

621.316
VZ84

<http://libreria-universitaria.blogspot.com>

9

Base

LP

ANÁLISIS DE REDES

M. E. Van Valkenburg
Profesor de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Illinois

50105



LIMUSA

NORIEGA EDITORES

MÉXICO • España • Venezuela • Colombia

VERSIÓN AUTORIZADA EN ESPAÑOL DE LA OBRA
PUBLICADA EN INGLÉS CON EL TÍTULO:
NETWORK ANALYSIS
© PRENTICE-HALL, INC.

COLABORADORA EN LA TRADUCCIÓN:
HORTENCIA CORONA RODRÍGUEZ
INGENIERA DE LA UNIVERSIDAD DE CALIFORNIA, BERKELEY.

REVISIÓN:
IGNACIO MONTERRUBIO BUSTILLOS
INGENIERO MECÁNICO ELECTRICISTA Y PROFESOR
TITULAR DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS Y CIRCUITOS ELEC-
TRÓNICOS EN LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.

LA PRESENTACIÓN Y DISPOSICIÓN EN CONJUNTO DE

ANÁLISIS DE REDES

SON PROPIEDAD DEL EDITOR. NINGUNA PARTE DE ESTA
OBRA PUEDE SER REPRODUCIDA O TRANSMITIDA,
MEDIANTE NINGÚN SISTEMA O MÉTODO, ELECTRÓ-
NICO O MECÁNICO (INCLUYENDO EL FOTOCOPIADO, LA
GRABACIÓN O CUALQUIER SISTEMA DE RECUPERE-
CIÓN Y ALMACENAMIENTO DE INFORMACIÓN), SIN
CONSENTIMIENTO POR ESCRITO DEL EDITOR.

DERECHOS RESERVADOS:

© 1999, EDITORIAL LIMUSA, S.A. DE C.V.
GRUPO NORIEGA EDITORES
BALDERAS 95, MÉXICO, D.F.
C.P. 06040

☎ (5)521-21-05
01(800) 7-06-91-00

✉ (5)512-29-03
limusa@nonega.com.mx

🌐 www.nonega.com.mx

CANIEM Núm. 121

DUODÉCIMA REIMPRESIÓN

HECHO EN MÉXICO
ISBN 968-18-0178-4



LA EDICIÓN, COMPOSICIÓN, DISEÑO E IMPRESIÓN DE ESTA OBRA, FUERON REALIZADOS
BAJO LA SUPERVISIÓN DE GRUPO NORIEGA EDITORES
BALDERAS 95, COL. CENTRO, MÉXICO, D.F. C.P. 06040
TEL.: (5)521 48 49 Y (5)512 30 09 FAX: (5)512 28 03 Y (5)510 94 15
IMPRESO EN PROGRAMAS EDUCATIVOS, S.A. DE C.V. • 018090 500 09 99 522
CERTIFICADO POR ISO-9002: 1994/nmx-cc-004.1995 CON EL NO. RSC-048
e-mail: limusa@nonega.com.mx • www.nonega.com.mx

Prólogo a la tercera edición

Al preparar esta tercera edición de *Análisis de redes*, se trató de que el material tuviera la misma organización básica que en las ediciones anteriores y, al mismo tiempo, añadir el material necesario para reflejar los cambios ocurridos en la manera de enseñar este tema desde que apareció la segunda edición en 1964. Los tópicos que abarca el análisis de redes han aumentado y se han hecho más complejos. Para explicar cómo determiné cuáles tópicos debían incluirse y cuánto había que profundizar en ellos, debo decir que, en mi concepto, un curso de análisis de redes constituye una materia auxiliar para temas que se tratan dentro de los programas de estudio de ingeniería eléctrica. Este tema ha cumplido esta función durante mucho tiempo, aunque no todos los que lo enseñan están dispuestos a reconocerlo. Por lo tanto, los temas que se estudien deben introducir material que sea útil para cursos posteriores que siga el alumno y debe profundizarse de tal manera que se faciliten los estudios para el siguiente curso. En consecuencia, en este libro se usa la escritura de las ecuaciones para describir una red que es el modelo de un sistema físico, aplicándola a todos los análisis de sistemas de conjuntos, por lo cual hay que estudiarla con todo detalle. La solución de la ecuación de estado, incluyendo una interpretación del significado de e^{At} , donde A es una matriz, puede posponerse para un curso subsecuente.

Una de las innovaciones de esta tercera edición es el Apéndice E que contiene una lista detallada de los temas apropiados para trabajos en computadora o materias para un laboratorio de programas afines, incluyendo una lista pormenorizada de referencias bibliográficas. Al final de los capítulos en que se juzgó conveniente, se agregaron sugerencias específicas referentes a ejercicios en computadora que refuerzan los temas estudiados en ellos: hay varios factores por los que decidí proporcionar información de esta manera, en vez de introducir material de métodos numéricos o presentar una salida impresa de computadora para ilustrar las posibles operaciones de computadora. El más importante de todos es que el

2 Prólogo a la tercera edición

uso real que hace el estudiante de la computadora, depende mucho de subruinas de biblioteca de que dispone en cada centro de computación en cuyas bibliotecas continúan sucediéndose cambios rápidos, además de que existe muy poca uniformidad de un texto a otro.

Las variables de estado han cobrado nueva importancia, por lo que en este libro se estudian formalmente. El lector que desee tener un gran dominio del análisis de redes, deberá aprender *todos* los métodos. Sin embargo, no parece posible que la formulación de la variable de estado de las ecuaciones substituya, por ejemplo, el análisis nodal. Generalmente se considera que una buena práctica de estudio consiste en aprender uno o dos métodos antes de añadir otros al "saco de trucos". Para el principiante, se recomiendan las formulaciones tradicionales de nodo y circuito.

También se agregó un análisis del teorema de Tellegen. Entre paréntesis, la sencillez y elegancia de la aportación de Tellegen, así como la gran variedad de aplicaciones ilustrativas que tiene siguen causando admiración entre los ingenieros. En esta edición aparece un nuevo estudio del criterio de Nyquist, el cual se omitió en la segunda edición. Este cambio se debe al nuevo énfasis que se ha puesto en las redes activas y los problemas de estabilidad concomitantes, y también a la valiosa información que se obtiene al analizar dichas redes de acuerdo con el criterio de Nyquist.

Esta edición presenta muchos problemas nuevos, así como las versiones revisadas o actualizadas de otros que aparecían en las ediciones anteriores. Además, en el Apéndice G se incluyen más soluciones a los problemas, a fin de que el libro sea más apropiado para el estudio autodidáctico.

Es enorme la deuda de gratitud del autor hacia sus estudiantes, colegas y antiguos maestros. No tengo palabras para agradecerles a ellos y a todos los que prestaron su ayuda y me alentaron para preparar este libro. En particular, estoy agradecido con los lectores que han tenido la bondad de enviarme sus impresiones respecto a las dos primeras ediciones, así como sugerencias para mejorar la tercera. Por último, me place reconocer que me ha sido muy grato colaborar con Virginia Huebner del College Book Editorial Department de Prentice-Hall, y expresar mi gratitud a mi esposa, Evelyn, quien me prestó su valiosa ayuda para corregir el manuscrito.

M. E. VAN VALKENBURG
Urbana, Illinois

Prólogo a la segunda edición

Este libro se preparó para utilizarlo como recurso introductorio para un segundo curso de análisis de redes eléctricas. Se supone que el estudiante tiene los conocimientos matemáticos requeridos en un curso de cálculo.

La experiencia didáctica obtenida durante el tiempo transcurrido desde que se preparó la primera edición del libro, refuerza mi convicción de que el estudiante debe iniciarse en el estudio del análisis de redes con el llamado caso "transitorio" y, de ahí, proceder al estado estacionario senoidal y temas afines. No trato de decir cuál es el orden básico o más importante, sino que mediante este sistema el estudiante principiante aprenderá más fácilmente y mejor. Por tanto, la organización básica de la segunda edición es esencialmente igual que la de la primera.

En los tres primeros capítulos del libro se introducen los elementos que sirven para diseñar dispositivos eléctricos, con definiciones relativas a las redes, a partir de las cuales se formulan las ecuaciones de equilibrio de Kirchhoff. Sigue un estudio del comportamiento de las redes de acuerdo con los modos o frecuencias naturales de respuesta, debida a la excitación arbitraria. La transformación de Laplace es el medio por el que se correlaciona este comportamiento natural de la red con las características de la excitación (o señal), cada una de las cuales se representa mediante una transformada y, luego, se estudia en relación con los polos y los ceros de la transformada. Después, se introduce el caso de excitación senoidal en operación de estado permanente. A su vez, esto conduce al estudio de varios temas importantes para el ingeniero electricista, tales como gráficas de Bode, potencia media, pérdida de inserción y varios espectros de señal. Según mi experiencia, la introducción a la transformación de Laplace sin pruebas no ha presentado ninguna dificultad a los estudiantes. Creo que Whitehead* estaba en lo correcto al observar que, "...no es esen-

*Alfred North Whitehead, *The Aims of Education*, en rústica, Mentor Books, Nueva York, 1949, página 15.

4 Prólogo a la segunda edición

cial que la demostración de la verdad constituya la introducción al concepto”.

Cuando se preparó la primera edición, se pensó que era necesario demostrar la utilidad del método de polos y ceros e incluir cierto material sobre varias aplicaciones importantes tales como las redes LC de un puerto, filtros de parámetros de imagen, redes de amplificador de la variedad de sintonía escalonada y algunos temas relacionados con el control automático. A partir de entonces, el método de polos y ceros quedó incluido definitivamente en los programas de estudio y, por lo tanto, estos capítulos se han substituido. En toda la obra se incluyen más ejemplos. Algunos temas se abordan con mayor profundidad que en la primera edición, incluyendo la convolución, el análisis senoidal en estado permanente, el criterio de Routh-Hurwitz, la serie de Fourier y la integral de Fourier. Los temas nuevos agregados en esta edición son: parámetros de dos puertos, lugares geométricos complejos y gráficas de Bode, potencia media, transferencia de potencia y pérdida de inserción. También se han añadido tres apéndices que tratan de números complejos, matrices y escalas de magnitud y frecuencia.

Es necesario agregar algo relativo a la notación y las convenciones. Las unidades de elemento se dan en ohms, henrys, farads, volts y amperes, a menos que se indique otra cosa—tanto en el texto como en las figuras. Utilicé límites en las integrales donde juzgué que aclaraban o ayudaban a que el estudiante comprendiera mejor la presentación; cuando no era así, preferí considerar al signo de la integral como símbolo de un enunciado detallado e implica que deben conocerse los límites sobre los que se efectúa la integración. Asimismo, utilicé $i(t)$ en lugar de i , e $I(S)$ en lugar de I cuando era pertinente identificar la variable. En cada caso, las letras mayúsculas se utilizan para las variables de frecuencia y las minúsculas para las de tiempo.

Fue difícil tomar algunas de las decisiones. Usé el término *orden* al explicar las ecuaciones algebraicas relacionadas con el tiempo y, luego, también a *grado* cuando se trata de ecuaciones algebraicas relativas a frecuencia. Este uso concuerda con la práctica técnica actual que siguen los ingenieros; el uso exclusivo de cualquiera de ellas da origen a expresiones extrañas. En lo que respecta al símbolo para las funciones de transferencia para redes de dos puertos, utilicé el subíndice de orden 12, como en Z_{12} , sabiendo que algunos maestros tienen una marcada preferencia por $Z_T Z^T$ o Z_{21} . Tanto en el texto como en las figuras se apreciará claramente cuál es la función de transferencia indicada, de modo que el riesgo de confusión es mínimo. Espero que no habrá ningún problema al intercambiar 1 y 2, o al substituir 12 por medio de T . Por otra parte, no sería casi imposible incluir en las secciones de *bibliografía* a todos los autores de cuyas obras he obtenido información

en cada área; por lo tanto, sólo he escogido las referencias que complementan el material dado o proporcionan algún otro método opcional que pueda facilitar la comprensión del tema.

Una de las satisfacciones que he tenido al escribir un libro de texto de esta índole, es que proporciona una excusa para comentar y confrontar ideas tanto con colegas como con estudiantes. Deseo expresar mi profunda gratitud a los estudiantes que, consciente o inconscientemente, me han ayudado a determinar el orden de presentación y los puntos que debía destacar. La mayor parte de la revisión de la segunda edición se hizo mientras fui profesor invitado en la Universidad de California en Berkeley, y en la Universidad de Colorado. También deseo expresar mi agradecimiento a estas dos instituciones, al igual que a la Universidad de Illinois por los útiles estudios que realicé en ellas.

Me complace agradecer a las siguientes personas que me dieron su valiosa ayuda en estas dos ediciones: Don A. Baker, de Los Alamos, Doran Baker, de la Universidad de Utah, Joseph Chen, de IBM, José B. Cruz, Jr. de Illinois, L. Dale Harris' de la Universidad de Utah, Shlomo Karni, de la Universidad de Nuevo México, Wan Hee Kim, de la Universidad de Columbia, Jack Kobayashi, de la Hughes Aircraft Company, Franklin F. Kuo, de Bell Telephone Laboratories, Philip C. Magnusson, de la Universidad Estatal de Oregon, Wataru Mayeda, de Illinois, William R. Perkins, de Illinois, Ronald A. Rohrer, de Illinois, Thomas S. Stout, de Thompson Ramo-Wooldridge, Glen Wade, de la Universidad Cornell y Philip Weinberg, de la Universidad Bradley. Además, Herbert M. Barnard y Edwin C. Jones, Jr., me ayudaron mucho a mejorar el texto y revisar las galeras. También quiero dar las gracias a W. L. Everitt y Robert W. Newcomb por la asesoría editorial que me brindaron. Finalmente, deseo expresar mi agradecimiento hacia mi esposa Evelyn y mis hijos, por la paciencia y comprensión que me tuvieron mientras preparaba esta obra.

M. E. VAN VALKENBURG

Urbana, Illinois

Contenido

PROLOGO A LA TERCERA EDICION	1
PROLOGO A LA SEGUNDA EDICION	3
1 DESARROLLO DEL CONCEPTO DE CIRCUITO	1
1-1 Introducción	15
1-2 Carga y energía	16
1-3 La relación de los conceptos de campo y de circuito	20
1-4 El parámetro capacitancia	20
1-5 El parámetro inductancia	25
1-6 El parámetro resistencia	32
1-7 Unidades y escalas	35
1-8 Enfoque de un sistema físico como circuito	37
2 CONVENCIONES PARA DESCRIBIR REDES	49
2-1 Sentidos de referencia para corriente y voltaje	49
2-2 Convenciones para elementos activos	51
2-3 Convención del punto para circuitos acoplados	53
2-4 Descripción topológica de redes	58
3 ECUACIONES DE REDES	67
3-1 Leyes de Kirchhoff	67
3-2 El número de ecuaciones de red	70
3-3 Transformaciones de fuentes	75
3-4 Ejemplos de la formulación de las ecuaciones de redes	79
3-5 Análisis con variables de malla	86
3-6 Análisis con variables de nodo	92
3-7 Determinantes: menores y el método de Gauss	96
3-8 Dualidad	101
3-9 Análisis con variables de estado	103
4 ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN	103
4-1 Soluciones general y particular	121
4-2 Constantes de tiempo	126

8 Contenido

- 4-3 El factor de integración 129
4-4 Redes más complicadas 133
- 5 **CONDICIONES INICIALES EN LAS REDES** 141
5-1 ¿Por qué se estudian las condiciones iniciales? 141
5-2 Condiciones iniciales en los elementos 142
5-3 Interpretación geométrica de las derivadas 147
5-4 Procedimiento para evaluar las condiciones iniciales 149
5-5 Estado inicial de una red 154
- 6 **ECUACIONES DIFERENCIALES, CONTINUACION** 165
6-1 Ecuación de segundo orden: excitación interna 165
6-2 Ecuaciones de orden más elevado: excitación interna 174
6-3 Redes excitadas con fuentes de energía interna 176
6-4 Respuesta en relación con la ubicación de las raíces en el plano S 182
6-5 Soluciones generales de acuerdo con S , Q y W n 187
- 7 **LA TRANSFORMACION DE LAPLACE** 201
7-1 Introducción 201
7-2 La transformación de Laplace 203
7-3 Algunos teoremas básicos para la transformación de Laplace 207
7-4 Ejemplos de la solución de problemas con la transformación de Laplace 211
7-5 Desarrollo en fracciones parciales 214
7-6 Teorema de expansión de Heaviside 218
7-7 Ejemplos de solución mediante la transformación de Laplace 222
- 8 **TRANSFORMADAS DE OTRAS FORMAS DE ONDAS DE SEÑALES** 237
8-1 La función de escalón unitario trasladado 237
8-2 Las funciones rampa e impulso 242
8-3 Síntesis de la forma de onda 250
8-4 Valor inicial y final de $f(t)$ a partir de $F(s)$ 258
8-5 La integral de convolución 260
8-6 Convolución como una suma 268
- 9 **FUNCIONES DE IMPEDANCIA Y TEOREMAS DE RED** 283
9-1 Concepto de frecuencia compleja 283
9-2 Impedancia transformada y circuitos transformados 287
9-3 Combinaciones de elementos en serie y en paralelo 293
9-4 Superposición y reciprocidad 298
9-5 Teorema de Thévenin y teorema de Norton 302

10	FUNCIONES DE RED: POLOS Y CEROS	323
10-1	<i>Pares de terminales o puertos</i>	323
10-2	<i>Funciones de red para redes de uno o dos puertos</i>	324
10-3	<i>Cálculo de las funciones de red</i>	330
	(1) <i>Redes escalera</i>	330
	(2) <i>Redes generales</i>	332
10-4	<i>Polos y ceros de funciones de red</i>	335
10-5	<i>Restricciones para ubicaciones de polos y ceros de funciones de punto impulsor</i>	338
10-6	<i>Restricciones para ubicaciones de polos y ceros para funciones de transferencia</i>	343
10-7	<i>Comportamiento en el dominio del tiempo a partir de la gráfica de polos y ceros</i>	347
10-8	<i>Estabilidad de redes activas</i>	353
11	PARAMETROS DE DOS PUERTOS	373
11-1	<i>Relación de las variables para dos puertos</i>	373
11-2	<i>Parámetros de admitancia en corto circuito</i>	374
11-3	<i>Parámetros de impedancia de circuito abierto</i>	377
11-4	<i>Parámetros de transmisión</i>	380
11-5	<i>Parámetros híbridos</i>	383
11-6	<i>Relaciones entre conjuntos de parámetros</i>	386
11-7	<i>Conexión en paralelo de redes de dos puertos</i>	386
12	ANÁLISIS SENOIDAL DE ESTADO PERMANENTE	401
12-1	<i>El estado permanente senoidal</i>	401
12-2	<i>La senoide y $e^{+j\omega t}$</i>	403
12-3	<i>Solución utilizando $e^{+j\omega t}$</i>	405
12-4	<i>Solución utilizando $Re\{j\omega t\}$ o $Im\{j\omega t\}$</i>	409
12-5	<i>Fasores y diagramas fasoriales</i>	412
13	GRÁFICAS DE LA RESPUESTA DE FRECUENCIA	423
13-1	<i>Partes de las funciones de red</i>	423
13-2	<i>Gráficas de magnitud y fase</i>	424
13-3	<i>Lugares geométricos complejos</i>	427
13-4	<i>Gráficas a partir de fasores en el plano s</i>	431
13-5	<i>Diagramas de Bode</i>	440
13-6	<i>El criterio de Nyquist</i>	448
14	POTENCIA DE ENTRADA, TRANSFERENCIA DE POTENCIA Y PERDIDA DE INSERCIÓN	473
14-1	<i>Energía y potencia</i>	424
14-2	<i>Valores efectivos o de raíz media cuadrática</i>	479
14-3	<i>Potencia media y potencia compleja</i>	482

10 Contenido

- 14.4 *Problemas de optimización de la transferencia de potencia* 486
- 14.5 *Pérdida de inserción* 490
- 14.6 *Teorema de Tellegen* 494

- 15 **SERIES DE FOURIER Y ESPECTROS DE SEÑALES** 509
 - 15-1 *Series de Fourier* 509
 - 15-2 *Evaluación de los coeficientes de Fourier* 513
 - 15-3 *Simetrías de formas de onda en relación con los coeficientes de Fourier* 517
 - 15-4 *Convergencia en series truncadas* 525
 - 15-5 *Forma exponencial de la serie de Fourier* 531
 - 15-6 *Respuesta de estado permanente a señales periódicas* 536

- 16 **INTEGRAL DE FOURIER Y ESPECTROS CONTINUOS** 551
 - 16-1 *Envolvente de espectro para un pulso recurrente* 551
 - 16-2 *La integral y la transformada de Fourier* 554
 - 16-3 *Aplicación en el análisis de redes* 557
 - 16-4 *Algunas transformadas de Fourier, útiles* 561
 - 16-5 *Relación entre la transformada de Fourier y la de Laplace* 567
 - 16-6 *Ancho de banda y duración de pulso* 569
 - 16-7 *Ancho de banda y tiempo de elevación* 573

APENDICES

- A **ALGEBRA DE NUMEROS COMPLEJOS (FASORES)** 583
 - A-1 *Definiciones* 583
 - A-2 *Suma y resta* 584
 - A-3 *Multiplicación* 585
 - A-4 *División* 586
 - A-5 *Logaritmo de número complejo* 587
 - A-6 *Raíces y potencias de números complejos* 588

- B **ALGEBRA MATRICIAL** 591
 - B-1 *Definiciones* 591
 - B-2 *Suma y resta de matrices* 592
 - B-3 *Multiplicación de matrices* 593
 - B-4 *Otras definiciones* 594
 - B-5 *Solución matricial de ecuaciones lineales simultáneas* 595

C	CAMBIO DE ESCALAS	59
	C-1 <i>Un ejemplo de cambio de escala</i>	599
	C-2 <i>Escalas de frecuencia y magnitud</i>	600
D	TABLA DE TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE	60
E	EJERCICIOS PARA COMPUTADORA DIGITAL	601
	E-1 <i>Métodos numéricos para encontrar raíces</i>	609
	E-2 <i>Integración numérica</i>	609
	E-3 <i>Formulación y operaciones matriciales</i>	610
	E-4 <i>Cómo resolver ecuaciones algebraicas lineales simultáneas</i>	610
	E-5 <i>Operaciones algebraicas</i>	610
	E-6 <i>Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias</i>	610
	E-7 <i>Solución de ecuaciones diferenciales no lineales</i>	610
	E-8 <i>Análisis de redes</i>	611
	E-9 <i>Determinación por computadora de la graficación de magnitud y fase</i>	611
	E-10 <i>Referencias</i>	610
F	BIBLIOGRAFIA	613
	F-1 <i>Libros de texto elementales e intermedios</i>	613
	F-2 <i>Textos avanzados de teoría de circuito</i>	615
	F-3 <i>Textos de teoría de circuito orientados a la computadora</i>	616
	F-4 <i>Modelación de dispositivos</i>	617
	F-5 <i>Sistemas</i>	618
	F-6 <i>Material básico o de interés histórico</i>	618
G	RESPUESTAS A PROBLEMAS SELECTOS	619
H	NOTAS HISTORICAS	627
	INDICE	631

ANÁLISIS DE REDES

1999
2000
2001
2002
2003
2004
2005
2006
2007
2008
2009
2010
2011
2012
2013
2014
2015
2016
2017
2018
2019
2020
2021
2022
2023
2024
2025

CAPITULO]

1 Desarrollo del concepto de circuito

1-1. INTRODUCCION

Una de las características del método científico es la combinación continua de una gran variedad de hechos que se ajusten a una teoría simple y comprensible con la cual se expliquen tantas observaciones como sea posible. El químico y educador norteamericano James Conant ha utilizado el nombre *esquema conceptual* para la teoría o la representación resultante.¹ Quizás el esquema conceptual con el que más familiarizados están los estudiantes de ciencia e ingeniería es el de la teoría atómica, de la que se toman las representaciones del electrón y de la carga eléctrica. Otros esquemas conceptuales importantes son la conservación de la energía y la conservación de la carga.

