de un sistema ante una entrada repentina.
- En teoría de señales, es la base para construir señales más complejas mediante combinaciones y desplazamientos de la función escalón.
- En síntesis, la función escalón unitario es una herramienta esencial para describir y analizar cómo sistemas responden ante cambios repentinos en sus condiciones de operación

Funciones exponenciales, e^{at}

Las funciones exponenciales son funciones matemáticas que tienen la forma general:

$$f(t) = e^{kt}$$

donde:

- e es la base del logaritmo natural, aproximadamente 2.71828,
- k es una constante real que determina la tasa de crecimiento o decrecimiento,
- t es la variable independiente, generalmente tiempo.

Características principales:

- Cuando $k>0$, la función representa un crecimiento exponencial, es decir, aumenta rápidamente a medida que t aumenta.
- Cuando $k<0$, representa un decaimiento exponencial, disminuyendo hacia cero a medida que t crece.
- Si $k=0$, la función es constante e igual a 1.

Propiedades:

- La función exponencial es siempre positiva para todos los valores de t.
- Es derivable y su derivada es proporcional a sí misma:

$$\frac{d}{dt}e^{kt} = ke^{kt}$$

Aplicaciones en ingeniería eléctrica y electrónica:

- **Respuesta transitoria**: Modela cómo voltajes y corrientes en circuitos RC y RL cambian con el tiempo durante procesos de carga y descarga.
- **Decaimiento y crecimiento**: Describe procesos de decaimiento de corriente en inductores o capacitores, y la carga de baterías.
- **Análisis en dominio de la frecuencia**: Al aplicar la transformada de Laplace, las funciones exponenciales aparecen comúnmente en funciones de transferencia y respuestas de sistemas lineales.

Funciones sinusoidales y cosenoidales: $\sin(\omega t)$ y $\cos(\omega t)$,

Las funciones sinusoidales, específicamente el seno $\sin(\omega t)$ y el coseno $\cos(\omega t)$, son funciones matemáticas que describen oscilaciones o movimientos periódicos en el tiempo.

Definiciones:

- **Función seno:**

$$f(t)=\sin(\omega t)$$

- **Función coseno:**

$$f(t)=\cos(\omega t)$$

donde:

- ω es la frecuencia angular en radianes por segundo,
- t es el tiempo.

Características principales:

- Ambas funciones tienen un comportamiento periódico con período: $T = 2\pi/\omega$

Esto significa que repiten su valor cada T segundos.

- **Amplitud:** La amplitud de estas funciones puede ser cualquier valor, pero generalmente se considera 1 si no hay coeficiente multiplicador delante de ellas; si existe un coeficiente A, la amplitud será A.
- **Fase:** La diferencia entre seno y coseno en términos de desplazamiento de fase es de $\pi/2$ radianes. Es decir:

$$\sin(\omega t)=\cos(\omega t-2\pi)$$

Propiedades:

- Ambas funciones son continuas, diferenciables y suaves.
- La función seno comienza en cero cuando $t=0$, sube hasta su máximo en $T/4$, baja a cero en $T/2$, y continúa en un ciclo periódico.
- La función coseno comienza en su valor máximo en $t=0$.

Aplicaciones en ingeniería eléctrica y electrónica:

- **Señales sinusoidales:** Son fundamentales en la transmisión de energía y en sistemas de comunicaciones, ya que muchas ondas, como la luz, ondas de radio, y corriente alternating (AC), se representan mediante funciones sinusoidales.
- **Análisis en corriente alterna:** La corriente y voltaje en circuitos de CA se describen comúnmente como funciones sinusoidales, por ejemplo:

$$v(t)=Vm\cos(\omega t+\phi)$$

- **Transformada de Fourier:** La descomposición de señales en componentes sinusoidales para analizar su contenido en frecuencias.

Funciones impulso: Dirac delta δ(t), cuya transformada es 1**.**

Las funciones impulso, representadas por la función delta de Dirac δ(t), son fundamentales en análisis de sistemas y circuitos, especialmente en el estudio de respuestas a impulsos.