Aunque la electricidad y el magnetismo se conocían desde los orígenes de la humanidad —la carga del ámbar por fricción, y el uso del imán en la navegación— no fue sino hasta el siglo XIX cuando se lograron progresos notables en el desarrollo de un esquema conceptual. Cuando, alrededor de 1800, Galvani y Volta descubrieron que la electricidad se podía producir por medios químicos, la experimentación se simplificó notablemente. Poco tiempo después de Volta se hicieron importantes descubrimientos. En 1820 Oersted relacionó el campo magnético con la corriente y Ampère midió la fuerza producida por la corriente. En 1831 Faraday y, de un modo independiente, Henry, descubrieron la inducción eléctrica. En 1873 el físico inglés James Clerk Maxwell reunió éstos y otros experimentos para formar un esquema conceptual propiamente dicho. En las ecuaciones de Maxwell,

¹ James B. Conant, *Science and Common Sense* (Yale University Press, Nueva Haven, Conn. 1951).

como se conoce este esquema, se explican todos los fenómenos eléctricos y magnéticos de acuerdo con los campos que producen la carga y la corriente. El éxito del esquema conceptual de Maxwell se corrobora, ya que los resultados deducidos de las ecuaciones de Maxwell, concuerdan con las observaciones realizadas en un período de más de 100 años.

En vista del éxito de Maxwell, ¿por qué es necesario embarcarse ahora en el estudio de *otro* esquema conceptual para los mismos fenómenos, o sea, el circuito eléctrico? Y lo que también es importante, ¿cómo se relacionan los dos conceptos? La respuesta a la primera de estas preguntas está en la utilidad práctica del concepto de circuito. Como cuestión práctica, a menudo el interés reside no tanto en los campos como en voltajes y corrientes. El concepto de circuito favorece el análisis hecho en función del voltaje y la corriente a partir de las cuales se pueden calcular, si se desea, otras cantidades —tales como carga, campos, energía, potencia, etc. La segunda pregunta requiere una contestación más amplia, así como una justificación. En resumen, los conceptos de circuito se fundamentan en los mismos hechos experimentales básicos que las ecuaciones de Maxwell. Sin embargo, el circuito incluye aproximaciones que no están comprendidas en el concepto más general de la teoría del campo. Es importante que se comprenda la naturaleza de estas aproximaciones —las limitaciones de la teoría de circuitos— antes de desarrollar el tema.

Conviene definir la función de circuitos conforme a dos bloques básicos: carga y energía. La carga y la energía se pueden considerar como los mínimos comunes denominadores para describir los fenómenos eléctricos, cantidades primitivas en función de las cuales se puede desarrollar el esquema conceptual del circuito eléctrico. Un circuito físico es un sistema de aparatos interconectados. Aquí, el vocablo *aparato* incluye fuentes de energía, alambres de conexión, componentes, cargas, etc. Un circuito transfiere y transforma energía; la transferencia de energía se logra mediante la transferencia de cargas. En el circuito, la energía se transfiere de un punto de suministro (la fuente) hasta un punto de transformación o conversión denominado carga (o sumidero). En este proceso, se puede almacenar energía.

1-2. CARGA Y ENERGÍA

Al griego Tales de Mileto se le atribuye haber descubierto, aproximadamente en el año 600 antes de Cristo, que cuando se frota con fuerza ámbar con un trozo de seda o piel, el ámbar se “electrifica” y atrae pequeños trozos de hilo. Siglos más tarde, Coulomb utilizó en Francia (y por su parte, Cavendish, en Inglaterra) esta misma técnica de producir electricidad, para establecer la ley de la inversa de los cuadrados en la atracción de cuerpos cargados.

El conocimiento actual de la naturaleza de la carga se basa en el esquema conceptual de la teoría atómica. El átomo se representa como un núcleo cargado positivamente, que está rodeado por electrones de carga negativa. En el átomo neutro, la carga total del núcleo es igual a la carga total de los electrones. Cuando se quitan electrones a una sustancia, ésta queda cargada positivamente. Una sustancia que tiene un exceso de electrones tiene carga negativa.

La unidad básica de carga es la del electrón. La unidad MKS de carga es la *coulomb*. El electrón tiene una carga de 1.6021×10^{-19} coulombs.

El fenómeno de la transferencia de carga de un punto de un circuito a otro se describe mediante el término *corriente eléctrica*. La corriente eléctrica se puede definir como la rapidez con la que la carga eléctrica se transfiere a través de un corte transversal del conductor. Un movimiento desordenado de los electrones dentro de un metal no constituye una corriente a menos que se tenga una transferencia neta de carga con el tiempo.

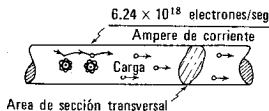
Expresada como ecuación, la corriente² es

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1-1)$$

Si la carga q se mide en coulombs y el tiempo t se mide en segundos, la corriente se mide en *amperes* (en honor del físico francés André Ampère). Puesto que el electrón tiene una carga de 1.6021×10^{-19} coulombs, se infiere que una corriente de 1 amp corresponde al movimiento de $1/(1.6021 \times 10^{-19}) = 6.24 \times 10^{18}$ electrones que pasan por cualquier sección transversal de una trayectoria, en 1 segundo.

De acuerdo con el esquema conceptual de la teoría atómica, todas las sustancias se representan como compuestas de átomos. En un sólido, algunos electrones están relativamente libres del núcleo, es decir, las fuerzas de atracción que se ejercen en estos elementos son extremadamente pequeñas. Tales electrones se denominan *electrones libres*. Una corriente eléctrica es la rapidez con la que las cargas de estos electrones libres pasan de un átomo al siguiente, como se ilustra en la figura 1-1.

Figura 1-1. Representación del movimiento de carga en un conductor.



² El símbolo i de la corriente se debe al vocablo francés *intensité*.

18 Desarrollo del concepto de circuito

En algunos materiales existen muchos electrones libres, de manera que se pueden obtener con facilidad corrientes intensas. Esos materiales se denominan *conductores*. La mayoría de los metales y algunos líquidos son buenos conductores. Los materiales que tienen relativamente pocos electrones libres se conocen como *aislantes*. Entre los materiales aislantes más comunes están el vidrio, la mica, los plásticos, etcétera. Hay otros materiales llamados *semiconductores* que tienen un papel importante en la electrónica. Los dos semiconductores más comunes son el germanio y el silicio.

Se ha generalizado el concepto erróneo de que, puesto que algunas ondas eléctricas se propagan aproximadamente a la velocidad de la luz, los electrones se desplazan dentro del conductor con la misma velocidad. La velocidad media real del desplazamiento de los electrones libres es apenas de unos cuantos milímetros por segundo. (Véase el ejemplo numérico del problema 1-2.)

Otro esquema conceptual en el que se basa el razonamiento, es el de la *conservación de la energía*. Debido a la preparación adquirida en los métodos científicos, se sospecha inmediatamente de cualquier método que pretenda crear energía. La ley de conservación de la energía establece que ésta no crea ni se destruye, sino que tan sólo se transforma. La energía eléctrica se obtiene a partir de la conversión de otra forma de energía. Existen varias maneras de lograr esto, entre las cuales están las que siguen:

- (1) *Conversión de energía electromecánica*. El generador giratorio, diseñado según la invención de Faraday en 1831, produce energía eléctrica a partir de la energía mecánica de rotación. Por lo general, la energía mecánica se obtiene al convertir energía térmica por medio de una turbina; a su vez, la energía térmica se obtiene convirtiendo energía química mediante la combustión de un combustible fósil o nuclear. En algunas ocasiones se obtiene por conversión de energía hidráulica mediante generadores hidroeléctricos.
- (2) *Conversión de energía electroquímica*. Las baterías eléctricas producen energía por conversión de energía química. Un uso potencialmente importante de estas baterías es el del automóvil eléctrico. Las celdas de combustible se incluyen en esta clasificación general.
- (3) *Conversión de energía magnetohidrodinámica (MHD)*. Estos dispositivos generan energía eléctrica a partir de la energía mecánica de un gas ionizado de alta velocidad.
- (4) *Conversión de energía fotovoltaica*. Los dispositivos de esta clase pueden convertir directamente la energía luminosa en energía eléctrica. La *celda solar* es el dispositivo más conocido de este tipo.

La función de cada una de estas diferentes fuentes de energía eléctrica es la misma en lo que respecta a energía y carga. Por ejemplo, en una forma de batería se sumergen dos electrodos metálicos —uno de zinc y otro de cobre— en ácido sulfúrico diluido. La formación de iones de zinc y cobre hace que la carga negativa se acumule en los electrodos. Se obtiene energía mediante la diferencia en la energía de ionización del zinc y el cobre dentro de la reacción química. Al cerrarse el circuito de la batería mediante una conexión externa, como se indica en la figura 1-2; la energía química se gasta como trabajo para cada unidad de carga al transportar la carga alrededor del circuito externo. La cantidad “energía por unidad de carga” o, lo que es lo

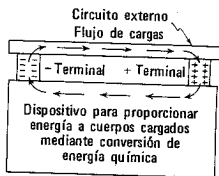


Figura 1-2. Representación de una batería para ilustrar el flujo de electrones. El sentido de la corriente se analiza en la sección 2-1.

mismo, “trabajo por unidad de carga” recibe el nombre de *voltaje*. En forma de ecuación se expresa como sigue,

$$v = \frac{w}{q} \quad (1-2)$$

Si w es el trabajo (o energía) en joules y q es la carga en coulombs, el voltaje v se mide en *volts* (en honor de Alessandro Volta). El voltaje de una fuente de energía se describe a veces por medio del término *fuerza electromotriz*, cuya abreviatura es *fem* en los textos de electricidad. Aquí no se denomina fuerza al voltaje porque esto puede conducir a errores.

Si a una cantidad diferencial de carga dq se le da un incremento diferencial de energía dw , el potencial de la carga se incrementa por la cantidad

$$v = \frac{dw}{dq} \quad (1-3)$$

Si este potencial se multiplica por la corriente, dq/dt , como sigue,

$$\frac{dw}{dq} \times \frac{dq}{dt} = \frac{dw}{dt} = p \quad (1-4)$$

se puede ver que el resultado es una rapidez de cambio de energía que es la *potencia* p . Por tanto, la potencia es el producto del potencial y la corriente,

1944

1945

1946

1947

1948

1949

1950

1951

1952

1953

1954

1955

1956

1957

1958

1959

1960

1961

1962

1963

1964

1965

1966

1967

1968

1969

1970

1971

1972

1973

1974

1975

1976

1977

1978

1979

1980

1981

1982

1983

1984

1985

1986

1987

1988

1989

1990

1991

1992

1993

1994

1995

1996

1997

1998

1999

2000

2001

2002

2003

2004

2005

2006

2007

2008

2009

2010

2011

2012

2013

2014

2015

2016

2017

2018

2019

2020

2021

2022

2023

2024

2025

20 Desarrollo del concepto de circuito

$$p = vi \quad (1-5)$$

La energía, como función de la potencia, se encuentra integrando la ecuación (1-4). En consecuencia, la energía total en cualquier tiempo dado t es la integral

$$w = \int_{-\infty}^t p \, dt \quad (1-6)$$

El cambio de energía del tiempo t_1 al tiempo t_2 se puede encontrar del mismo modo integrando desde t_1 hasta t_2 .³

1.3. LA RELACION DE LOS CONCEPTOS DE CAMPO Y DE CIRCUITO

Al desarrollar el esquema conceptual de circuito se seguirán tres etapas idénticas para cada uno de los tres parámetros. Estas etapas son:

- (1) *El fenómeno físico.* Se verá en forma cuantitativa un fenómeno eléctrico que se observa por experimentación. Esto se hará en función de carga y energía.
- (2) *Interpretación del campo.* A continuación se analizará la interpretación del fenómeno de acuerdo con una cantidad de campo.
- (3) *Interpretación del circuito.* Por último, se introducirá un parámetro de circuito para relacionar el voltaje y la corriente en vez de la relación de campo.

1.4. EL PARAMETRO CAPACITANCIA

(1) *Fenómeno físico.* La presencia de carga en dos substancias espacialmente separadas —por ejemplo, las que aparecen en la figura 1-3— da origen a una “acción a una distancia” en la forma de una fuerza

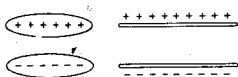


Figura 1-3. Ilustración de dos sustancias cargadas espacialmente separadas.

³ La ecuación (1-6) y las que siguen se pueden escribir en función de la variable ficticia x , como

$$w = \int_{-\infty}^t p(x) \, dx$$

El uso de t para indicar dos cosas en una ecuación no debe infundir confusión.

entre ambas substancias. Este fenómeno se considera una propiedad de la naturaleza, es decir, un hecho experimental básico. Coulomb encontró que esta fuerza era de tal índole que "las cargas de mismo signo se repelen" y "las cargas de signo contrario se atraen" y que la fuerza varía de acuerdo con la ecuación

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2} \quad (1-7)$$

En esta ecuación, F es la fuerza en newtons dirigida de una carga puntual a otra carga puntual, r es la separación de las cargas puntuales en metros, ϵ es la permitividad que tiene un valor para el espacio libre de 8.854×10^{-12} farad por metro en el sistema MKS y q_1 y q_2 son las cargas medidas en coulombs. Se debe entender que esta ecuación se aplica estrictamente a las cargas puntuales. No obstante, la ecuación se puede aplicar a cualquier distribución de cargas mediante la suma vectorial de todas las fuerzas.

(2) *Interpretación de campo.* Este fenómeno se puede describir en términos de una fuerza sobre una unidad de carga situada entre dos cuerpos cargados. Esta fuerza por unidad de carga, es una cantidad vectorial, ya que la fuerza es una cantidad vectorial; se denomina *campo eléctrico* de valor

$$E = \frac{F}{q} \quad (1-8)$$

Como ayuda conceptual, este campo se puede representar por medio de líneas trazadas en el sentido de la fuerza que se ejercería sobre la unidad de carga positiva exploradora en cada punto. Estas líneas se ilustran en la figura 1-4. Tales líneas son ayudas conceptuales: no se debe pensar que existen en realidad. El campo eléctrico se puede evaluar para cualquier problema en particular aplicando las ecuaciones (1-7) y (1-8).

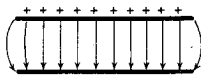


Figura 1-4. Líneas del campo eléctrico o "líneas de fuerza" entre dos conductores cargados.

(3) *Interpretación de circuitos.* El campo eléctrico E de la ecuación (1-8) existirá entre conductores cargados de forma arbitraria. Como caso especial, véanse los conductores de placa paralela que aparecen en la figura 1-4. Supóngase que las placas de área A son lo suficientemente grandes para que se pueda despreciar la deformación de campo en los extremos de ellas. Sea la carga en la placa superior igual a q . La densidad de carga en la placa será q/A . De acuerdo con la ley de Gauss,

$$q = \int_S \mathcal{D} \cos \theta dS \quad (1-9)$$

en donde \mathcal{D} es la densidad de flujo, dS es un elemento de superficie y θ es el ángulo formado entre \mathcal{D} y dS ; esto permite ver que, para las

22 Desarrollo del concepto de circuito

placas paralelas, $q = \mathfrak{D}A$. La densidad de flujo y el campo eléctrico están relacionados por medio de la ecuación $\mathfrak{D} = \epsilon E$, de tal modo que

$$E = \frac{q}{\epsilon A} \quad (1-10)$$

El voltaje está expresado ahora en función del campo eléctrico por medio de $v_{ab} = \int_a^b E \cos \theta \, dl$. Para las placas paralelas, esto implica que $v = Ed$, en donde d es la separación de las placas. De donde se tiene que

$$v = \left(\frac{d}{\epsilon A} \right) q = Dq \quad (1-11)$$

en donde D se define como la *elastancia*. La recíproca de D se define como la *capacitancia* C . De acuerdo con C , la ecuación (1-11) se convierte en

$$q = Cv \quad (1-12)$$

de manera que, para las placas paralelas,

$$C = \frac{\epsilon A}{d} \quad (1-13)$$

Para conductores de otras formas, C se puede determinar mediante un procedimiento similar. En cada caso, C será una función de la geometría de los conductores y de ϵ . En la ecuación (1-12), si q se mide en coulombs y v en volts, la unidad de C es el *farad* (en honor de Michael Faraday), y la unidad D lleva el nombre extraño de *daraf* (que es farad deletreado en sentido inverso). La cantidad C (o la cantidad D) que caracteriza el sistema en estudio y permite escribir la simple relación que hay entre v y q , se conoce como *parámetro de circuito*, o sea, la capacitancia de un sistema.

Para alcanzar el objetivo propuesto: establecer una relación entre el voltaje y la corriente en un sistema capacitivo, queda todavía la tarea de estudiar la relación entre la carga y la corriente dada por la ecuación

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1-14)$$

Si existe una carga inicial en el sistema, q_0 , y ésta aumenta linealmente con el tiempo, en cualquier instante la carga se puede escribir como sigue

$$q = q_0 + kt \quad (1-15)$$

La corriente se puede encontrar diferenciando la carga con respecto al tiempo, lo cual da el valor

$$i = \frac{dq}{dt} = k \quad (1-16)$$

Por tanto, se puede ver que la corriente del sistema es independiente de la carga inicial que éste tenga. Para ir en otra dirección, la computación de la carga, dada la corriente, se integra $dq = i dt$. Para encontrar la carga de las placas en el tiempo t se integra sobre todo el tiempo anterior.

$$q = \int_{-\infty}^t i dt \quad (1-17)$$

Esta ecuación se puede escribir en forma distinta separando la integral en dos partes.

$$q = \int_{-\infty}^0 i dt + \int_0^t i dt = q_0 + \int_0^t i dt \quad (1-18)$$

Para llegar a este resultado se observa que la corriente para $t < 0$, o la información equivalente, se da casi siempre como parte del problema, en tanto que la corriente para $t \geq 0$ se desconoce y se debe determinar. En realidad, no se interesa la corriente dentro del intervalo $-\infty < t < 0$, sino sólo la integral de esta corriente, que es la carga acumulada en las placas del capacitor como resultado de toda la corriente para el tiempo anterior a $t = 0$. Esta cantidad constante se designa como q_0 . Volviendo una vez más a la relación $q = Cv$, la corriente y el voltaje se relacionan por medio de la ecuación

$$\frac{dq}{dt} = i = \frac{d}{dt}(Cv) \quad (1-19)$$

Si la capacitancia C no varía con el tiempo (o con la carga), entonces

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (1-20)$$

Sin embargo, si C no es constante, sino que varía como una función del tiempo, la corriente se debe encontrar a partir de la relación general

$$i = \frac{d}{dt}(Cv) = C \frac{dv}{dt} + v \frac{dC}{dt} \quad (1-21)$$

Del mismo modo, principiando con la ecuación $v = Dq$, se encuentra que

$$v = D \int_{-\infty}^t i dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt \quad (1-22)$$

Las ecuaciones (1-19) y (1-22) relacionan al voltaje y la corriente para un sistema capacitivo a través del parámetro de circuito C .

EJEMPLO 1

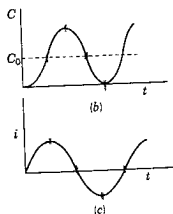
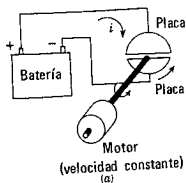


Figura 1-5. Un capacitor impulsado por motor produce una capacitancia que varía con el tiempo, como se ilustra en (b), de tal manera que la corriente de la batería es la que se muestra en (c).

En el dibujo de la figura 1-5(a) se muestran dos placas, a una de las cuales la impulsa un motor de velocidad constante, de tal manera que la capacitancia entre las dos placas varía de acuerdo con la ecuación

$$C(t) = C_0(1 - \cos \omega t) \quad (1-23)$$

Si el potencial de la batería permanece constante a V volts, la corriente, como función del tiempo, se puede encontrar por medio de la ecuación 1-21 como sigue

$$i = \frac{d}{dt}(Cv) = V \frac{dC}{dt} = \omega C_0 V \sin \omega t \quad (1-24)$$

Esta variación de la corriente en función del tiempo se muestra en la figura 1-5(c).

De acuerdo con la relación $q = Cv$, se puede ver que un cambio instantáneo en el producto Cv implica un cambio instantáneo en q , lo que a su vez, implica una corriente infinita. Al estudiar sistemas físicos, se excluye la posibilidad de una corriente infinita. Las conclusiones a que de acuerdo con esta restricción se llega en el capítulo 8 se volverán a ver cuando se estudie la idealización matemática de una función de una duración extremadamente pequeña y una magnitud extremadamente grande conocida como *función de impulso*. Ahora se examinarán las consecuencias de suponer que los valores de la corriente tienen un límite finito. De acuerdo con el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$, en donde q o Cv cambia en una cantidad finita como se ilustra en la figura 1-6, Δt no puede ser cero. El cambio instantáneo de Cv que se indica como la curva 1, queda descartado. Los cambios típicos de Cv o q que se permiten son los que señalan las curvas 2 y 3.

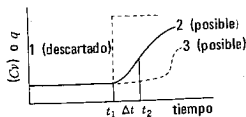


Figura 1-6. Ilustración de los posibles cambios en el tiempo del producto Cv en un sistema físico.

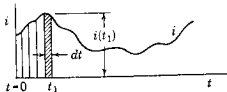
De acuerdo con otro planteamiento, la carga se da como

$$q(t) = q_0 + \int_0^t i dt \quad (1-25)$$

mediante la ecuación (1-18). La integral de esta ecuación no puede tener un valor finito para tiempo cero con i finita; en otras palabras,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t i dt = 0, \quad i \neq \infty \quad (1-26)$$

Figura 1-7. Integración de la corriente para dar la carga, interpretada como la suma de áreas infinitesimales.



El proceso de integración se ilustra en la figura 1-7 como la suma de las áreas infinitesimales, siendo i la altura y dt el ancho. El intervalo de $t = 0$ a t_1 debe ser mayor que cero para cualquier área que se vaya a sumar.

Estas ecuaciones matemáticas ayudan a visualizar el requisito de que la carga en un sistema capacitivo no puede aumentar o disminuir en tiempo cero. No obstante, la capacitancia o el voltaje pueden cambiar instantáneamente siempre y cuando el producto de las dos cantidades se mantenga constante, como sigue

$$C_1 v_1 = C_2 v_2 \quad (1-27)$$

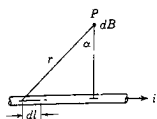
en donde los subíndices 1 y 2 se refieren a las condiciones que existen en tiempos separados por un intervalo pequeñísimo (por ejemplo, antes y después de cerrar un interruptor).

En la mayoría de los casos que se verán, la capacitancia de una red no cambia con el tiempo. De acuerdo con esta condición, la exposición anterior se simplifica para llegar a la conclusión importante de que el voltaje en un sistema capacitivo no puede cambiar instantáneamente.

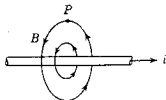
1-5. EL PARAMETRO INDUCTANCIA

(1) *El fenómeno físico.* En 1820 Oersted hizo el importante descubrimiento de que la fuerza entre dos substancias cargadas depende de la rapidez del flujo de la carga (la corriente). En el experimento de Oersted, la aguja de una brújula se desvió debido a la presencia de un conductor portador de corriente, indicando que el efecto se relacionaba con el magnetismo. En el mismo año, Ampère midió la fuerza producida por la corriente y expresó la relación en forma de ecuación. Este efecto magnético es una "acción a distancia", al igual que sucede en el caso de la fuerza entre cuerpos cargados. Esta "acción a distancia" es un hecho básico observado, es decir, no se deduce de otros conocimientos.

(2) *Interpretación de campo.* El fenómeno antes descrito se puede interpretar de acuerdo con la fuerza por unidad de polo magnético en todos los puntos del espacio. Oersted descubrió que esta fuerza estaba dirigida a ángulo recto con el conductor portador de la corriente. De acuerdo con la geometría de la figura 1-8(a), Ampère describió una



(a)

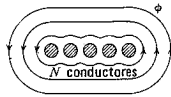


(b)

Figura 1-8. Identificación de las cantidades que determinan el campo magnético en el punto P a partir de la ecuación 1-28.



(a)



(b)

Figura 1-9. Convenciones acerca del campo magnético y del flujo para una corriente cuyo sentido es hacia afuera de la página.

densidad de campo magnético B , la fuerza por unidad de polo magnético con un valor de

$$dB = \frac{\mu i \cos \alpha \, dl}{4\pi r^2} \quad (1-28)$$

en donde μ es la permeabilidad magnética que es función del medio en que existe el campo magnético, i es la corriente en amperes y las otras cantidades se definen en la figura. La figura 1-9(a) muestra el corte transversal de un conductor que porta una corriente. De acuerdo con la ecuación (1-28), la densidad del campo magnético será constante a una distancia constante del conductor. Se pueden trazar líneas continuas con flechas para indicar el sentido de B , como una ayuda conceptual. Estas son líneas de densidad del campo magnético o "líneas de fuerza". Para geometrías más complejas que la que aparece en la figura 1-9(a), la posición de las líneas se puede encontrar integrando la ecuación (1-28) o moviendo experimentalmente un polo magnético "puntual" (si existiera) de un lugar a otro en el espacio. Una brújula puede dar una indicación aproximada de los sentidos.

A veces es conveniente reemplazar las líneas de densidad del campo magnético por líneas de *flujo magnético* definidas por la ecuación integral

$$\phi = \int_s B \cos \theta \, dS \quad (1-29)$$

en donde θ es el ángulo entre la superficie de integración y la densidad de campo B . Si las corrientes de cada uno de los N conductores que se representan en la figura 1-9(b) están en un sentido tal que sus flujos se suman, entonces, se dice que existen $N\phi$ concatenamientos de flujo.⁴ No obstante, si las líneas de flujo ϕ_1 enlazan a N_1 conductores, las líneas ϕ_2 enlazan N_2 conductores y así sucesivamente, el número total de enlaces de flujo o flujo concatenado se encuentra mediante la suma algebraica

$$\psi = \sum_{j=1}^n N_j \phi_j \quad (1-30)$$

Suponiendo que todas las líneas enlacen o concatenen a todos los conductores, la ecuación (1-29) se puede modificar para dar el flujo concatenado como

$$\psi = N \int_s B \cos \theta \, dS \quad (1-31)$$

⁴ Para una exposición de algunos de los problemas encontrados en el uso (y las aplicaciones equivocadas) del concepto del flujo concatenado, véanse dos obras clásicas: Joseph Slepian, "Lines of Force in electric and magnetic fields", *Am. J. Phys.*, 19, 87 (1951), y L. V. Bewley, *Flux Linkages and Electromagnetic Induction* (The Macmillan Company, Nueva York, 1952; reimpresa por Dover Publications, Inc., Nueva York, 1964).

El parámetro inductancia 27

El siguiente descubrimiento experimental básico se le atribuye a Faraday. Faraday experimentó con dos circuitos conductores próximos en el espacio. Encontró que un campo magnético *variable* producido por un circuito *inducía* un voltaje en el otro. El campo magnético *variable* se podía producir mediante (1) un conductor que se desplaza en el espacio o (2) una corriente que cambia con el tiempo.

Faraday no representó este método de inducir un voltaje como si fuera una "acción a distancia", sino en función de los cambios en el flujo concatenado. Un conductor que se mueve en un campo magnético (como sucede en el caso de un generador) se considera que "corta flujo" y, por tanto, "reduce el flujo concatenado"; el voltaje que se induce en un conductor estacionario (como en un transformador) se considera como algo originado por un "flujo concatenado variable" en el tiempo. Estas representaciones son valiosas como ayudas conceptuales siempre y cuando no se les dé un significado físico al flujo concatenado que, después de todo, sólo es un medio para explicar la acción a distancia. La ley de Faraday es

$$v = k \frac{d\psi}{dt} \quad (1-32)$$

en donde k es una constante de proporcionalidad. En el sistema MKS, las unidades se seleccionan de tal manera que k tenga el valor de la unidad: Cuando ψ está en weber-vueltas, t está en segundos y $k = 1$, entonces v está en volts.

(3) *Interpretación de circuito.* Para deducir la relación de circuito entre voltaje y corriente en el sistema descrito en (2), se principia con la ley de Faraday,

$$v = \frac{d\psi}{dt} \quad (1-33)$$

o su forma integral equivalente

$$\psi = \int_{-\infty}^t v dt \quad (1-34)$$

Incidentalmente, se observará la semejanza de esta expresión con la que corresponde a la carga en términos de la corriente,

$$q = \int_{-\infty}^t i dt \quad (1-35)$$

Comparando las dos ecuaciones, se puede ver que ψ es al voltaje como la carga es a la corriente. Ahora, el flujo concatenado se relaciona con el campo magnético mediante la ecuación (1-31) y, a su vez, la densidad del campo magnético se relaciona con la corriente por

28 Desarrollo del concepto de circuito

la ley de Ampère, ecuación (1-28). Al hacer estas substitutiones, suponiendo que i se puede eliminar de la integral,⁵ se tiene que

$$\psi = \left[N \int \left(\int \frac{\mu \cos \alpha \, dl}{4\pi r^2} \right) dS \right] i \quad (1-36)$$

El término de la integral, que se puede evaluar matemáticamente para figuras geométricas simples o se puede encontrar midiendo ψ e i , se define como el *parámetro inductancia* (o el coeficiente de inductancia). Si ψ e i se refieren al mismo sistema físico, el parámetro se define como autoinductancia, representada por la letra L como

$$\psi = Li \quad (1-37)$$

Sin embargo, si una corriente i_1 produce un flujo concatenado ψ_2 en otro circuito, el parámetro es de *inductancia mutua* y el símbolo se cambia a M , como sigue

$$\psi_2 = M_{21} i_1 \quad (1-38)$$

(Nuevamente, note la similitud entre estas ecuaciones y la relación $q = Cv$.) Al substituir la ecuación (1-37) en la ley de Faraday, se obtiene una ecuación que relaciona al voltaje y la corriente dentro de un circuito magnético,

$$v = \frac{d}{dt} (Li) \quad (1-39)$$

⁵ Si el sistema acoplado magnéticamente es no lineal, por contener algún medio saturable, se puede decir que el flujo concatenado con el circuito k es una función de las corrientes de todos los otros circuitos acoplados,

$$\psi_k = \psi_k(i_1, i_2, i_3, \dots, i_n)$$

De acuerdo con la ecuación (1-32), el voltaje en el circuito k está dado por la ley de Faraday como sigue:

$$v_k = \frac{d\psi_k}{dt} = \frac{\partial \psi_k}{\partial i_1} \frac{di_1}{dt} + \frac{\partial \psi_k}{\partial i_2} \frac{di_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \psi_k}{\partial i_k} \frac{di_k}{dt} + \dots + \frac{\partial \psi_k}{\partial i_n} \frac{di_n}{dt}$$

Cada término de derivada parcial se evalúa manteniendo constantes todas las demás corrientes. Estos términos se pueden definir como coeficientes de inductancia, de manera que el voltaje se convierte en

$$v_k = M_{k1} \frac{di_1}{dt} + M_{k2} \frac{di_2}{dt} + \dots + L_{kk} \frac{di_k}{dt} + \dots + M_{kn} \frac{di_n}{dt}$$

en donde M representa la inductancia mutua y L la autoinductancia. Cuando el sistema es lineal, esta ecuación se reduce a la que más adelante se identifica como (1-51).

(en donde M substituye a L en los casos apropiados). Si la inductancia no varía con el tiempo, la ecuación (1-39) se convierte en

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (1-40)$$

La ecuación (1-39) se puede integrar para dar

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v dt \quad (1-41)$$

La cantidad $(1/L)$ se representa a veces mediante el signo Γ , que es la letra "gama" mayúscula del alfabeto griego. El henry (designado en honor del científico estadounidense Joseph Henry) es la unidad MKS para la inductancia.

En el caso del sistema capacitivo, se encontró que la carga y el producto Cv no pueden cambiar instantáneamente. Se podría pensar que existe una relación similar para un sistema inductivo en vista de las analogías que se han señalado antes. En efecto, existe esta relación que se puede encontrar, con ayuda de la ecuación (1-34), en la siguiente forma:

$$\psi = \psi_0 + \int_0^t v dt \quad (1-42)$$

De acuerdo con los argumentos que se dan en la sección anterior respecto a la capacitancia, la integral de esta ecuación tiene un valor cero para $t = 0$, suponiendo que v es finita. Por tanto, en un sistema alterado en forma instantánea —por ejemplo, cerrando un interruptor— el flujo concatenado debe ser el mismo antes y después de que se altera el sistema, pero sólo durante un intervalo extremadamente corto. De acuerdo con la ecuación (1-42),

$$\psi = \psi_0 = \text{una constante} \quad (1-43)$$

que equivale a decir que el flujo concatenado no puede cambiar instantáneamente en un sistema determinado. Esta conclusión se describe como el *principio del flujo concatenado constante*. Si se hace que el subíndice 1 se relacione con el tiempo inmediatamente antes de que se altere el sistema y el subíndice 2 se relacione con el mismo sistema después de que se altera, estos conceptos se pueden resumir mediante las ecuaciones

$$\psi_1 = \psi_2 \quad \text{or} \quad L_1 i_1 = L_2 i_2 \quad (1-44)$$

El principio del flujo concatenado constante es similar al principio de la conservación de la cantidad de movimiento en la mecánica. La analogía es útil debido a que a veces es más fácil visualizar los cam-

30 Desarrollo del concepto de circuito

bios en un sistema mecánico que en un circuito eléctrico. La ley de fuerza, de Newton, es

$$F = \frac{dt}{d} Mv \quad (1-45)$$

en donde F es la fuerza, M la masa y v la velocidad. El producto Mv se conoce como *cantidad de movimiento*; la cantidad de movimiento de un sistema no puede cambiar en forma instantánea. En un sistema como el de un cohete, en donde se pierde masa en función del tiempo, la velocidad debe cambiar en tal forma que la cantidad de movimiento permanezca constante. Se verá que existe un número de leyes de conservación análogos:

(1) La conservación de la carga:

$$q_1 = q_2 \quad \text{y} \quad C_1 v_1 = C_2 v_2, \quad i \neq \infty$$

(2) La conservación del flujo concatenado:

$$\psi_1 = \psi_2 \quad \text{y} \quad L_1 i_1 = L_2 i_2, \quad v \neq \infty$$

(3) La conservación de la cantidad de movimiento:

$$p_1 = p_2 \quad \text{y} \quad M_1 v_1 = M_2 v_2, \quad F \neq \infty$$

Cuando la inductancia se mantiene constante, se produce una importante especialización del principio del flujo concatenado constante. *En un sistema inductivo fijo, la corriente no puede cambiar instantáneamente.*

EJEMPLO 2

En un determinado sistema inductivo se tiene la forma de onda de corriente que aparece en la figura 1-10. Se debe encontrar el voltaje

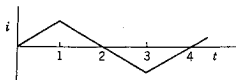


Figura 1-10. La variación de corriente en función del tiempo que se considera en el ejemplo 2.

que produce esta forma de onda de corriente y la carga asociada, expresándolas ambas en función del tiempo. Se supondrá que L permanece constante. La relación $v = L(di/dt)$ indica que el voltaje se puede encontrar diferenciando la corriente y multiplicando por una

constante. El resultado se ilustra en la figura 1-11. La carga se puede determinar integrando la corriente para dar el resultado que se señala en la figura 1-12.

Figura 1-11. Forma de onda del voltaje correspondiente a la corriente de la figura 1-10, en un inductor.

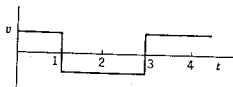


Figura 1-12. Forma de onda de la carga correspondiente a la corriente de la figura 1-10.

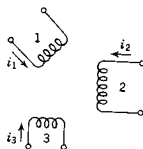
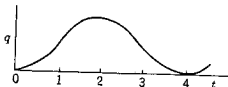


Figura 1-13. Representación de tres bobinas acopladas magnéticamente.

Es importante que se pueda aplicar el concepto de la inductancia a varios sistemas con acoplamiento magnético. En la figura 1-13 se ilustra un conjunto de tres bobinas acopladas magnéticamente. Para simplificar el sistema por ahora, sean $i_2 = i_3 = 0$ y se considerará el efecto de la corriente i_1 . La corriente i_1 produce el flujo concatenado ψ_1 que, de acuerdo con la ecuación (1-37), es

$$\psi_1 = L_1 i_1 \quad (i_2 = i_3 = 0) \quad (1-46)$$

en donde L_1 es el parámetro de autoinductancia (llamado casi siempre sólo inductancia). En cada uno de los otros circuitos, i_1 producirá un flujo concatenado proporcional a su parámetro de inductancia mutua. Para el sistema particular que se estudia,

$$\psi_2 = M_{21} i_1 \quad \text{y} \quad \psi_3 = M_{31} i_1 \quad (i_2 = i_3 = 0) \quad (1-47)$$

El orden de los subíndices de M requiere una mayor atención. De acuerdo con las dos ecuaciones, debe de quedar claro que el primer subíndice se refiere al flujo concatenado y el segundo a la corriente. Este acuerdo particular se ha aceptado para dar la simetría deseada a las ecuaciones generales, que es el siguiente tema de estudio. Una ayuda para recordar este acuerdo en particular es que los subíndices están en el orden de "efecto, causa", si se supone que, para este esquema conceptual, la corriente produce el flujo.

En el caso general, se tendrán fuentes o cargas conectadas a cada una de las bobinas que aparecen en la figura 1-13 y ninguna corriente será cero. Se supondrá por ahora que los sentidos de las corrientes y los sentidos de los devanados de las bobinas son tales que todos los flujos concatenados son *aditivos*, posponiendo el caso más general para el capítulo 2. El flujo concatenado total en la bobina 1 se compone del flujo concatenado producido por la corriente en la bobina 1 *más*

32 Desarrollo del concepto de circuito

los flujos concatenados producidos por las corrientes i_2 e i_3 . En forma de ecuación, esto se expresa como

$$\psi_1 = L_1 i_1 + M_{12} i_2 + M_{13} i_3 \quad (1-48)$$

y lo mismo para las otras dos bobinas,

$$\psi_2 = M_{21} i_1 + L_2 i_2 + M_{23} i_3 \quad (1-49)$$

$$\psi_3 = M_{31} i_1 + M_{32} i_2 + L_3 i_3 \quad (1-50)$$

La simetría que se vio en el párrafo anterior es evidente ahora. Los coeficientes de inductancia mutua tienen subíndices que designan tanto el renglón como la columna en el arreglo de ecuaciones anterior.

El interés que aquí se tiene por flujos concatenados constituye sólo un punto de apoyo para los voltajes. El voltaje que se induce en cada bobina está dado por la ley de Faraday como la rapidez de variación del flujo concatenado. Si los parámetros de inductancia son constantes, estos voltajes se determinan fácilmente mediante diferenciación y son

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} + M_{13} \frac{di_3}{dt} \quad (1-51)$$

$$v_2 = M_{21} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{23} \frac{di_3}{dt} \quad (1-52)$$

$$v_3 = M_{31} \frac{di_1}{dt} + M_{32} \frac{di_2}{dt} + L_3 \frac{di_3}{dt} \quad (1-53)$$

En los capítulos 2 y 3 se estudiarán las condiciones en las que son negativos algunos de los términos de estas ecuaciones.

1-6. EL PARAMETRO RESISTENCIA

(1) *Fenómeno físico.* El paso de electrones a través de un material no se logra sin que éstos sufran choques con otras partículas atómicas. Es más, estas colisiones no son elásticas y se pierde energía en cada una de ellas. Tal pérdida de energía por unidad de carga se interpreta como caída en el potencial a través del material. La cantidad de energía que pierden los electrones se relaciona con las propiedades físicas de una sustancia en particular.