Función delta de Dirac $\delta(t)$:

- Es una función especial que no es una función tradicional, sino una distribución o función generalizada.
- Tiene las siguientes propiedades principales:

1. **Valor en todos los lugares excepto en t=0:**

$$\delta(t) = 0 \quad \text{para} \quad t \neq 0$$

2. **Integral igual a uno:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

3. **Propiedad de muestreo:** Para cualquier función integrable *f*(*t*):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\, dt = f(t_0)$$

Es decir, la delta "extrae" el valor de la función en *t*=*t*0.

Transformada de Laplace de *δ*(*t*):

- La transformada de Laplace de δ(t) es simplemente 1:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

Esto porque, aplicando la definición de la transformada:

$$\int_{0}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{-s\times 0} = 1$$

Interpretación física y aplicaciones:

- La función delta modela un impulso unitario en un instante específico t=0, que tiene una magnitud infinitamente grande en ese punto, pero una integral finita de 1.
- Es utilizada para analizar sistemas en respuesta a estímulos súbitos o de corta duración, como golpes o cargas instantáneas.

2.3 Transformada Inversa de Laplace y Técnicas de Desarrollo

Para recuperar la función temporal original a partir de su representación en s, se emplea la transformada inversa de Laplace, que se expresa como:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st}F(s)ds$$

donde *c* es una línea vertical en el plano *s* que asegura la convergencia.

Para funciones racionales *F*(*s*), la técnica más común para realizar la transformada inversa es la expansión en fracciones parciales, permitiendo descomponer *F*(*s*) en sumas de términos simples cuya transformada inversa se encuentra en tabulares. Esto implica:

- Factorizar el denominador y numerador de *F*(*s*).
- Expresar *F*(*s*) como suma de fracciones parciales con denominadores lineales o cuadráticos irreducibles.
- Consultar tablas de transformadas para cada término, y devolver a la función del tiempo de acuerdo a la siguiente tabla.

Función en tiempo $f(t)$	Transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Transformada inversa $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	Notas / Comentarios
$\delta(t)$	1	$\delta(t)$	Función delta de Dirac
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$u(t)$	Función escalón unitario
$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$e^{at}u(t)$	Exponencial creciente o decreciente
$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t)u(t)$	Función sinusoidal
$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)u(t)$	Función cosinusoidal
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}u(t)$	Potencias de t
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	Funciones especiales
$\ln(t)u(t)$	$-\frac{\gamma+\ln(s)}{s}$	Inversa más compleja (consultar tablas)	γ: Constante de Euler
$\sinh(at)u(t)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\sinh(at)u(t)$	Función hiperbólica seno
$\mathrm{erf}(\sqrt{t})$	$\frac{e^s/s}{s}$	Función error (consultar tablas)	Función especial

El cálculo de esta inversa puede realizarse mediante diferentes técnicas, siendo las más comunes:

- **Tabla de tablas de Laplace**
- **Fracciones parciales**
- **Método de residuos**
- **Transformación por composición**

Cada técnica tiene aplicaciones específicas dependiendo de la forma de $F(s)$.

Técnicas de desarrollo para la transformada inversa

1. Descomposición en fracciones parciales

Cuando $F(s)$ es una función racional, es decir, un cociente de polinomios, la técnica más utilizada es descomponerla en fracciones parciales, lo cual facilita la identificación de términos cuya transformada inversa es conocida.

Procedimiento:

- Factorizar el denominador en sus raíces.

- Escribir $F(s)$ en forma de suma de fracciones simples.
- Buscar en tablas las transformadas inversas correspondientes a cada término.