(2) *Interpretación de campo.* El físico alemán Georg Simon Ohm descubrió experimentalmente que existe una relación entre la corriente en una sustancia y la caída de potencial. De acuerdo con el concepto de campo, el cambio en energía por unidad de carga produce una fuerza por unidad de carga —o campo eléctrico. Este efecto se puede interpretar en términos de un campo en el sentido de la corriente a

través de la substancia conductora. El experimento de Ohm se puede expresar de acuerdo con este campo y la corriente por unidad de área transversal como

$$J = \sigma E \quad (1-54)$$

en donde, en unidades MKS, J es la densidad de corriente en amperes por metro², E es el campo a lo largo de la substancia conductora en volts por metro, y σ es la conductividad de la substancia, que es una constante para cada material.⁶

(3) *Interpretación de circuito.* Si la substancia portadora de la corriente tiene una geometría idealizada, tal como la que se indica en la figura 1-14(b), se puede reducir la forma de campo de la ley de Ohm para relacionar la corriente y el voltaje. Si el conductor es de sección transversal *uniforme*, la corriente y la densidad de corriente se pueden relacionar mediante la ecuación

$$i = \int_S J \cos \theta \, dS = JS \quad (1-55)$$

en donde S es el área del corte transversal. Para la misma geometría simple, el campo eléctrico es uniforme y está dirigido en el sentido longitudinal del alambre conductor, es decir,

$$v = El \quad (1-56)$$

como un caso especial de la relación más general

$$v = \int_{l_1}^{l_2} E \cos \theta \, dl \quad (1-57)$$

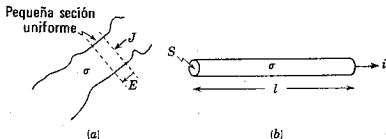


Figura 1-14. Conductores e identificación de las cantidades incluidas en la ley de Ohm.

⁶ En realidad, la ecuación (1-54) es un caso especial que es válido sólo para substancias isotrópicas. De igual manera, σ es independiente de la magnitud de E sólo para el rango lineal de operación.

34 Desarrollo del concepto de circuito

Al substituir las ecuaciones (1-55) y (1-56) en la forma de campo de la ley de Ohm, la ecuación (1-54) da

$$v = \left(\frac{l}{\sigma S}\right) i \quad (1-58)$$

La cantidad $(l/\sigma S)$, que es una constante para la geometría constante del conductor, recibe el nombre de *parámetro resistencia*, o simplemente *resistencia*, y se representa mediante la letra R . Para formas geométricas distintas de la sencilla que se ilustra en la figura 1-14(b), será más difícil calcular el coeficiente que relaciona la corriente y el voltaje para una substancia. No obstante, la medición de la corriente y el voltaje puede establecer el valor del parámetro resistencia y evitar el problema de cálculo. La ley de Ohm se puede escribir como

$$v = Ri \quad (1-59)$$

o bien, en función de la carga, como

$$v = R \frac{dq}{dt} \quad (1-60)$$

La ecuación $v = Ri$ se escribe a veces en la forma

$$i = Gv \quad (1-61)$$

en donde $G = 1/R$ se conoce como *conductancia*. En el sistema MKS, la unidad de resistencia es el *ohm* y la de conductancia es el *mho*.

A pesar de que ahora es muy conocida la ley de Ohm, este físico fue ridiculizado por los científicos de su tiempo cuando anunció su ley en 1826, y no fue sino hasta 30 años más tarde cuando por fin se

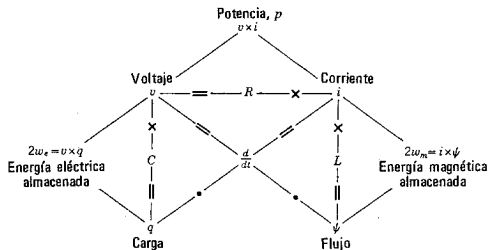


Figura 1-15. Gráfica que ilustra las relaciones de las cantidades básicas en función de los parámetros de circuito. (Tomado de M. Kawakami, *EREM Chart*, Kyoritsu Shuppan Co., Tokio.)

aceptaron sus ideas. Por supuesto, se debe recordar que los conceptos de corriente y voltaje no se habían comprendido del todo en sus días, y Ampère fue el primero que estableció, en 1820, una distinción entre las dos cantidades. Incluso hoy en día, cuando se lee en los periódicos declaraciones tales como "pasaron 10,000 volts por su cuerpo", se comprende que la distinción no ha quedado del todo clara para los legos en la materia.

Algunas de las relaciones que se han visto hasta ahora en este capítulo, se resumen en forma compacta en la figura 1-15 y en forma tabular en la tabla 1-1. Estas ecuaciones se encuentran con tanta frecuencia en el estudio de la ingeniería eléctrica, que hay que memorizarlas.

TABLA 1-1. RESUMEN DE RELACIONES PARA LOS PARAMETROS

Parámetro	Relación básica	Relaciones voltaje corriente	Energía
R $G = \frac{1}{R}$	$v = Ri$	$v_R = Ri_R$ $i_R = Gv_R$	$w_R = \int_{-\infty}^t v_R i_R dt$
L (o M)	$\psi = Li$	$v_L = L \frac{di_L}{dt}$ $i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L dt$	$w_L = \frac{1}{2} Li^2$
C $D = \frac{1}{C}$	$q = Cv$	$v_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C dt$ $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$	$w_C = \frac{1}{2} Cv^2$

1-7. UNIDADES Y ESCALAS

Las unidades para describir circuitos que se han introducido hasta ahora en este capítulo se resumen en la tabla 1-2, y los prefijos aceptados aparecen en la tabla 1-3. Estas unidades forman parte de un sistema que se designa con el nombre de Sistema Internacional de Unidades (*International System of Units*) y son las que se usan convencionalmente en la ingeniería eléctrica. En aplicaciones de ingeniería se utilizan otras unidades que son múltiplos o submúltiplos de éstas y que llevan los prefijos que se indican en la tabla 1-3. Por ejemplo, en circuitos electrónicos, los valores de capacitores se expresan casi siempre en microfarads (μF) o en picofarads (pF), los de inductores en milihenries (mH), etc.

Para facilitar los cálculos, se usarán con frecuencia valores de parámetros que son valores pequeños enteros dentro del rango de 1 a 10, en vez de emplear valores que representan situaciones reales de la

TABLA 1-2. RESUMEN DE SIMBOLOS Y UNIDADES

Cantidad	Símbolo*	Unidad	Unidades equivalentes	Abreviatura de la unidad
Carga	q	coulomb	—	C
Corriente	i, I	ampere	coulomb/segundo	amp.
Flujo concatenado	ψ	weber-vuelta	—	Wb
Energía	w, W	joule	newton-metro	J
Voltaje	v, V	volt	joule/coulomb	V
Potencia	p, P	watt	joule/segundo	W
Capacitancia	C	farad	coulomb/volt	F
Inductancia	L, M	henry	weber/ampere	H
Resistencia	R	ohm	volt/ampere	Ω
Conductancia	G	mho (ohm ⁻¹)	ampere/volt	\mathcal{U} s
Tiempo	t	segundo	—	seg.
Frecuencia	f	hertz	ciclos/segundo	Hz
Frecuencia	ω	radián/segundo	$\omega = 2\pi f$	ninguna

* En los casos del voltaje, la corriente, la energía y la potencia, las minúsculas indican casi siempre una cantidad que *varía en función del tiempo*, y las mayúsculas una cantidad que *no varía con el tiempo* (por ejemplo, un promedio).

TABLA 1-3.

Factor por el que se multiplica la unidad	Prefijo	Símbolo
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^2	hecto	h
10	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	ato	a

ingeniería práctica. Se encontrará una buena justificación de esta práctica, además de la facilidad de cálculo, cuando se estudie la frecuencia y la impedancia. En resumen, las técnicas de *escalas*, que se den en el apéndice C, hacen posible cambiar los valores prácticos a un rango de enteros pequeños para realizar el análisis o el diseño. Aquí se está dando una anticipación de lo que más tarde será una situación normal.

1-8. ENFOQUE DE UN SISTEMA FÍSICO COMO CIRCUITO

Ya se estudió la forma en que tres fenómenos eléctricos observados experimentalmente se pueden describir en función de los parámetros de circuito. Un problema al que se deberá hacer frente finalmente al usar el concepto de circuito, es el de representar un sistema físico de acuerdo con estos parámetros. Por ejemplo, ¿se puede dibujar un circuito que represente un motor eléctrico, un cristal piezoeléctrico, una bobina de alambre, una antena o un circuito integrado sobre un trozo de silicio?

Supóngase que se examina un sistema físico arbitrario, buscando porciones del sistema que se puedan substituir por parámetros equivalentes. Es posible que los efectos resistivos sean más fáciles de distinguir. Una parte del sistema hecho con material de alta resistividad, con áreas transversales pequeñas y longitudes apreciables, se podría reconocer como equivalente a una resistencia grande y se podría distinguir con facilidad de otra parte del sistema con una resistencia pequeña. Se ha descubierto que existe un efecto capacitivo entre dos partes cualesquiera de un sistema. Si las dos partes constituyen un sistema donde se pueden concentrar las cargas, produciéndose un intenso campo eléctrico —por ejemplo, una gran área para almacenar carga y una distancia pequeña entre una parte y otra— es grande la capacitancia de esa parte del sistema. Por último, un efecto inductivo se asocia con cada conductor portador de corriente y un efecto de inductancia mutua entre cada par de conductores de los cuales por lo menos uno lleva corriente. Si los conductores se localizan dentro del espacio en tal forma que los campos magnéticos se refuerzan entre sí, entonces es grande la inductancia —ya sea, autoinductancia o inductancia mutua— de esa parte del sistema.

Esto es lo que se puede decir respecto a los efectos grandes. ¿Y qué se puede añadir acerca de efectos más pequeños o secundarios que se pueden reconocer más o menos en la misma forma? ¿Exactamente, cuántos efectos hay que tomar en cuenta al representar un sistema por medio de parámetros equivalentes?

Se puede responder a estas preguntas formulando otra más: ¿Qué tan buenos resultados esperamos obtener? La exactitud de los resultados se determina mediante el número de efectos eléctricos independientes que se tomen en cuenta por medio de un parámetro. Hay un punto en el que debemos detenemos y, en este mismo punto, es necesario hacer una *aproximación*.

Las aproximaciones requieren un criterio de ingeniería. Una aproximación que es válida en un caso no lo será necesariamente en otro. En muchos casos prácticos, la resistencia y la inductancia de alambres de conexión son tan pequeñas que se pueden despreciar. De igual manera, en la mayoría de los casos de capacitores comerciales se puede hacer caso omiso de los parámetros inductivo y resistivo. Con

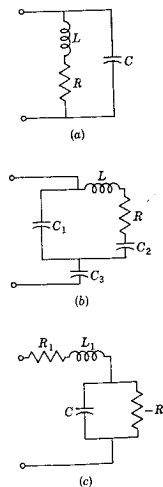


Figura 1-16. Una forma de circuito equivalente o modelo para (a) una antena excitada en su extremo, (b) un cristal piezoeléctrico y (c) un diodo túnel.

mucho menos frecuencia se pueden despreciar la resistencia y la capacitancia de las bobinas.

En la exposición que se hace en otros capítulos se supondrá que cuando se da una representación esquemática de un sistema se han tomado en cuenta todos los parámetros significativos. El individuo que elaboró el problema efectuó un juicio de ingeniería; pero cuando el estudiante aplica finalmente las técnicas de análisis a un problema que él formula, las cuestiones asociadas con la aproximación también se deben contestar. Es difícil responder a tales preguntas en los libros de texto. Por lo general, la experiencia es el mejor maestro.

La aproximación no es, de ninguna manera, una característica exclusiva del análisis de circuitos. Para resolver problemas al calcular los campos eléctrico y magnético para todas las posiciones en el espacio, se tendrán con toda seguridad aproximaciones ya sea en las representaciones del sistema físico por ecuaciones matemáticas o en la solución de tales ecuaciones. La aproximación y el análisis van siempre unidos. Ignorar el problema de aproximación equivale a no entender los resultados del análisis.

En muchos casos no se principia con un sistema desconocido que se vaya a representar mediante un circuito, sino, por el contrario, con componentes comerciales que, combinados, forman un circuito. No obstante, un componente denominado *inductor* no se comportará como un elemento puro. En algunas circunstancias, presentará efectos capacitivos y resistivos. Estos efectos indeseables se distinguen comúnmente con el adjetivo *parásitos*. La decisión de cuáles efectos se deben tomar en cuenta implica el mismo juicio de ingeniería que se citó anteriormente. Los efectos parásitos se pueden despreciar sólo en tanto la aproximación sea útil.

En todos los casos se ha supuesto que los campos magnético y eléctrico están aislados y que no hay interacción entre ambos. Si se registra tal interacción, parte de la energía se pierde por *radiación*.

Para llegar a las ecuaciones correspondientes a los parámetros de circuito, ecuaciones (1-11), (1-36) y (1-58), fue necesario hacer las siguientes aproximaciones de simplificación: (1) que la carga no variaba con las dimensiones y (2) que la corriente no variaba ni con la longitud del conductor ni con el área transversal. Si no es posible aplicar estas suposiciones, los valores de los parámetros son diferentes y difíciles de calcular.

Para ilustrar la forma en que la corriente y la carga pueden variar con el tamaño del sistema, supóngase que se hace fluir la corriente sólo por un intervalo muy breve y que este flujo pulsado se repite, a un ritmo periódico, un gran número de veces cada segundo. En estas condiciones, la corriente y la carga no serán uniformes en todo el sistema. Se pueden imaginar algunas porciones del sistema con carga y otras sin ella. Si éste es el caso, las expresiones generales se deben utilizar para evaluar los parámetros de capacitancia, inductancia y resis-

tencia. Estos nuevos valores de parámetros, calculados o medidos, serán diferentes de los que se determinaron con una corriente y una carga uniformes en el sistema. ¿Se deben calcular los parámetros de un sistema para cada corriente diferente?

La respuesta a esta pregunta es, una vez más, un caso práctico de criterio ingenieril. Ciertamente, habrá condiciones que requieran algún valor efectivo de los parámetros —calculados para una forma de onda en función del tiempo— que se deberán usar. Pero en muchos casos, da resultados satisfactorios la *aproximación* de que los valores de parámetro son los que se encuentran en condiciones no variables o estáticas. Esta aproximación es estrictamente válida en los casos en que la variación de la corriente y la carga es lenta, el llamado *estado casi estacionario*. En los siguientes capítulos se supondrá que se opera en tal estado. Por tanto, se supondrán *parámetros constantes* bajo variaciones de corriente y de carga.

También se supondrá que los parámetros son constantes para variaciones de la *magnitud* de la carga, corriente o voltaje. Por tanto, como se indica en la figura 1-17, un dispositivo que tiene características no

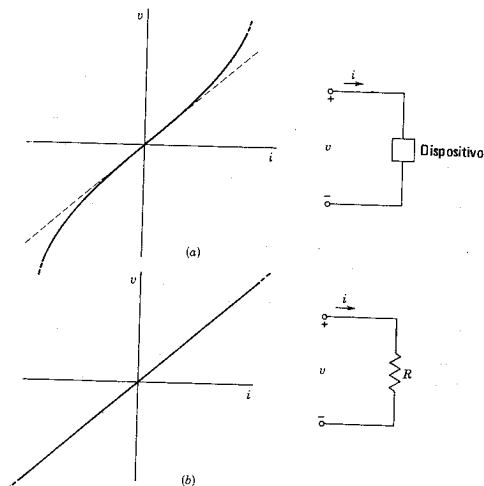


Figura 1-17. (a) Un dispositivo y sus relaciones de voltaje y corriente, y (b) la idealización correspondiente o modelo que es un resistor con una relación lineal entre v e i .

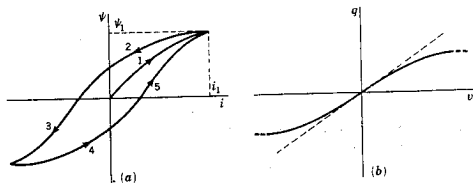


Figura 1-18. Características no lineales: (a) la de un inductor con histéresis y (b) la de un capacitor. Si las líneas características son rectas y pasan por el origen, se dice que el elemento es lineal y el parámetro de red es una constante.

lineales de voltaje y corriente se representa mediante un modelo, una resistencia en este caso, para el que el voltaje y la corriente tienen una relación lineal. Se dice que un sistema compuesto de tales elementos es *lineal*. Se supondrá que todos los sistemas que se van a estudiar (a menos que se especifique otra cosa) son lineales; en consecuencia, se excluyen los elementos y los sistemas *no lineales*. En la figura 1-18 se ilustran dos sistemas de esta naturaleza por medio de sus características. El sistema inductivo representado en la figura 1-18(a) tiene una no linealidad tipo histéresis, en tanto que la característica del sistema capacitivo de la figura 1-18(b) tiene una relación no lineal entre q y v . Algunos sistemas no lineales se pueden representar como lineales en ciertas condiciones. Los transistores son elementos no lineales; pero para ciertos análisis se puede considerar que son lineales para una gama restringida de operación.

Además de la suposición de linealidad, se incluirá el requisito de que todos los elementos dentro de un sistema sean *bilaterales*. En un sistema bilateral existe la misma relación entre corriente y voltaje independientemente del sentido de la corriente. Por el contrario, un sistema *unilateral* tiene diferentes leyes que relacionan la corriente al voltaje para los dos sentidos posibles de corriente. Como ejemplos de elementos unilaterales están los diodos al vacío, los de silicio, los rectificadores de selenio, etc.

Muchos sistemas eléctricos están físicamente distribuidos en el espacio. Por ejemplo, una línea de transmisión se puede extender por varios cientos de kilómetros. Cuando una fuente de energía se conecta a la línea de transmisión, la energía se transporta casi a la velocidad de la luz. Debido a esta velocidad finita, no todos los efectos eléctricos se desarrollan en el mismo instante. Siendo éste el caso, las restricciones que se vieron antes se aplican al cálculo de los parámetros de circuito. Cuando un sistema está tan concentrado en el espacio que la suposición de acciones simultáneas en todo el sistema es una buena aproximación, se dice que el sistema está *concentrado*. En esta obra se estudiarán sólo sistemas concentrados.

Este planteamiento del circuito a la aproximación de un sistema impide observar un efecto que generalmente se describe de acuerdo con la interacción de los campos eléctrico y magnético. Como una aproximación, se ha supuesto que el campo magnético se relaciona sólo con un sistema inductivo y que el eléctrico se asocia sólo con un sistema capacitivo. En realidad, los campos no pueden estar aislados de esta manera. La consecuencia de interacción de los campos es la *radiación* de energía electromagnética. Al abrir un interruptor en un sistema inductivo, se observarán efectos tales como el ruido en un receptor de radio cercano. Del mismo modo, la chispa de ignición de un automóvil puede afectar a los receptores de televisión cercanos. Sin embargo, en muchas circunstancias es pequeña la cantidad de energía que se

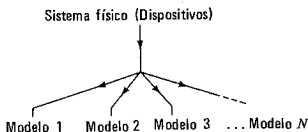


Figura 1-19. Un diagrama de flujo que sugiere que un dispositivo físico determinado o un sistema físico se puede representar mediante muchos modelos diferentes.

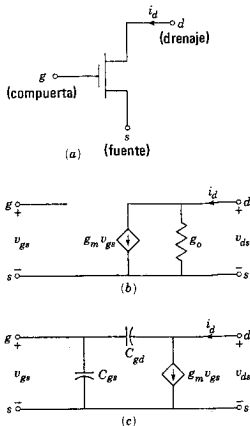


Figura 1-20. Un transistor de efecto de campo metal-óxido-semiconductor (MOSFET) con su símbolo correspondiente que aparece en (a) y dos modelos distintos, (b) y (c).

pierde por radiación y, como aproximación, se puede despreciar. Dicha aproximación se aplicará en este estudio.

En general, el objetivo consiste en sustituir los dispositivos o sistemas físicos con modelos de circuito apropiados, y luego completar el análisis del sistema de acuerdo con el modelo general. El modelo particular que se usa para un dispositivo o sistema dependerá de muchas cosas, tales como la disponibilidad de un programa de simulación de computadora digital para realizar el análisis, el refinamiento o la precisión requerida y la sensibilidad general de los resultados hacia la forma del modelo supuesto.

Es importante comprender que el modelo de un sistema no es único; que, en realidad, el modelo que se use dependerá siempre de la

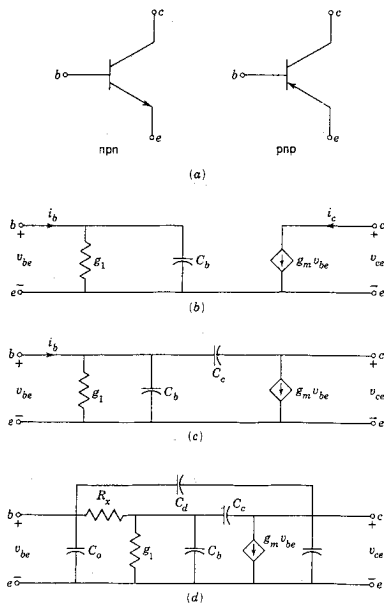


Figura 1-21. Los símbolos de los transistores bipolares *nnp* y *pnp* se ilustran en (a) y los modelos sucesivamente más complicados del transistor bipolar se muestran en (b), (c) y (d).

precisión que se requiera. Esto se ilustra en la figura 1-19: para un dispositivo o sistema físico determinado existen muchos modelos posibles y antes de iniciar el análisis es necesario hacer una elección de entre aquellos que estén disponibles.

Para ilustrar la intención de la figura 1-19, véase el transistor de metal-óxido-semiconductor de efecto de campo (MOSFET) que se representa mediante el símbolo que aparece en (a) de la figura 1-20. En (b) de la misma figura se muestra un modelo de circuito simple incremental para el MOSFET. Un modelo más complicado, que por lo general se aplica a frecuencias más altas, aparece en (c). Del mismo modo, los dos tipos de transistores bipolares se ilustran en (a) de la figura 1-21. Los modelos para el transistor que representan la complejidad cada vez mayor de acuerdo con el número de elementos usados, aparecen en (b), (c) y (d) de la figura 1-21.

BIBLIOGRAFIA

- BLACKWELL, W. A., *Mathematical Modeling of Physical Networks*, The Macmillan Company, Nueva York, 1968. Léanse los capítulos 1-3 donde se encuentra un planteamiento diferente basado en gráficas lineales.
- CHIRLIAN, PAUL M., *Basic Network Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969. En el capítulo 1 se desarrollan conceptos de circuito a partir de una formulación vectorial de las ecuaciones de campo.
- CLOSE, CHARLES M., *The Analysis of Linear Circuits*, Harcourt, Brace & World, Inc., Nueva York, 1966. Capítulo 1.
- CRUZ, JOSE B., Jr. y M. E. VAN VALKENBURG, *Signals in Linear Circuits*, Houghton Mifflin Company, Boston, Mass., 1974.
- DESOER, CHARLES A. y ERNEST S. KUH, *Basic Circuit Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969. Capítulo 2.
- GRAY, PAUL E. y CAMPBELL L. SEARLE, *Electronic Principles: Physics, Models, and Circuits*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1969.
- HAMILTON, D. J., F. A. LINDHOLM y A. H. MARSHAK, *Principles and Applications of Semiconductor Device Modeling*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., Nueva York, 1971.
- LEON, BENJAMIN J. y PAUL A. WINTZ, *Basic Linear Networks for Electrical and Electronics Engineers*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., Nueva York, 1970. Los capítulos 1 y 2 contienen un estudio notablemente claro de los temas de este capítulo.
- LYNCH, WILLIAM A. y JOHN G. TRUXAL, *Principles of Electronic Instrumentation*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1962. Se recomienda en forma especial, el capítulo 10 que trata de "Determinación de modelos para dispositivos físicos".
- MILLMAN, JACOB Y CHRISTOS C. HALKIAS, *Integrated Electronics: Analog and Digital Circuits and Systems*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1972.
- WELDLACK, BRUCE D. y JAMES K. ROBERDGE, *Electronic Components and Measurements*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1969.
- WING, OMAR, *Circuit Theory with Computer Methods*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., Nueva York, 1972. Véase el capítulo 2.

EJERCICIOS PARA COMPUTADORA DIGITAL

En lo que respecta al estudio de capacitores e inductores en este capítulo, véanse los ejercicios de integración numérica del apéndice E-2, sobre todo el capítulo 2 de la referencia 7 en el apéndice E-10 de Huelsman.

PROBLEMAS

- 1-1. De una esfera sólida de cobre de 10 cm de diámetro se eliminan 10^{13} electrones mediante un método de carga. (a) ¿Cuál es la carga de la esfera en coulombs? ¿Cuál es el signo de la carga? (b) ¿Cuál es el porcentaje de reducción del número total de electrones dentro de la esfera?
- 1-2. En cierto conductor de cobre, la densidad de corriente es de 250 amp/cm², y se tienen 5×10^{22} electrones libres en 1 cm³ de cobre. ¿Cuál es la velocidad media de desplazamiento de los electrones en centímetros por segundo?
- 1-3. La corriente de un circuito varía de acuerdo con la ecuación $i = 2e^{-t}$ amperes para t mayor que cero. Y es cero para t menor que cero. Encuentre la carga total que pasa a través del circuito, en coulombs.
- 1-4. El sistema que aparece en la figura 1-5(a) se construye de tal manera que la capacitancia de las placas varía con el tiempo tal como se muestra en la figura P1-4. Dibuje la forma de onda de la variación de corriente en el circuito, en función de tiempo. En su dibujo, superponga la forma de onda de la variación de capacitancia para mostrar la relación de las dos variables.

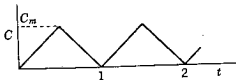


Fig. P1-4.

- 1-5. Para el sistema que se vio en el problema 1-4, que se ilustra en la figura 1-5(a), suponga que tanto el voltaje como la capacitancia varían con el tiempo de acuerdo con las ecuaciones $v = V_0 \sin \omega t$ y $C = C_0(1 - \cos \omega t)$. En esas condiciones ¿cuál es la ecuación para la corriente en el circuito? Dibuje esta corriente en función del tiempo.
- 1-6. Un capacitor simple está construido con dos placas de metal paralelas, separadas por un material dieléctrico. Suponiendo que no existe deformación del campo eléctrico en los bordes de las placas, demuestre que la capacitancia de este capacitor es

$$C = \frac{\epsilon A}{d} \text{ F}$$

en donde A es el área de cualquiera de las placas en metros², d es la distancia de separación de las placas en metros, y

$$\epsilon = K\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} K$$

en donde K es la constante dieléctrica relativa (que es 1 para el aire).

- 1-7. Sea un capacitor del tipo que se describe en el problema 1-6. Al efectuar las mediciones, se encuentra que la capacitancia por pulgada² es 5×10^{-12} F. ¿Cuál será la capacitancia si una hoja de las placas separadas por el dieléctrico, tiene un área de 10 pies²?

- 1-8. Dos tiras de estaño están separadas por una tira de mica (para la que $K = 5$ en el problema 1-6) a una distancia de 0.01 mm. Se coloca una segunda tira de mica sobre una de las hojas de estaño y la combinación se enrolla en tal forma que las capas de estaño y mica quedan alternadas. Si las tiras tienen un ancho de 10 cm, ¿cuál debe ser la longitud total de la tira para la capacitancia total sea $1\mu\text{F}$?
- 1-9. El capacitor de sintonía que se usa en receptores de radio se representa en la figura P1-9. Las placas están separadas por aire, a una distancia d ; las placas móviles y las placas fijas están conectadas juntas como se indica en

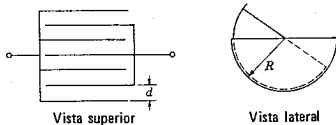


Fig. P1-9.

la figura. Haciendo caso omiso de la deformación de campo en los bordes determine la capacitancia máxima del capacitor de sintonía.

- 1-10. De acuerdo con la ecuación de definición de la energía $w = \int_{-\infty}^t vi dt$ demuestre que, para la inductancia, $w_L = \frac{1}{2} Li^2$ y $w_L = \frac{1}{2} \psi^2 / L$.
- 1-11. De acuerdo con la ecuación de energía del problema 1-10, demuestre que para la capacitancia, $w_C = \frac{1}{2} C v^2$ y $w_C = \frac{1}{2} D q^2$.
- 1-12. Suponga que el parámetro de inductancia se define como la constante que relaciona a la energía almacenada con el cuadrado de la corriente, por medio de la ecuación $w_L = \frac{1}{2} L i^2$. Utilizando la relación $p = vi$, demuestre que, para una inductancia constante, el voltaje del inductor es $v_L = L (di/dt)$.
- 1-13. Efectúe una deducción similar a la que se sugiere en el problema 1-12, principiando con la energía para un sistema capacitivo, $w_C = 1/2 D q^2$, para demostrar que, para D constante,

$$v_C = Dq = D \int_{-\infty}^t i dt$$

- 1-14. Hay varios dispositivos y sistemas que utilizan bancos de capacitores, tales como los sistemas de transmisión de potencia, los aceleradores de partículas nucleares y las unidades de destello electrónico que se usan en fotografía. Los capacitores para estos dispositivos se diseñan utilizando un material dieléctrico seleccionado para evitar la ruptura al voltaje de operación. Para una determinada constante dieléctrica, demuestre que la energía almacenada es directamente proporcional al volumen de los capacitores. A partir de esto, demuestre que, para un determinado material dieléctrico, el costo por joule almacenado en capacitores es aproximadamente constante e independiente del voltaje nominal o del valor de la capacitancia por capacitor individual.
- 1-15. El voltaje y la carga en un capacitor no lineal determinado están relacionados por la ecuación $q = Kv^{1/3}$. Para este capacitor, calcule la energía almacenada en función de la carga del capacitor.
- 1-16. El voltaje y la carga de un capacitor no lineal se relacionan mediante la ecuación.

$$v(q) = \frac{S_0}{a} \sinh(aq)$$

46 Desarrollo del concepto de circuito

- en donde S_0 y a son constantes. (a) Trace v en función de q . (b) Calcule la energía almacenada en función de q .
- 1-17. Un acumulador de 12-V se conecta a un capacitor de $1\text{-}\mu\text{F}$. Calcule la energía que se almacenará en el capacitor.
- 1-18. Un capacitor con una capacitancia de $1\text{-}\mu\text{F}$ se carga a 200V. Si la energía almacenada se utiliza con un 100 por ciento de eficiencia para levantar a un niño de 100 libras de peso, ¿qué distancia se elevará?
- 1-19. (a) Una forma de onda de voltaje idéntica a la forma de onda de corriente de la figura 1-10 se aplica a un sistema capacitivo. Grafique las formas de onda para la corriente y la carga. (b) La forma de onda de la corriente que aparece en la figura 1-10 se aplica a un sistema capacitivo. Trace las formas de onda del voltaje y la carga.
- 1-20. Una fuente proporciona una corriente de 1 amp a un inductor con un valor de $1/2$ H. Calcule la energía almacenada en el inductor. ¿Qué sucede con esta energía si la fuente se substituye por un corto circuito?
- 1-21. La corriente en un inductor de 1-H sigue la variación que se muestra en la figura que aparece a continuación. La corriente aumenta a partir de 0 para $t=0$ a una rapidez de 1 amp/seg (durante varios segundos, por lo menos). Encuentre: (a) el flujo concatenado en el sistema para $t=1$ seg, (b) la rapidez del cambio del flujo concatenado del sistema para $t=2$ seg y (c) la cantidad de carga que ha pasado por el inductor para $t=1$ seg.

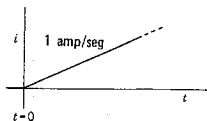


Fig. P1-21.

- 1-22. Un inductor variable cambia con el tiempo como se indica en la figura P1-4, substituyendo a C por L en henrys y C_m por L_m . Este inductor se conecta a una fuente de corriente de valor constante I_0 amperes. Determine $v_L(t)$, que es el voltaje en el inductor.
- 1-23. La variación de un inductor variable en el tiempo se ilustra en la figura P1-32, en donde $x=L(t)$ en lugar de i_C . Este inductor se conecta a una fuente de corriente constante con un valor de I_0 amperes. Determine $v_L(t)$, el voltaje en el inductor.
- 1-24. En el circuito que se ilustra, el interruptor K se cierra para $t=0$ (el tiempo de referencia). La corriente que fluye en el circuito está dada por la ecuación $i(t)=(1-e^{-t})$ amp, cuando $t>0$. Para un tiempo determinado, la corriente tiene un valor de 0.63 amp. (a) ¿Con qué rapidez cambia la corriente? (b) ¿Cuál es el valor del total del flujo concatenado? (c) ¿Cuál es la rapidez de cambio del flujo concatenado? (d) ¿Cuál es el voltaje a través del inductor? (e) ¿Cuánta energía está almacenada en el campo magnético del inductor? (f) ¿Cuál es el voltaje a través de la

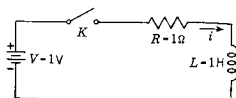


Fig. P1-24.

Problemas 47

- resistencia? (g) ¿Con qué rapidez se almacena la energía en el campo magnético del inductor? (h) ¿Con qué rapidez se disipa la energía en forma de calor? (i) ¿Con qué rapidez proporciona energía la batería?
- 1-25. En el circuito que se muestra, el capacitor se carga con un voltaje de 1 V y para $t=0$, el interruptor K se cierra. Se sabe que la corriente del circuito tiene la forma $i(t) = e^{-t}$ amp, cuando $t > 0$. En un instante determinado, la corriente tiene un valor de 0.37 amp. (a) ¿Con qué rapidez cambia el voltaje a través del capacitor? (b) ¿Cuál es el valor de la carga del capacitor? (c) ¿Cuál es la rapidez con que cambia el producto Cv ?

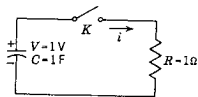


Fig. P1-25.

- (d) ¿Cuál es el voltaje en el capacitor? (e) ¿Cuánta energía está almacenada en el campo eléctrico del capacitor? (f) ¿Cuál es el voltaje a lo largo del resistor? (g) ¿Con qué rapidez se toma la energía del campo eléctrico del capacitor? (h) ¿Con qué rapidez se disipa la energía en forma de calor?
- 1-26. Demuestre que las siguientes cantidades tienen todas la dimensión tiempo: (a) RC ; (b) L/R ; (c) \sqrt{LC} . Demuestre que (d) R^2C tiene las dimensiones de una inductancia, (e) $\sqrt{L/C}$ tiene las dimensiones de una resistencia y (f) L/R^2 tiene las dimensiones de una capacitancia.
- 1-27-1-38. El siguiente grupo de problemas se relaciona con los elementos y las formas de ondas que aparecen en la figura. Para cada parte de este problema, trace la cantidad que se requiera haciendo con cuidado la escala del tiempo, las amplitudes significativas, las pendientes, etc. Dé los detalles suficientes para permitir que la forma de onda se construya sólo a partir de los datos.

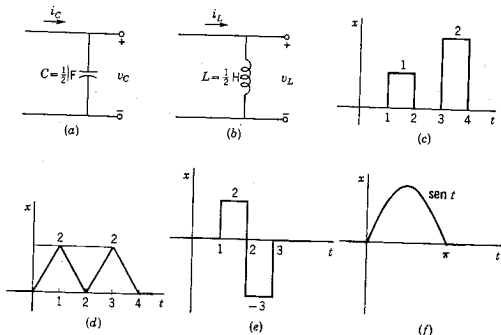


Fig. P1-27 a 38. (a, b, c, d, e, f)

	Red de	Dado que x es:	Que aparece en:	Dibuje:	Condición inicial:
1-27.	a	v_C	d	i_C	ninguna
1-28.	a	v_C	f	i_C	ninguna
1-29.	a	i_C	c	v_C	$v_C(0) = 0$
1-30.	a	i_C	d	v_C	$v_C(0) = 0$
1-31.	a	i_C	e	v_C	$v_C(0) = 0$
1-32.	a	i_C	f	v_C	$v_C(0) = 0$
1-33.	b	v_L	c	i_L	$i_L(0) = 0$
1-34.	b	v_L	d	i_L	$i_L(0) = 0$
1-35.	b	v_L	e	i_L	$i_L(0) = 0$
1-36.	b	v_L	f	i_L	$i_L(0) = 0$
1-37.	b	i_L	d	v_L	ninguna
1-38.	b	i_L	f	v_L	ninguna

- 1-39. En la figura se muestra una característica lineal por partes. Sea $x = q_C$ y $y = v_C$ de tal manera que la característica represente un capacitor no lineal. Si el voltaje que se aplica al capacitor es tal como se indica en la figura P1-32, grafique el valor correspondiente de $i_C(t)$.

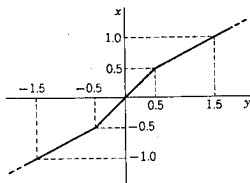


Fig. P1-39.

- 1-40. Repita el problema 1-39 si la forma de onda del voltaje es como se señala en la figura P1-30.
- 1-41. La característica lineal por partes que aparece en la figura P1-39, representa un inductor no lineal con $x = \psi_2$ y $y = i_L$. Si la corriente del inductor es la que se da en la figura P1-32, grafique el valor correspondiente de $u_L(t)$.
- 1-42. Repita el problema 1-41 si la forma de onda de corriente del inductor es la que se señala en la figura P1-30.

CAPITULO 2

2 Convenciones para describir redes

2-1. SENTIDOS DE REFERENCIA PARA CORRIENTE Y VOLTAJE

En la sección 1-2 se estudió la batería como fuente de energía y se describió el sentido del flujo de electrones de y hacia las terminales de ella. De acuerdo con esa batería, el sentido de la corriente es opuesto al sentido en que se mueve la carga, es decir, sale de la terminal positiva y entra por la negativa. Esta convención particular se debe a una decisión que tomó Benjamín Franklin en 1752. Franklin hizo la elección antes de que la electricidad se identificara con el electrón y antes de que se conociera el electrón propiamente dicho o la naturaleza de la carga. En realidad, los electrones fluyen de la terminal negativa a la positiva, que es el sentido opuesto al que estableció Franklin. Para distinguir las dos convenciones, al flujo de electrones se le denomina *corriente electrónica*, y a la corriente que se supone positiva porque tiene el sentido de la convención de Franklin se le llama *corriente convencional* (o, sencillamente, *corriente*, ya que ésta es la que usará aquí).

Al estudiar el sentido de la corriente, como en el párrafo anterior, es necesario establecer primero un *sentido de referencia*. En dicho ejemplo esto se hizo refiriéndose a las terminales de la batería. En sistemas más complicados, el sentido de referencia para la corriente se indica convenientemente mediante una flecha. Por tanto, el sentido de la corriente se puede describir como en el sentido de referencia o en sentido opuesto a éste.

Considérese ahora una fuente de energía que tiene la propiedad de que su voltaje terminal cambie de polaridad en función del tiempo. Para poder describir el voltaje de esta fuente —en la forma de una

ecuación o de una tabla de valores— se necesita un método de referencia de voltaje. El esquema que se usará es idéntico al que se empleó para la batería en el ejemplo anterior. Una terminal de la fuente se marca con el signo más, y la otra con el signo menos. (Por supuesto, esta especificación es excesiva, ya que se puede omitir una de las marcas.) Cuando la polaridad de la fuente coincide con las marcas de referencia, el voltaje se describe mediante un número positivo. Cuando la polaridad es opuesta a las marcas de referencia, el voltaje se designa con un número negativo. Recíprocamente, un valor positivo de voltaje indica que la polaridad es la de referencia, y un valor negativo señala una polaridad opuesta a la de referencia.

En algunos libros y revistas que el lector haya estudiado se utiliza una flecha en vez de los signos más y menos. La punta de la flecha corresponde al signo positivo y la cola al signo negativo.

Este mismo método de referencia se aplica a los voltajes de los elementos pasivos que se presentaron en el capítulo 1. Tales elementos pasivos tienen relaciones de voltaje-corriente que se expresan de acuerdo con los sentidos de referencia que aparecen en la figura 2-1. Por tanto, la ecuación

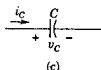
$$v_R(t) = Ri_R(t) \quad (2-1)$$



(a)



(b)



(c)

Figura 2-2. Los sentidos de referencia de la figura 2-1 aplicados a (a) el resistor, (b) el inductor y (c) el capacitor.

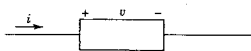


Figura 2-1. Sentidos de referencia del voltaje y de la corriente para todos los elementos pasivos.

implica el método de referencia para voltaje y corriente que se ilustra en la figura 2-2(a). De la misma manera, las ecuaciones¹

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (2-2)$$

y

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(t) dt \quad (2-3)$$

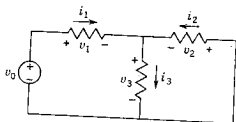
implican los métodos de referencia para el voltaje y la corriente de las figuras 2-2(b) y (c).

Para utilizar los métodos de referencia que se acaban de describir, se selecciona arbitrariamente un sentido de referencia para la corriente, y, a continuación, se señalan los signos de voltaje correspondientes, como se ilustra en la figura 2-1. Por ejemplo, en la figura 2-3 se

¹ Como en el capítulo 1, se usa t como variable y como límite, como en

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(x) dx$$

Figura 2-3. Red con sentidos de referencia asignados a todos los voltajes y las corrientes de rama.



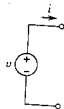
muestra una red completamente marcada con los sentidos de referencia. Si el análisis de la red para una fuente específica señala que v_2 es negativo en un instante dado, entonces se sabe que la polaridad real del voltaje v_2 es opuesta a la que se indica mediante los signos de referencia para ese instante considerado.

2-2. CONVENCIONES PARA ELEMENTOS ACTIVOS

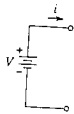
En la sección 1-4 se describieron varios tipos de fuentes de energía eléctrica. Los modelos o idealizaciones de estas fuentes se denominan *elementos activos* que se subclasifican de acuerdo con sus características de voltaje y corriente. Los dos modelos básicos son la *fuerza de voltaje* y la *fuerza de corriente*.

La fuente de voltaje. Se supone que la fuente de voltaje proporciona energía con un voltaje terminal específico, $v(t)$, que es independiente de la corriente de la fuente. Los símbolos y convenciones de referencia para esta fuente se ilustran en la figura 2-4, junto con la característica de voltaje-corriente. Cuando el voltaje que se genera no varía con el tiempo, se utiliza el símbolo para la batería que aparece en la figura 2-4(b); en todos los demás casos se emplea el símbolo de la figura 2-4(a). Se dice que la fuente está *en vacío* si las terminales de salida están abiertas de tal modo que $i(t) = 0$. Obsérvese también que cuando $v(t) = 0$ con la fuente desconectada, ésta equivale a un corto circuito.