Ejemplo:

$$v_0 = \frac{32}{s(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}$$

$$v_0 = \frac{32}{s(s+2)^2} = \frac{A(s+2)^2 + Bs(s+2) + Cs}{s(s+2)^2}$$

Igualando términos

$$A(s+2)^2 + Bs(s+2) + Cs = 32$$

Si s=0, entonces

$$A(0+2)^2 + B\ 0\ (0+2) + C\ 0 = 32$$

$$A(2)^2 + 0 + 0 = 4A = 32$$

$$A = 8$$

Si s= - 2

$$A(-2+2)^2 + B(-2)(-2+2) + C(-2) = 32$$

$$A(0)^2 + B(-2)(0) + C(-2) = 32$$

$$0 + 0 + C(-2) = 32$$

$$C = -16$$

Para encontrar B, hacemos que s=1

$$A(1+2)^2 + B\ 1\ (1+2) + C(1) = 32$$

$$A(3)^2 + B\ 1\ (3) + C(1) = 32$$

$$9A + 3B + C = 32$$

Pero A= 8 y C=-16, entonces

$$9(8) + 3B + (-16) = 32$$

$$3B = 32^{+1}b - 72 = -24$$

$$B = \frac{-24}{3}$$

$$B = -8$$

Reemplazando en Vo

$$v_0 = \frac{32}{s(s+2)^2} = \frac{8}{s} + \frac{-8}{s+2} + \frac{-16}{(s+2)^2}$$

$$v_0 = 8\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} - \frac{2}{(s+2)^2}\right)$$

Aplicando la anti transformada, se tiene

$$v_0(t) = 8(1 - \dot{e}^{2t} - 2t\mathrm{e}^{-2t})\mu(t)$$

2. Tabla de transformadas

El método más directo cuando $F(s)$ es una suma o producto de funciones conocidas. Se consulta una tabla con funciones básicas de Laplace y su inversa.

Ejemplo:

Si:

$$F(s) = \frac{1}{s+3}$$

Entonces, usando la tabla anterior presentada:

$$f(t) = e^{-3t}$$

3. Residuos

Cuando $F(s)$ tiene polos complejos, la técnica mediante residuos permite calcular la inversa sumando contribuciones de cada polo.

El método implica:

- Identificar los polos del $F(s)$.
- Calcular los residuos en cada polo.
- Construir $f(t)$ como suma de términos exponenciales (y en algunos casos, funciones trigonométricas).

2.5 Impedancia y Admitancia Compleja

Impedancia y Admitancia Compleja, que es fundamental en el análisis de circuitos en el dominio de la frecuencia compleja, permitiendo representar componentes y redes de manera más compacta y facilitar el análisis de respuesta en frecuencia y estabilidad.

1. Impedancia Compleja $Z(s)$

La impedancia Z es una medida de oposición que presenta un elemento o red a la corriente alterna (AC). En el dominio de la frecuencia compleja, la impedancia se expresa en función de la variable $s=j\omega$, donde:

$s=j\omega$, ω=frecuencia angular en radianes/segundo

Al generalizar, se considera s como una variable compleja, permitiendo análisis en el plano complejo s.

Definición:

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}$$

Para componentes básicos:

- Resistor: $Z_R = R$
- Inductor: $Z_L = sL$
- Condensador: $Z_C = 1/(sC)$

Ejemplo:

Para una resistencia R=10Ω, un inductor L=1H, y un capacitor C=1F:

$$Z(s) = 10 + s \cdot 1 + \frac{1}{s \cdot 1}$$

2. Admitancia Compleja Y(s)

La admitancia es la inversa de la impedancia y se expresa en siemens (S). Es útil en análisis de redes paralelas y facilita el manejo de combinaciones en paralelo.

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = G + sB$$

donde:

- G es la conductancia (parte real),
- B es la susceptancia (parte imaginaria).

Relación entre impedancia y admitancia:

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)}$$

3. Representación en el plano complejo

La impedancia $Z(s)$ en el plano s se puede graficar mediante su módulo y argumento (fase).

- La magnitud:

$$|Z(s)| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

- La fase:

$$\theta = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

La misma estructura válida para Y(s), pero con sus componentes conductancia y susceptancia.

4. Aplicaciones prácticas

- **Análisis en frecuencia:** La impedancia $Z(j\omega)$ determina cómo responde el circuito a diferentes frecuencias.
- **Estabilidad:** La ubicación de polos y ceros de $Z(s)$ y $Y(s)$ en el plano s indica estabilidad y comportamiento transitivo.
- **Diseño de filtros:** La respuesta en frecuencia se obtiene fácilmente con la impedancia y admitancia compleja.