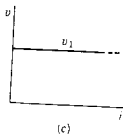
Muchos generadores, como los que se usan en las compañías de servicio eléctrico se pueden representar mediante el modelo que aparece en la figura 2-5(a), que consiste en una fuente conectada en serie



(a)

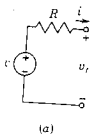


(b)

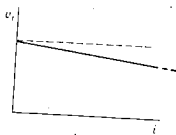


(c)

Figura 2-4. (a) Símbolo de una fuente de voltaje que varía con el tiempo y (b) para una fuente de voltaje que no varía con el tiempo (representada por una batería). (c) El voltaje de cualquier fuente de voltaje no es una función de la corriente de la fuente. El voltaje v_1 es el valor de v para un instante dado del tiempo. Las líneas paralelas a la identificada como v_1 son valores para otros tiempos.

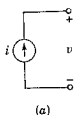


(a)

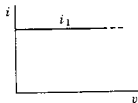


(b)

Figura 2-5. Un modelo para una fuente de voltaje en la que R representa a la resistencia de la fuente. Para el modelo de (a), el voltaje terminal depende de la corriente de la fuente, como se demuestra en (b), en donde $v_t = v - Ri$.

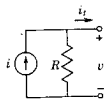


(a)

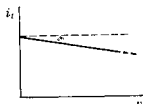


(b)

Figura 2-6. (a) Símbolo para la fuente de corriente para la cual i no depende de v , como se muestra en (b). Se pueden trazar otras líneas paralelas a las que se muestran para una corriente específica, i_1 .



(a)



(b)

Figura 2-7. Modelo para una fuente de corriente en la que R representa una resistencia en paralelo. Para el modelo de (a), la corriente terminal en (b) está dada por $i_f = i - (1/R)v$.

con un resistor. Para esta combinación, el voltaje terminal varía con la magnitud de la corriente de salida, como se señala en la figura 2-5(b). Para algunos cálculos, tales como los de estabilidad de sistemas, es necesario incluir los efectos inductivos y a veces también los capacitivos en los modelos de los dispositivos generadores reales.

La fuente de corriente. Se supone que la fuente de corriente proporciona energía con una corriente específica a través de las terminales, $i(t)$. El símbolo y las convenciones de referencia para la fuente de corriente difieren de los de la fuente de voltaje y se ilustran en la figura 2-6. En esta misma figura se indica también la característica de voltaje-corriente de la fuente de corriente. Se dice que una fuente de corriente está *en vacío* cuando las terminales de salida se ponen en circuito corto de tal modo que $v(t) = 0$. Cuando la fuente no está en vacío, suministra la misma corriente independientemente de la red a la que esté conectada, incluyendo la ausencia total de red. Se observará que cuando la fuente está desconectada, de tal modo que $i(t) = 0$, ésta equivale a un circuito abierto.

Algunos dispositivos se pueden representar con el modelo que aparece en la figura 2-7; éste consta de una fuente conectada en paralelo con un resistor. La variación correspondiente de la corriente terminal en función del voltaje en las terminales se muestra en (b) de la figura. Los dispositivos tales como transistores, tubos al vacío y celdas fotoeléctricas emplean fuentes de corriente en sus representaciones de modelo.

El lector observará que las descripciones para las fuentes de voltaje y corriente son *duales* en cuanto a que la función de la corriente y el voltaje está intercambiada en las dos fuentes. Como resultado de ello, se reconocerán otras cantidades duales, tales como circuito abierto y corto circuito, serie y paralelo, etc.

La fuente controlada (o fuente dependiente). Las fuentes de voltaje y corriente que se acaban de describir son modelos para los que el voltaje y la corriente, respectivamente, son fijos y, por tanto, no ajustables. En una fuente controlada, la fuente de voltaje o de corriente (dependiendo del tipo de fuente) no es fija, sino que depende del voltaje o de la corriente en otros puntos de la red. Por ejemplo, la fuente de voltaje controlada se puede representar como una fuente de voltaje para la cual la magnitud del voltaje de la fuente está determinada por el ajuste de un dispositivo, que a su vez, queda controlado mediante un voltaje o una corriente que se miden. En la figura 2-8 se muestra un tipo de fuente controlada. En este caso, la variable de control es el voltaje v_1 que controla el voltaje de la fuente μv_1 , en donde μ es una constante. En este tipo de fuente controlada las características de voltaje-corriente se convierten en un conjunto de curvas, como se señala en la figura 2-8(b).

La fuente controlada de la figura 2-8 es diferente de las otras dos fuentes que se han descrito ya que se trata de un modelo de tres terminales. Las tres terminales forman pares, siendo una de ellas común; un par se describe como la entrada, mientras que el otro constituye la salida. También se observará que, en cierto sentido, la fuente controlada es *unilateral* ya que la variable de entrada v_1 de la figura 2-8(a) controla la salida v_2 , pero que las condiciones en la salida, tales como la magnitud de la corriente i_2 , no influyen en la entrada.

La fuente controlada de la figura 2-8 es sólo una de cuatro tipos, dependiendo de si la variable de control es voltaje o corriente, y si la fuente controlada es una fuente de voltaje o de corriente. En la figura 2-9(a) se muestra otra combinación para la cual la variable de control es la corriente i_1 y la fuente controlada es una fuente de corriente. En la figura 2-9(b) se incluye una representación equivalente y simplificada de este modelo. Las dos formas restantes de fuentes controladas aparecen en la figura 2-10. Las fuentes controladas se emplean en muchos modelos de dispositivos, tales como el transistor y el tubo al vacío.

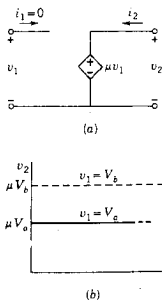


Figura 2-8. Fuente de voltaje controlada por voltaje para la cual v_2 depende de v_1 , pero no de i_2 .

2.3. CONVENCION DEL PUNTO PARA CIRCUITOS ACOPLADOS

Cuando el campo magnético que produce una corriente variable en una bobina induce un voltaje en otras bobinas, se dice que dichas bobinas están *acopladas* y los devanados constituyen un *transformador*. Si se saben los detalles de la estructura del transformador, entonces—para una corriente variable en una bobina—se pueden calcular la magnitud y el sentido de los voltajes que se inducen en los otros devanados. Se puede prescindir de engorrosos planos estructurales usando dos factores de caracterización. El valor del coeficiente de la inductancia mutua M (que ya se vio en el capítulo 1) equivale a detalles de construcción para calcular la *magnitud* del voltaje que se induce. La mayoría de los fabricantes marcan un extremo de cada devanado de transformador con un punto (o algún otro símbolo semejante). El punto equivale a detalles de construcción en lo que respecta al *sentido del voltaje*. En esta sección se analizará el significado de las marcas de punto, cómo se establecen experimentalmente y su significado en el análisis de redes.

En la figura 2-11 se muestran dos devanados en un núcleo magnético. En esta figura se indica el sentido del enrollado para los dos devanados, el devanado 1-1 (que se puede llamar el *primario*) el devanado 2-2 (el *secundario*). Se tiene una fuente de voltaje que varía con el tiempo $v_g(t)$ conectada al devanado 1-1 en serie con el resistor R_1 . En un momento dado, la fuente de voltaje tiene la polaridad indicada y la corriente $i_1(t)$ fluye en el sentido que indica la flecha y está aumentando. El extremo + del devanado aparece marcado con un

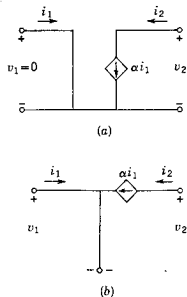


Figura 2-9. Fuente de corriente controlada por corriente con dos representaciones idénticas.

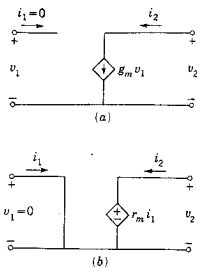


Figura 2-10. En esta figura se muestra la fuente de voltaje controlada por voltaje y la fuente de voltaje controlada por corriente. Estas dos, junto con las que aparecen en las figuras 2-8 y 2-9, constituyen los cuatro tipos básicos de fuentes controladas.

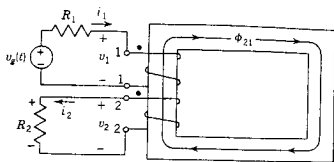


Figura 2-11. Un transformador de dos devanados que sirve para describir las convenciones del punto.

punto. Se supondrá que la corriente fluye hacia este punto. Se delineará paso a paso el método conceptual del proceso originado por esta corriente.

- (1) La corriente del devanado 1-1 crea un campo magnético (“acción a distancia”), que está concentrado a lo largo del eje de la bobina. La magnitud del campo se puede calcular a partir de la ley de Ampère,

$$dB = \frac{\mu i_1 dl \cos \alpha}{4\pi r^2} \quad (2-4)$$

(Estos símbolos se definieron en el capítulo 1.)

- (2) Se produce un flujo magnético ϕ asociado con el campo magnético, con un valor de

$$\phi = \int_S B \cos \theta dS \quad (2-5)$$

que tiene un sentido que se determina experimentalmente y se formula de acuerdo con la regla de la mano derecha: si se coge la bobina con la mano derecha, con los dedos apuntando en el sentido de la corriente, el pulgar indicará el sentido del flujo en la bobina. Se supone que este flujo está confinado al núcleo magnético, que proporciona la mejor trayectoria para el flujo. Al aplicar la regla de la mano derecha se puede ver que el flujo va en el sentido que indica la flecha (en el mismo sentido que las manecillas del reloj).

- (3) Puesto que el devanado 2-2 se encuentra sobre el mismo núcleo magnético que el devanado 1-1, el flujo que se produce en este último *enlaza* al devanado 2-2. Tal flujo de enlace se puede describir como ϕ_{21} , en donde los subíndices tienen el orden de “efecto, causa”. El número de enlaces de flujo del devanado 1-1, o flujo concatenado es

$$\psi_1 = N_1 \phi_{21} \quad (2-6)$$

De acuerdo con la ley de Faraday, ψ_1 se puede calcular a partir del voltaje en las terminales 1-1,

$$\psi_1 = \int_{-\infty}^t v_1 dt \quad (2-7)$$

Al combinar las ecuaciones (2-6) y (2-7), se obtiene el valor de flujo de acuerdo con el voltaje v_1 .

$$\phi_{21} = \frac{1}{N_1} \int_{-\infty}^t v_1 dt \quad (2-8)$$

- (4) Puesto que ϕ_{21} cambia con el tiempo, se induce un voltaje en el devanado 2-2, de acuerdo con la ley de Faraday. El flujo concatenado del devanado 2-2 es

$$\psi_2 = N_2 \phi_{21} \quad (2-9)$$

y v_2 tiene la magnitud

$$v_2 = \frac{d\psi_2}{dt} \quad (2-10)$$

En la exposición del capítulo 1 se introdujo el coeficiente de inductancia mutua para relacionar el flujo concatenado, con la corriente, como $\psi = Mi$. Para este sistema,

$$\psi_2 = M_{21} i_1 \quad (2-11)$$

y la ecuación (2-10) se puede expresar en forma equivalente (pero más adecuada), como sigue

$$v_2 = M_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (2-12)$$

si M_{21} no varía con el tiempo. La ecuación (2-12) indica que en el devanado 2-2 se induce un voltaje con una magnitud de M_{21} volts cuando la corriente i_1 tiene una velocidad de variación igual a la unidad. Queda todavía el problema del sentido de este voltaje.

- (5) El sentido del voltaje del devanado 2-2 se puede encontrar con la ayuda de una ley dada por el físico alemán Lenz en 1834. En cuanto al transformador, la *ley de Lenz* establece que el voltaje que se induce en una bobina debido a un cambio en el flujo tiende a establecer una corriente en un sentido tal que se oponga al cambio en el flujo que produce el voltaje. El flujo ϕ_{21} se dirige hacia arriba en la figura 2-11 y es creciente. Para producir un flujo ϕ_{12} que se oponga a este incremento en ϕ_{21} , es necesario (de acuerdo con la regla de la mano derecha) que la corriente fluya en el sentido que indica la flecha (de derecha a izquierda). En realidad, la ley de Lenz es una aplicación de la

ley de la conservación de la energía, ya que si i_2 produjera un flujo que ayudara a ϕ_{21} , se estaría induciendo otro incremento de corriente en 1-1, y así sucesivamente en un círculo vicioso, que produciría una corriente infinita.

Cuando ya se ha establecido el sentido de la corriente en el devanado 2-2, se observa que el extremo superior de éste es positivo y se marca así por medio de un punto. Con un voltaje que varía con el tiempo, las terminales marcadas con el punto son positivas simultáneamente (y, por supuesto, negativas simultáneamente). Esta acción se ilustra en la figura 2-12. Como se señala, $v_g(t)$ aumenta a partir de cero a un valor constante en el tiempo t_1 . La corriente i_1 y, por

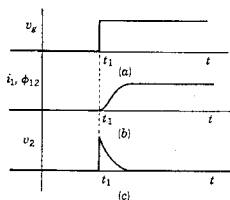


Figura 2-12. Formas de onda del voltaje y de la corriente de la red magnéticamente acoplada de la figura 2-10.

tanto, el flujo ϕ_{21} aumentan con el tiempo como se ilustra en (b). A propósito, se observará que la ecuación (2-8) no se aplica en forma directa, ya que da ϕ_{21} en función de v_1 en vez de v_g . El voltaje inducido v_2 es proporcional a la velocidad de variación de i_1 , de manera que tiene la variación en el tiempo que se señala en (c). Este ejemplo sugiere un método experimental sencillo para establecer las marcas de punto en los extremos de los devanados de un transformador. En el devanado escogido como 1-1, se marca arbitrariamente uno de los extremos del devanado con un punto y esta terminal se conecta con la terminal positiva de una batería, uniendo la terminal negativa al otro extremo del devanado. El extremo del devanado 2-2 que momentáneamente es positivo, de acuerdo con la indicación de un voltímetro, es la terminal que se debe marcar con el punto.

¿Qué valor tienen estos puntos, que ahora se pueden determinar en el análisis de redes? En la figura 2-13 se muestra el transformador de la figura 2-11, incluyendo los puntos, en donde se han intercambiado el generador y la carga de resistencia. La terminal positiva de la fuente de voltaje se conecta al extremo con punto del devanado 2-2. Un análisis paso a paso de este transformador demostrará que una corriente creciente que fluye hacia la terminal con punto del devanado 2-2 hace que el extremo superior del devanado 1-1 sea positivo, de manera que éste se identificará como la terminal con punto. Después de todo.

Convención del punto para circuitos acoplados 57

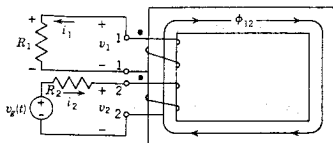


Figura 2-13. La red de la figura 2-10 después de cambiar la fuente de voltaje del devanado 1 al devanado 2.

es de esperarse que los puntos que se establezcan a partir de 1-1 a 2-2 concuerden con los que se establezcan de 2-2 a 1-1.

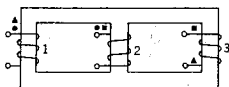
Supóngase ahora que la fuente de voltaje de la figura 2-13 tiene una polaridad inversa a la que se señala y que fluye una corriente creciente hacia *afuera del punto*. Otro análisis paso a paso o un razonamiento intuitivo simple demostrará que la terminal con punto del devanado 1-1 resulta negativa en estas condiciones.

Por tanto, se llega a la conclusión de que, para un transformador con marcas de polaridad (puntos), una corriente creciente que *entra* a la terminal con punto en un devanado induce un voltaje en el segundo devanado que es positivo en la terminal marcada con el punto; por el contrario, una corriente creciente que *sale* de una terminal marcada con un punto induce un voltaje en el segundo devanado que es positivo en la terminal sin punto. Esta regla importante se aplicará en el capítulo 3 al formular las ecuaciones de circuitos.

Hasta ahora, este estudio se ha limitado a un transformador con dos devanados. En un sistema con varios devanados se puede efectuar el mismo tipo de análisis para cada par de devanados, a condición de que se utilice alguna variación en la forma de los puntos (por ejemplo, \bullet , \blacksquare , \blacktriangle , \blacksquare) para identificar la relación entre cada par de devanados. En el capítulo 3 se demostrará que la información que da el par de puntos se puede proporcionar mediante el signo del coeficiente de la inductancia mutua. En un sistema con muchos devanados este método evita la confusión de un gran número de puntos similares. Los dos métodos tienen ventajas para algunos problemas en particular y ambos se usan en los textos de ingeniería eléctrica.

Por ejemplo, en el sistema que se ilustra en la figura 2-14 se señala el sentido del devanado para cada bobina del transformador. Las marcas de polaridad para cada grupo de bobinas se indican también en la

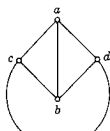
Figura 2-14. Tres devanados arrollados sobre un núcleo magnético en donde se necesitan puntos de diferente forma para describir la red.



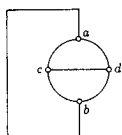
misma figura. En cada caso, uno de los puntos para cada par de devanados se escogió en forma arbitraria y a continuación se determinó la posición de otro punto.

2.4. DESCRIPCION TOPOLOGICA DE REDES

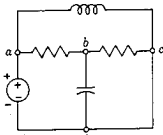
Para elaborar la *gráfica* correspondiente a determinado dibujo esquemático de una red, se substituyen todos los elementos² de la red con líneas, trazando un esqueleto de la red. En la figura 2-15(a) y (b) se muestra un ejemplo de la construcción de una gráfica de esta índole. Si también se indica un sentido de referencia por medio de una flecha para cada línea de la gráfica, entonces se la conoce como *gráfica orientada*, como se señala en (c) de la misma figura. Las líneas de la gráfica se identifican como *ramas*. La unión de dos o más ramas se conoce como *nodo* (y a veces también como *vértice*). Por tanto, las



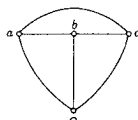
(a)



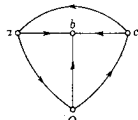
(b)



(a)

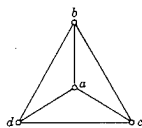


(b)



(c)

Figura 2-15. (a) Una red y (b) su gráfica. (c) Una gráfica orientada.



(a)

Figura 2-16. Tres gráficas topológicamente equivalentes.

gráficas se componen de nodos y ramas o, en ocasiones, de ramas orientadas.

La gráfica se utiliza para describir las propiedades *topológicas* de las redes. La topología trata de las propiedades de las redes que no se afectan cuando se tensiona, dobla o distorsiona de alguna otra manera el tamaño y la forma de la red —por ejemplo, acortando o alargando los alambres de conexión entre los elementos. En la figura 2-16 se muestran tres gráficas.³ Aunque estas gráficas parecen ser diferentes, en realidad son idénticas desde el punto de vista topológico, en que la relación de las ramas y los nodos es idéntica. Los encargados de hacer reparaciones comprenden perfectamente las propiedades topológicas de

² En el siguiente capítulo se describirá un procedimiento en que las ramas que contienen sólo elementos activos se excluyen de la gráfica para simplificar el análisis y los cálculos.

³ Adaptado de C. H. Page, *The Algebra of Electronics* (Van Nostrand Reinhold Co., Nueva York), 1958, página 17.

las redes, y comparan el diagrama esquemático de un radio o un aparato de televisión con el alambrado real del chasis. Los dos tienen aspectos distintos por completo; pero deben ser topológicamente idénticos para que el aparato funcione en forma correcta.

Algunas estructuras topológicas se presentan con tanta frecuencia en la ingeniería eléctrica que se les ha dado nombres especiales. Varias de ellas aparecen en la figura 2-17 y sus nombres son: (a) red T, (b) red π , (c) red en escalera, (d) red T con puente, (e) red puente (denominada así porque se usa para hacer mediciones mediante el puente de Wheatstone) y (f) la red celosía. Se observará que cuando la red celosía tiene un elemento conectado al par de terminales del lado derecho equivale topológicamente a la red puente de (e). Se dice que las estructuras (a) a (d) están *desbalanceadas* o *conectadas a tierra*.

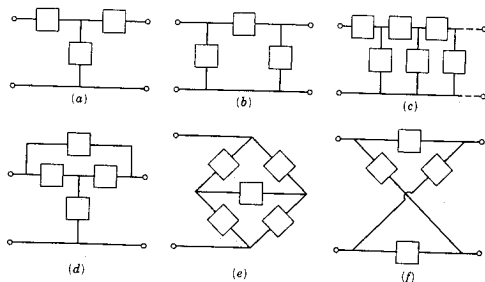


Figura 2-17. Las estructuras topológicas que se ilustran se conocen como (a) red T, (b) red π , (c) red en escalera, (d) red T con puente, (e) red puente y (f) red celosía.

La topología como rama de la geometría data por lo menos de los tiempos de Euler, quien en 1735 la utilizó para resolver el famoso problema del puente de Königsberg. En 1847, Kirchhoff fue el primero en aplicarla al estudio de las redes eléctricas, más o menos al mismo tiempo que Listing publicaba en alemán el primer tratado sistemático del tema. En la actualidad, la topología es una rama importante de las matemáticas y tiene aplicaciones en muchos campos de la ciencia y de la ingeniería.

En esta sección se describen varias entidades topológicas importantes dentro del análisis de redes, para su aplicación en capítulos posteriores. La gráfica de una red puede tener más de una parte separada en el caso de redes con acoplamiento magnético. Aunque las gráficas que se muestran en la figura 2-16 son *planas* en cuanto que se pueden

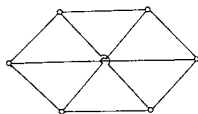


Figura 2-18. Una gráfica no plana.

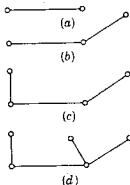


Figura 2-19. Una secuencia de árboles generados al agregar una rama al árbol anterior, ilustrando la relación que hay entre el número de nodos y las ramas de un árbol.

trazar en una hoja de papel sin que sus líneas se crucen, existen gráficas *no planas*, por ejemplo la que se ilustra en la figura 2-18.

En la exposición del siguiente capítulo se verán los *pares de nodos y mallas*. Un par de nodos se compone, sencillamente, de dos nodos que se identifican para especificar una variable de voltaje. Una malla es una trayectoria cerrada en una gráfica (o red) formada por un número de ramas conectadas.

Una *subgráfica* de una gráfica determinada se puede formar eliminando ramas de la gráfica original. Una subgráfica de gran importancia en este estudio es el *árbol* (término que se utiliza por lo menos desde la época de Kirchhoff). Un árbol de una gráfica conectada (una parte) de n nodos tiene las siguientes propiedades: (1) contiene todos los nodos de la gráfica; los nodos no se dejan en posiciones aisladas. (2) Contiene $n-1$ ramas, como se verá en breve. (3) No existen trayectorias cerradas. Obsérvese que hay muchos árboles diferentes posibles para una gráfica determinada (excepto en los casos más sencillos), y el número exacto depende de la cantidad de nodos y de ramas de la gráfica. Por definición, las ramas que se eliminan de la gráfica para formar un árbol se llaman *cuerdas* o *eslabones*.

Para descubrir una propiedad importante de un árbol se construirá uno añadiendo ramas sucesivamente de tal modo que en cada etapa se tenga un árbol. Como se ilustra en la figura 2-19, se principia con una sola rama que tiene un nodo en cada extremo. A esta rama se le agregan algunas otras de tal modo que nunca se forme una trayectoria cerrada, en la misma forma en que se juega al dominó. Obsérvese que cada vez que se agrega una nueva rama se añade exactamente un nuevo nodo. No importa lo complicado que sea el árbol, siempre se tendrá una relación simple del número de nodos y la cantidad de ramas del árbol. Es decir,

$$\text{Número de ramas del árbol} = \text{número de nodos} - 1 \quad (2-13)$$

Ahora, el número de nodos de un árbol es exactamente el mismo que el número de nodos en la gráfica correspondiente. Por tanto, se puede decir que *un árbol de una gráfica conectada es una subgráfica sin circuitos de n nodos y $n-1$ ramas*. En la figura 2-20 se muestran dos ejemplos de árboles para una gráfica determinada.

También se buscará el número de cuerdas de una gráfica. Este número es la diferencia que hay entre la cantidad total de ramas de la gráfica y el número de ramas de un árbol dado por la ecuación 2-13. Para una gráfica con b ramas y n nodos, este número es

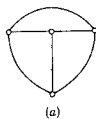
$$\text{Número de cuerdas} = b - (n - 1) = b - n + 1 \quad (2-14)$$

Para una gráfica con p partes separadas, p substituye a 1 en las ecuaciones (2-13) y (2-14).

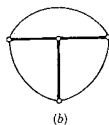
En un artículo escrito en 1847 Kirchhoff utilizó el concepto de los árboles para describir la elección apropiada de las variables de corriente para el análisis de una red. Este procedimiento que él usó se describirá en el siguiente capítulo.

BIBLIOGRAFIA

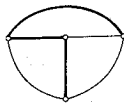
- CHAN, SHU-PARK, *Introductory Topological Analysis of Electrical Networks*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., Nueva York, 1969. En el capítulo 1 se amplían los conceptos que aquí se introducen.
- CHIRLIAN, PAUL M., *Basic Network Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969. Capítulo 2.
- CRUZ, JOSE B., Jr. y M. E. VAN VALKENBURG, *Signals in Linear Circuits*, Houghton Mifflin Company, Boston, Mass., 1974.
- DESOER, CHARLES A. y ERNEST S. KUH, *Basic Circuit Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969, capítulos 2 y 3.
- GULLEMIN, ERNST A., *Introductory Circuit Theory*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1953. Este se ha convertido en el clásico de los planteamientos elementales de la topología de redes.
- KARNI, SHLOMO, *Intermediate Network Analysis*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1971. Véase el capítulo 5.
- KIRCHHOFF, G., *IRE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-5, No. 1, pp. 4-7, marzo de 1958. Se trata de una traducción del artículo original de Kirchhoff, publicado en 1847, en el que se basa la teoría moderna de gráficas.
- LYNCH, WILLIAM A. y JOHN G. TRUXAL, *Introductory System Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1961. Se tratan las convenciones para elementos mecánicos así como las correspondientes a elementos eléctricos.
- NEWMAN, JAMES R., *The World of Mathematics*, Simon and Schuster, Inc., Nueva York, 1956, pág. 570 ss. Se describe el problema del puente de Königsberg que se mencionó en el capítulo.
- SESHU, SUNDARAM y M. B. REED, *Linear Graphs and Electrical Networks*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1961. Es un tratado general sobre teoría de gráficas; pero es muy avanzado en comparación con este libro.
- WING, OMAR, *Circuit Theory with Computer Methods*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., Nueva York, 1972. Véase el capítulo 1.



(a)



(b)



(c)

Figura 2-20. Para la gráfica de (a), las líneas gruesas de (b) y (c) son árboles.

EJERCICIOS PARA COMPUTADORA DIGITAL

Al estudiar las descripciones topológicas de las redes, escriba un algoritmo que se pueda programar para que la computadora determine todos los árboles de una gráfica. Compruebe su algoritmo con un ejemplo simple. Véase en el apéndice E-10 la referencia 14 de Steiglitz, y la referencia 16, capítulo 1, de Wing.

PROBLEMAS

- 2-1. Para el caso de la fuente controlada que aparece en la figura, prepare una gráfica similar a la que se da en la figura 2-8(b).

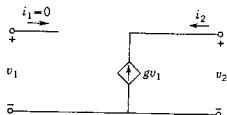


Fig. P2-1.

- 2-2. Repita el problema 2-1 para la fuente controlada que se indica en la figura adjunta.

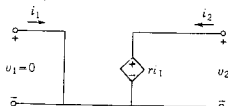


Fig. P2-2.

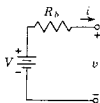


Fig. P2-3.

- 2-3. La red que acompaña a la figura es un modelo de una batería de voltaje terminal V en circuito abierto y con una resistencia interna R_b . Para esta red, grafique i en función de v . Identifique las características de la gráfica, tales como pendientes, intersecciones, etc.
- 2-4. El sistema magnético que se ilustra en la figura tiene tres devanados marcados 1-1', 2-2' y 3-3'. Use tres formas diferentes de puntos para establecer las marcas de polaridad de estos devanados.

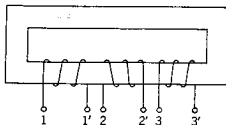


Fig. P2-4.

- 2-5. Coloque tres devanados sobre el núcleo que se muestra para el problema 2-4, seleccionando los sentidos de devanado en tal forma que las siguientes terminales (colocadas en el orden que se indica en la figura del problema 2-4) tengan la misma marca: (a) 1 y 2, 2 y 3, 3 y 1, (b) 1' y 2', 2' y 3', 3' y 1'.

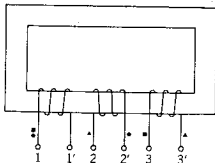


Fig. P2-5.

- 2-6. En esta figura se muestran cuatro devanados arrollados sobre un núcleo magnético portador de flujo. Use puntos de diferentes formas para establecer las marcas de polaridad de los devanados.

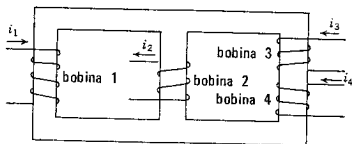


Fig. P2-6.

- 2-7. El diagrama que sigue muestra el circuito equivalente de un sistema con marcas de polaridad en las tres bobinas acopladas. Dibuje un transformador con un núcleo similar al del problema 2-6 y coloque los devanados sobre las piernas del núcleo en tal forma que sean equivalentes al diagrama. Señale en el mismo dibujo las conexiones entre los elementos.

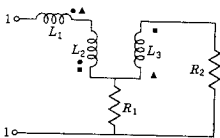
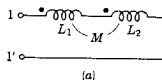
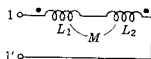


Fig. P2-7.



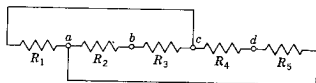
(a)



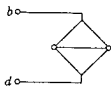
(b)

Fig. P2-8

- 2-8. En cada uno de los diagramas que siguen se presentan dos inductores con acoplamiento, pero con diferentes marcas de puntos. Para cada uno de los dos sistemas, determine la inductancia equivalente del sistema en las terminales 1-1' por combinación de inductancias.
- 2-9. Un transformador tiene cien vueltas en el devanado primario (terminales 1-1') y 200 en el secundario (terminales 2-2').



(a)



(b)



(c)

Fig. P2-10.

64 Convenciones para describir redes

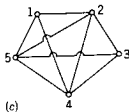
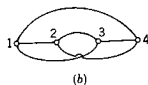


Fig. P2-11

Una corriente en el devanado primario origina un flujo magnético que enlaza todas las vueltas de los devanados primario y secundario. El flujo disminuye de acuerdo con la ley $\phi = e^{-t}$ webers cuando $t \geq 0$. Determine: (a) el flujo concatenado del primario y del secundario, y (b) el voltaje que se induce en el secundario.

- 2-10. En (a) de la figura correspondiente se muestra una red resistiva. En (b) y (c) se muestran gráficas en que se identifican dos de los cuatro nodos. Para estas gráficas, asigne resistencias a las ramas e identifique los dos nodos restantes de tal manera que las redes resultantes sean topológicamente idénticas a la que se muestra en (a).

2-11. En la siguiente figura se muestran tres gráficas. Clasifique cada una de las gráficas como plana o no plana.

- 2-12. Clasifique la gráfica de la figura que sigue como plana o no plana y determine las cantidades especificadas en las ecuaciones (2-13) y (2-14).

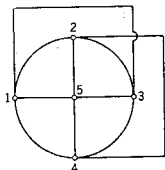


Fig. P2-12

- 2-13. En (a) y (b) de la figura del problema 2-11 se muestran dos gráficas que pueden ser equivalentes. Si lo son, ¿cuál debe ser la identificación de los nodos a, b, c y d, respecto a los nodos 1, 2, 3, 4, si a es idéntico a 1?

- 2-14. En la figura se muestra una red en donde los elementos están acomodados a lo largo de las aristas de un cubo. (a) Determine el número de nodos y ramas de la red. (b) ¿Se puede tratar en forma plana la gráfica de esta red?

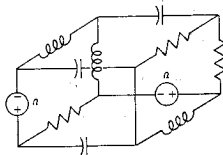


Fig. P2-14.

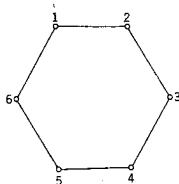


Fig. P2-15

- 2-15. La figura indica una gráfica de seis nodos y sus ramas de conexión. Se pide que agregue ramas no paralelas a esta estructura básica, con el fin de lograr los siguientes objetivos diferentes: (a) ¿Cuál es el número mínimo de ramas que se debe agregar para que la estructura resultante sea no plana? (En este caso, la estructura se identificará como una gráfica no plana básica de Kuratowski.) (b) ¿Cuál es el número máximo de ramas que puede agregar antes de que la estructura resultante se convierta en no plana?

- 2-16. (a) Muestre 5 árboles diferentes para la gráfica que se indica en la figura. Señale las ramas con líneas gruesas y las cuerdas con trazos punteados. (b) Repita (a) para la gráfica de (c) del problema 2-11.
- 2-17. Determine *todos* los árboles de las gráficas que aparecen en (a) del problema 2-11 y (b) del problema 2-10. Use líneas gruesas para las ramas del árbol y punteadas para las cuerdas.
- 2-18. En las gráficas que se muestran en (c) del problema 2-11 y en la figura del problema 2-16 es grande el número de árboles distintos. ¿En cuál de las dos estructuras será mayor el número de árboles distintos? Dé las razones de su respuesta. (Para desalentar el uso de una tabulación en la determinación de su respuesta, el número total para una de las estructuras es 125.)

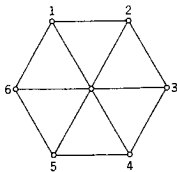
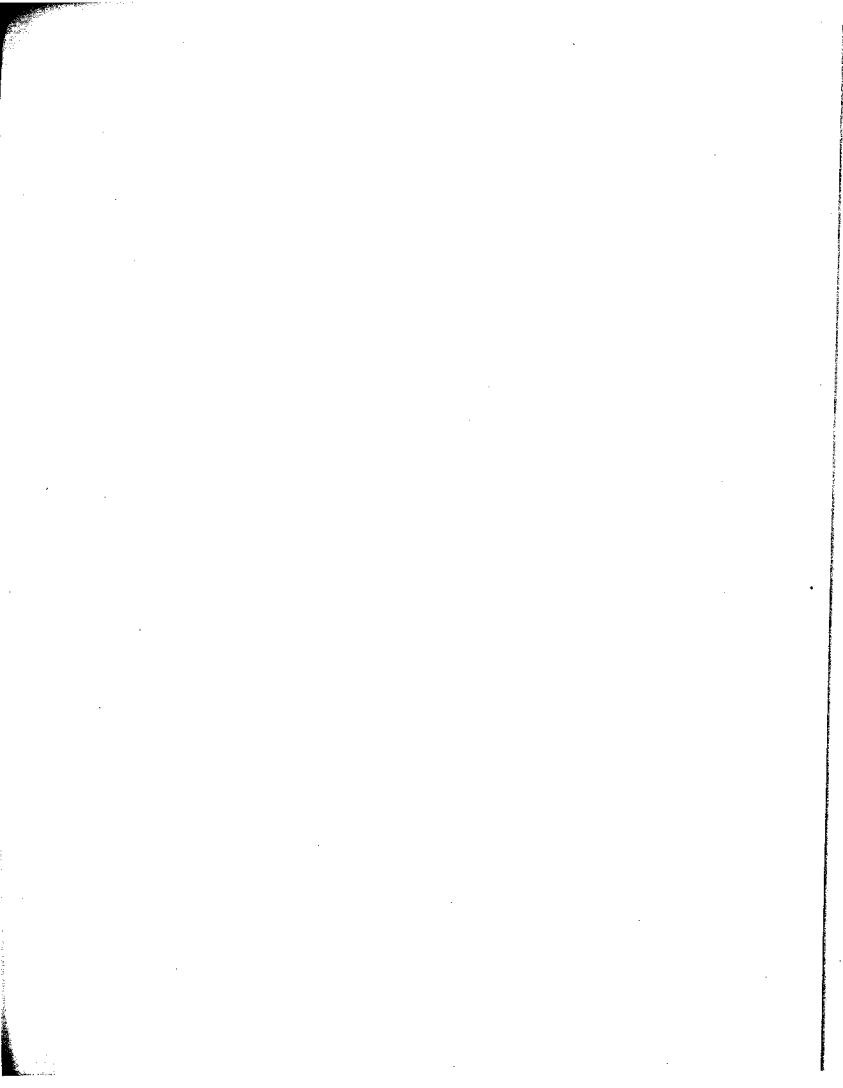


Fig. P2-16



CAPITULO 3

3 Ecuaciones de redes

3-1. LEYES DE KIRCHHOFF

Las ecuaciones de redes se formularon a partir de dos leyes sencillas que fueron expresadas primeramente por Kirchhoff en 1845.¹ Estas leyes se relacionan con la suma algebraica de los voltajes alrededor de una malla y las corrientes que entran o salen de un nodo. Para describir estas leyes, se toman como base los conceptos introducidos en el capítulo anterior. El término *algebraica* se utiliza para indicar que en la suma se toman en cuenta las polaridades y los sentidos de referencia. También se introducirán otras referencias en la forma de un sentido positivo, para recorrer una malla y una elección de entrada o de salida, como positiva, para la suma de corrientes en un nodo.

La *ley de voltajes de Kirchhoff* establece que es cero en todos los instantes del tiempo la suma algebraica de todos los voltajes de rama a lo largo de cualquier malla cerrada de una red. Esta es una consecuencia de la ley de conservación de la energía, ya que el voltaje es la energía (o trabajo) por unidad de carga. Considérese una unidad de carga situada en el nodo *A* de una red. Esta unidad de carga se mueve

¹ Desde el punto de vista histórico, el trabajo de Kirchhoff se apegaba bastante a las contribuciones precursoras de Faraday en que describían la inducción eléctrica, a las de Osted al relacionar el magnetismo y la electricidad en 1820, a las de Ampère, que asociaban la fuerza y la corriente en 1820-25, y a las de Ohm, que establecían la relación entre el voltaje y la corriente en 1826. El resultado de Kirchhoff se publicó por primera vez como apéndice de un artículo, en 1845, y luego detalladamente en otro artículo que apareció en 1847. Es interesante observar que Kirchhoff era apenas un estudiante de 23 años de edad cuando se hizo la primera publicación de estas leyes.

del nodo A al nodo B del B a C del C a D , etc., y cada vez se determina la energía que se gane o se pierda. Si se tabulan estos cambios de energía para los diversos nodos, asignando un número positivo para la ganancia y otro negativo para la pérdida, entonces se sabe que cuando se vuelve al nodo A la suma de todos los cambios debe ser igual a cero. Un aumento en la energía al pasar de A a B se identifica como una *elevación* de voltaje, en tanto que una pérdida de energía como una *caída* de voltaje. Entonces, la ley de voltajes de Kirchhoff se puede expresar en una forma diferente, de acuerdo con las caídas y las elevaciones de voltaje: Alrededor de cualquier malla cerrada, en cualquier instante la suma de las caídas de voltaje debe ser igual a la suma de las elevaciones de voltaje.

En la figura 3-1 se muestra una red resistiva simple con los sentidos de referencia asignados para los elementos y un sentido de referencia para el recorrido en las mallas en el sentido de las manecillas del reloj, seleccionada para aplicar la ley de voltajes de Kirchhoff. Principiando en el nodo A , se asigna un signo positivo al voltaje cuando las marcas de polaridad ocurren en el orden $+ -$, y un signo negativo para el orden contrario. Por tanto, se escribe

$$-v_g + v_1 + v_2 + v_3 = 0 \quad (3-1)$$

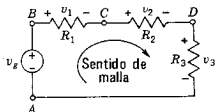


Figura 3-1. Red resistiva de una sola malla a la que se aplica la ley de voltajes de Kirchhoff.

Esta ecuación se puede transformar ya sea multiplicando por -1 o pasando los términos de un lado de la ecuación al otro. En la forma

$$v_1 + v_2 + v_3 = v_g \quad (3-2)$$

la ecuación se interpreta como que la suma de las caídas de voltaje es igual a la suma de las elevaciones de voltaje.

Al referirse a las elevaciones y a las caídas, conviene tener un nodo de *referencia* (denominado también base o *datum*). En la misma forma que se habla del nivel del mar como referencia para las elevaciones del terreno, así también, al referirse a los voltajes, se escoge una referencia denominada *tierra* que se indica por medio del símbolo que aparece en la figura 3-2. En esta figura, el voltaje del nodo A es mayor que el potencial de tierra, en tanto que el del nodo B es más bajo que (o está debajo de) el potencial de tierra.

La *ley de las corrientes de Kirchhoff* establece que la suma algebraica de las corrientes de todas las ramas que salen de un nodo es

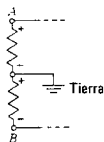


Figura 3-2. Parte de una red en la que un nodo se identifica como tierra (referencia o dato).

igual a cero en todos los instantes. La ley es una consecuencia de la conservación de la carga. La carga que entra a un nodo debe salir de él, ya que no se puede almacenar ahí. Puesto que la suma algebraica de la carga debe ser cero, también debe ser igual a cero la derivada con respecto al tiempo de esa suma. Igual como sucede con la ley de los voltajes, la ley de las corrientes de Kirchoff se puede expresar de otras maneras. Por ejemplo, se puede decir que la suma de las corrientes que entran a un nodo debe ser igual a la suma de las corrientes que salen de él. En consecuencia, de acuerdo con los sentidos de referencia asignados que se muestran en la figura 3-3, se puede escribir

$$i_1 + i_2 = i_3 + i_4 \quad (3-3)$$

De otra manera, esta ecuación se puede transformar para que tenga la siguiente forma equivalente:

$$-i_1 - i_2 + i_3 + i_4 = 0 \quad (3-4)$$

que se puede interpretar de acuerdo con la elección de un sentido positivo para las corrientes que salen del nodo.

Como ejemplo de la aplicación de la ley de voltajes de Kirchoff, véase la red que se ilustra en la figura 3-4. Se desea determinar las condiciones en que son equivalentes las dos redes de la figura. Se dice que dos redes son *equivalentes* en un par de terminales si las relaciones voltaje-corriente para ambas son idénticas en estas terminales. Para que las redes de (a) y (b) de la figura sean equivalentes, es necesario encontrar las condiciones en que $i_a = i_b$, cuando $v_a = v_b$. Para la red de (a),

$$v_a = v_1 + v_2 = R_1 i_a + R_2 i_a \quad (3-5)$$

en tanto que para la red de (b)

$$v_b = R_{eq} i_b \quad (3-6)$$

Si se iguala la ecuación (3-5) a la (3-6), siendo $i_a = i_b$, se obtiene

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \quad (3-7)$$

Por tanto, la suma de las resistencias de resistores conectados en serie es igual a la resistencia equivalente de la combinación. Generalizando el resultado que se da en la ecuación (3-7) para la red que aparece en la figura 3-5, se obtiene, para una conexión en serie,

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{j=1}^n R_j \quad (3-8)$$

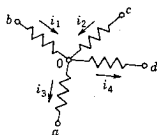


Figura 3-3. Parte de red que ilustra la ley de corrientes de Kirchoff en el nodo O.

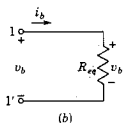
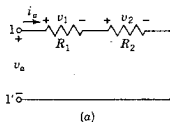


Figura 3-4. Redes que son equivalentes cuando $R_{eq} = R_1 + R_2$.

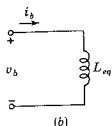
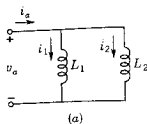


Figura 3-6. Redes inductivas de un puerto que son equivalentes cuando se satisface la ecuación (3-11).

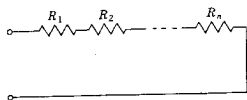


Figura 3-5. Red resistiva conectada en serie.

Como otro ejemplo, la ley de las corrientes de Kirchoff se puede aplicar a la red que se muestra en la figura 3-6(a) para determinar la condición en la que es equivalente a la red de la figura 3-6(b). Por tanto,

$$i_a = i_1 + i_2 = \frac{1}{L_1} \int v_a dt + \frac{1}{L_2} \int v_a dt \quad (3-9)$$

de acuerdo con la ecuación (1-41). Del mismo modo, para la red de (b), se tiene que

$$i_b = \frac{1}{L_{eq}} \int v_b dt \quad (3-10)$$

Para $v_a = v_b$ e $i_a = i_b$, que son las condiciones para que las redes sean equivalentes, se observa que es necesario que

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad \text{o} \quad L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad (3-11)$$

3-2. EL NUMERO DE ECUACIONES DE RED

Al analizar una red, un problema importante es el que se relaciona con el número de ecuaciones que se deben escribir para describir por completo los voltajes y las corrientes de la red. La respuesta puede parecer evidente, ya que siempre se debe escribir el mismo número de ecuaciones que las cantidades desconocidas o variables. Sin embargo, se ha encontrado que se puede escoger un número menor para una solución simultánea. Existen dos preguntas que se contestarán en esta sección: ¿Cómo se pueden escoger adecuadamente las variables para tener el número mínimo posible de ellas? ¿Cómo se puede estar seguro de que las ecuaciones que se escribieron son independientes?

En primer lugar, se establece un número de restricciones para la exposición de esta sección. Se considera que una rama es lo mismo que un elemento o que una rama representa a un solo elemento. En consecuencia, la parte de la red que se ilustra en la figura 3-7 se compone de dos ramas, identificadas como 1 y 2. Más adelante se demostrará que, en ciertas condiciones, las dos ramas se pueden sustituir por una rama equivalente para algunos cálculos. También se pondrá que se tienen fuentes de voltaje en serie con otros elementos y que fuentes de corriente están en paralelo con otros elementos. En la

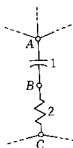


Figura 3-7. Dos ramas de una red.

sección que sigue se suprimirá esta restricción y se demostrará que no se ha perdido generalidad. También se excluyen del estudio dos clases de situaciones insostenibles en las redes: se supone que no existen mallas que se componen sólo de fuentes de voltaje y que la red no se puede dividir en dos partes unidas sólo por fuentes de corriente.

Sea una red que se compone de b ramas excitadas por medio de elementos activos, para los que se deben encontrar las respuestas de la red. Las cantidades desconocidas de interés son los voltajes de rama y las corrientes de rama, siendo un total de $2b$ incógnitas para las b ramas. Puesto que se conocen las relaciones voltaje-corriente para cada uno de los elementos, por medio de ecuaciones tales como $v = Ri$, $v = L di/dt$, y $v = (1/C) \int i dt$, el número de incógnitas se puede reducir de $2b$ a b . En otras palabras, si se llegan a conocer las corrientes de rama, entonces los voltajes se pueden determinar en forma rutinaria, y viceversa.

Utilizamos las leyes de Kirchhoff para escribir las b ecuaciones y las b incógnitas. Como preparación para expresar estas ecuaciones primero se escoge el nodo base o de referencia. Para los nodos restantes, se escriben a continuación las ecuaciones, utilizando la ley de las corrientes de Kirchhoff. Una vez hecho esto, es necesario, a continuación, escribir

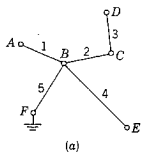
$$b - (n - 1) = b - n + 1 \quad (3-12)$$

ecuaciones, utilizando la ley de voltajes de Kirchhoff, para tener un total de b ecuaciones. Luego, se pueden resolver las ecuaciones en función de los voltajes y las corrientes desconocidas, por supuesto, a condición de que las ecuaciones que se escriban sean *independientes*. ¿Qué significa independiente?

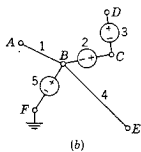
Se dice que un conjunto de ecuaciones es linealmente dependiente si por lo menos una de ellas se puede expresar como una combinación lineal de las otras. En consecuencia, si se obtiene una ecuación sumando o restando las otras dos, una de ellas es dependiente de las otras dos y no se puede utilizar para encontrar una solución. Así, dadas las ecuaciones

$$\begin{aligned} 3i_1 + 2i_2 - i_3 &= 4 \\ -i_1 + 5i_2 + 3i_3 &= -2 \\ i_1 + 12i_2 + 5i_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3-13)$$

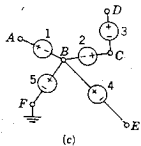
se observa que la tercera ecuación se puede obtener multiplicando la segunda por dos y sumándola a la primera. Entonces, las ecuaciones son dependientes y no se puede encontrar una solución única para i_1 , i_2 e i_3 . Se puede presentar una interpretación geométrica de esta situación con la ayuda de la figura 3-8, en la que aparece un espacio tridimensional de corrientes. Dos ecuaciones de la forma de las ecuaciones



(a)



(b)



(c)

Figura 3-9. Figuras relacionadas con el número de variaciones de voltaje independientes en una red de n nodos.

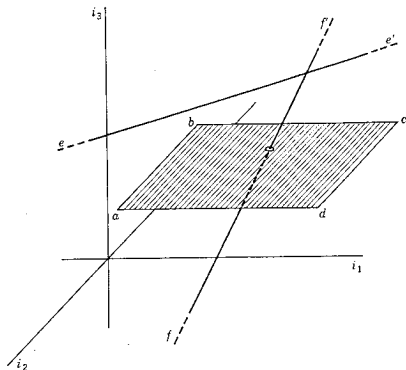


Figura 3-8. Representación en el espacio de las corrientes de las ecuaciones con la forma general de las ecuaciones (3-13). Obsérvese que la línea $e-e'$ puede estar en el plano $abcd$.

ciones (3-13) representan, cada una, un plano en este espacio de corrientes. Si estos planos se intersectan definen una línea que se identifica como $e-e'$ o $f-f'$ en la figura. Si la tercera ecuación representa la superficie que se identifica como $a-b-c-d-a$, entonces (i) la línea corta la superficie, como lo hace $f-f'$ (ii) la línea es paralela al plano, como sucede en el caso de $e-e'$, o bien (iii) el plano incluye a la línea $e-e'$. En el caso (i), la intersección de la línea con el plano define la solución i_1, i_2, i_3 . Para (ii) no existe solución y para (iii) no existe una solución única, sino más bien una familia de soluciones, definida por esta línea.

Las ecuaciones que se escriban deben ser independientes, si se desean resolver las ecuaciones. Además, se busca que el conjunto de ecuaciones se escriba en función del menor número posible de variables independientes. La razón de este requisito se entenderá claramente después de resolver cinco ecuaciones simultáneas y comparar el número de operaciones que requiere este conjunto con las que se necesitan para resolver tres ecuaciones simultáneas. Con el fin de ahorrar tiempo y esfuerzo, se escoge el menor número de variables, y al mismo tiempo se debe satisfacer el requisito de que sean independientes.

Una justificación de esta selección de variables independientes de voltaje se basa en la figura 3-9. En (a) de esta figura se ilustra la

gráfica de un árbol. El nodo F se escogió como el de referencia; entonces, existen tantos otros nodos en el árbol como ramas tenga éste. Se observará en (b) de esta figura que el voltaje del nodo D queda definido por las fuentes de voltaje insertadas en tres ramas del árbol. Puesto que no existen trayectorias cerradas en éste, todas las corrientes de ramas son cero y las fuentes de voltaje en las ramas determinan el voltaje en el nodo D . De la misma manera, insertando fuentes de voltaje en cada rama se determinan todos los voltajes de nodos, como sucede en (c) de la figura. Por ejemplo, es suficiente contar con cinco fuentes para determinar los cinco voltajes de nodo con respecto al de referencia. Por el contrario, si se conocen los voltajes de nodo con relación al de referencia, entonces se pueden determinar los voltajes de las ramas del árbol. Los voltajes de cuerda se determinan también por medio de los voltajes de nodo a referencia, siendo cada voltaje de cuerda la diferencia de dos voltajes de nodo a referencia. En consecuencia, parece conveniente que el número necesario de voltajes independientes sea igual al número de ramas del árbol. Para una red de n nodos, este número es $n - 1$ (como ya se vio en el capítulo 2 y en una parte anterior de esta sección), que es el número de voltajes de nodo a referencia en la red. Existen otras posibles elecciones de conjuntos de variables, a partir de los cuales se pueden determinar los voltajes de rama,² pero aquí sólo se utilizarán las variables de voltaje de nodo a referencia.

Ahora es evidente que $n - 1$ es menor que b , ya que existen $n - 1$ ramas en un árbol y se tienen siempre menos ramas en éstos que en la gráfica de la que se deriva, por supuesto, a menos que la gráfica sea inicialmente un árbol. En consecuencia, existen menos variables de nodo a referencia que de nodo a nodo para las b ramas individuales.

Ahora pasamos a seleccionar variables de corriente que en conjunto sean menos que las b corrientes de rama. La exposición que sigue es complementaria de la que se acaba de dar para las variables de voltaje y se inicia considerando el árbol de una gráfica. Al árbol que aparece en la figura 3-10(a) se le conecta una fuente de corriente, en vez de una cuerda de la gráfica, como se indica en (b) de la misma figura. Para esa conexión se observa que tal corriente será idéntica a la de las ramas 1, 2 y 3. Si a continuación se insertan fuentes de corriente en todas las posiciones de las cuerdas de la gráfica, como se indica en (c), se observa que la corriente en cada rama será una combinación lineal de las corrientes de las fuentes en las posiciones de cuerda. Si se conocen las corrientes de cuerda, entonces se puede encontrar una solución algebraica para las corrientes de rama; en consecuencia, el número de variables necesarias para determinar la corriente de rama

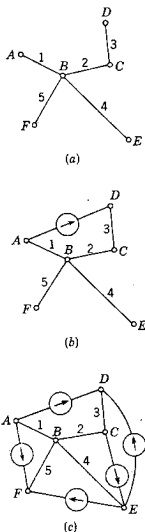


Figura 3-10. Figuras relacionadas con el número de variables independientes de corriente.

² Estas elecciones las explica detalladamente E. A. Guillemin en *Introductory Circuit Theory* (John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1953), capítulo 1.

del árbol es igual al número de corrientes en las cuerdas. De acuerdo con el capítulo 2, se sabe que el número de cuerdas es

$$\text{Cuerdas} = b - n + 1 \quad (3-14)$$

y éste es el número mínimo de variables de corriente que se requieren. Se observará que este número es siempre menor que b , debido a que existen siempre menos cuerdas que ramas. En 1847 Kirchoff demostró que, en efecto, dichas variables de corriente forman un conjunto independiente.

Estas variables de corriente se denominan corrientes *de malla* (o de *circuito*) y sus trayectorias se pueden determinar substituyendo las cuerdas en el árbol, una a la vez. Se acostumbra asignar el sentido de referencia a la corriente de malla, en el sentido de referencia de la cuerda con la que se identifica. Puesto que el árbol de una gráfica no es único, existen muchas posibles elecciones de variables de corrientes de malla.

Como ejemplo de la identificación de las corrientes independientes de malla, véase la gráfica de la figura 3-11. El árbol escogido se identifica por medio de las líneas gruesas y se indican los sentidos de referencia para todas las ramas de la gráfica. Es evidente que las trayectorias de las corrientes de circuito incluyen las siguientes ramas: 1-8-6 (i_a), 2-3-8 (i_b), 7-3-6 (i_c), 9-8-4 (i_d) y 5-6-4 (i_e). Las nueve corrientes de rama se pueden expresar de acuerdo con las cinco corrientes de malla que se acaban de identificar. Por ejemplo, una de las nueve ecuaciones es

$$i_6 = i_a + i_c - i_e \quad (3-15)$$

Si se usa la misma gráfica, haciendo que el nodo A quede identificado como el de referencia, se puede ilustrar la relación de los voltajes de rama con el conjunto de voltajes de nodo a referencia, v_3 , v_8 , v_6 y v_4 . Por ejemplo, el voltaje de rama 9 es

$$v_9 = v_8 - v_4 \quad (3-16)$$

Al usar estas ecuaciones, se pueden calcular los voltajes de rama de nodo a nodo, si se conocen los voltajes de nodo a referencia.

Como segundo ejemplo, véase la gráfica de la figura 3-12. Esta gráfica es menos complicada que la de la figura 3-11, debido a que es plana. Es adecuada la elección del árbol, indicada por las líneas gruesas y los sentidos de referencia de la cuerda, ya que las mallas comprenden el mismo número de ramas y tienen el mismo sentido, o sea, el sentido contrario a las manecillas del reloj. Los cuatro sectores limitados por las ramas de las cuatro mallas se denominan *ventanas* al formular la regla práctica, que indica que las corrientes de malla se asignan a las ventanas, cuando la gráfica es tan sencilla que éstas se

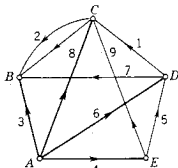


Figura 3-11. Gráfica que ilustra la identificación de un conjunto de variables independientes de corriente. Las líneas que se cruzan no se conectan excepto en los nodos marcados.

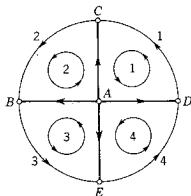


Figura 3-12. Gráfica que ilustra el uso de "ventanas" para seleccionar las variables de corriente.

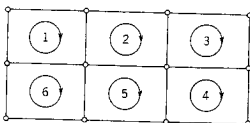


Figura 3-13. Gráfica que contiene seis "ventanas" con seis variables de corriente de malla identificadas.

pueden identificar a simple vista. La gráfica ilustrada en la figura 3-13 no presenta ninguna dificultad para asignar las seis corrientes de malla a las ventanas tal como se indica. Para esta gráfica es fácil trabajar en sentido contrario e identificar el árbol y las cuerdas a partir de las mallas asignadas. Para redes planas simples, el método de ventanas es muy práctico. Cuando las redes que se van a analizar son complejas y no planas, conviene más utilizar el método del conjunto de árbol y cuerdas.

3-3. TRANSFORMACIONES DE FUENTES

En una parte anterior de este capítulo se introdujeron las redes equivalentes, para estudiar las redes que sólo cuentan con un tipo de elemento. En esta sección se ampliará el estudio de las redes equivalentes, dando énfasis a las fuentes activas. Las fuentes de voltaje se pueden transformar en fuentes de corriente equivalentes y viceversa; se puede cambiar la posición de las fuentes en la red. El objetivo de esta transformación de la red es prepararla para un análisis que sea simple y directo.

En la figura 3-14 se ilustran dos operaciones elementales con las fuentes. Se tienen dos fuentes de voltaje v_1 y v_2 , conectadas en serie,

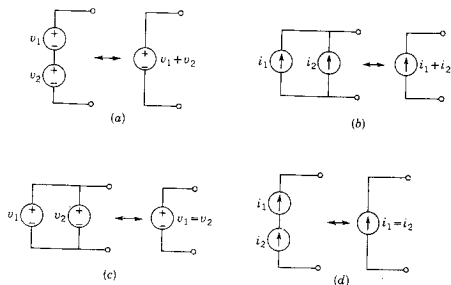


Figura 3-14. Ilustración de las reglas que rigen la combinación de las fuentes.

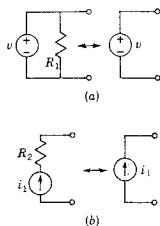


Figura 3-15. Dos ejemplos de elementos extraños por lo que respecta al comportamiento en las terminales.

con las polaridades de referencia indicadas, que son equivalentes a una sola fuente de voltaje $v_1 + v_2$. Del mismo modo, dos fuentes de corriente en paralelo, i_1 e i_2 , son equivalentes a una sola fuente, $i_1 + i_2$, como se ilustra en (b) de la misma figura. Las otras dos redes equivalentes de la figura 3-14 recuerdan que las fuentes de voltaje no pueden conectarse en paralelo, a menos que tengan voltajes idénticos y, de la misma manera, las fuentes de corriente no se pueden conectar en serie, a menos que sean idénticas. Por ejemplo, la conexión en paralelo de generadores con formas de ondas de voltaje diferentes produce corrientes intensas y daños al equipo.

En la figura 3-15 se muestra un resistor en paralelo con una fuente de voltaje. La corriente que pasa por este resistor está determinada sólo por la fuente de voltaje y no por el resto de la red. En lo que respecta a los cálculos en el resto de la red, es posible hacer caso omiso de un resistor en paralelo con una fuente de voltaje, o se puede omitir por completo de la representación de la red. La misma situación se aplica a un resistor conectado en serie con una fuente de corriente, como se ilustra en (b) de la figura 3-15. Este resistor no afecta en ninguna forma a la corriente de la fuente. En lo que respecta a los cálculos para el resto de la red, se puede omitir de la representación de la red a un resistor en serie con una fuente de corriente.

A continuación se verá la cuestión de los equivalentes de fuente de voltaje y de corriente. En la figura 3-16(a) sea $v(t)$ el voltaje de la fuente y $v_1(t)$ el voltaje en el nodo ubicado entre el resistor R_1 y el resto de la red. La ley de voltajes de Kirchhoff para el circuito de la figura 3-16(a) es

$$v(t) = R_1 i(t) + v_1(t) \quad (3-17)$$

Al resolver esta ecuación para $i(t)$, se tiene

$$i(t) = \frac{v(t)}{R_1} - \frac{v_1(t)}{R_1} \quad (3-18)$$

En esta ecuación de corriente se identificará cada uno de los términos individuales en relación con la red de la figura 3-16(b). El término $v(t)/R_1$ representa la corriente de la fuente, el término

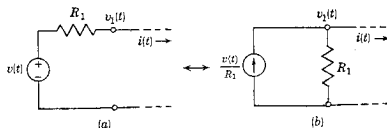


Figura 3-16. Transformación de fuente incluyendo un resistor.

$v_1(t)/R_1$ representa la corriente en el resistor R_1 , conectado en paralelo con la fuente de corriente. La diferencia de estas dos corrientes es la corriente que va a la red externa, $i(t)$. Se observará que $i(t)$ y $v_1(t)$ son iguales para las dos redes. Respecto al resto de la red, las combinaciones fuente-resistor (a) y (b) de la figura 3-16, se describen por medio de las mismas ecuaciones, la (3-17) y la (3-18), de manera que también son equivalentes.

El razonamiento que se acaba de aplicar a la resistencia en serie con una fuente de voltaje se puede ampliar ahora ya sea a un inductor o a un capacitor en la misma posición en serie. Al escribir ecuaciones análogas a las del último párrafo, se llega a la conclusión de que la fuente de corriente equivalente para la combinación de fuente de voltaje-inductor es la que se muestra en la figura 3-17, en tanto que para la combinación fuente de voltaje-capacitor se da en la figura 3-18. Esta técnica de convertir fuentes y elementos simples no se aplica ordinariamente a las redes que incluyen más de un elemento pasivo, en serie o en paralelo, ya que la determinación de la equivalencia de la fuente implica la solución de una ecuación diferencial.

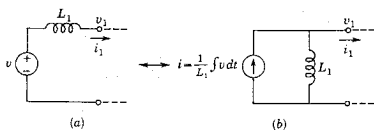


Figura 3-17. Transformación de fuente para una red con un solo inductor.

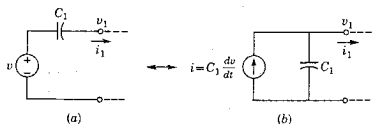


Figura 3-18. Transformación de fuente incluyendo un capacitor.

En el análisis de las redes con frecuencia se encuentran fuentes de voltaje que no tienen un elemento pasivo conectado en serie, o bien fuentes de corriente sin un elemento pasivo en paralelo. Si se desea transformar un tipo de fuente en el otro, es necesario mover primeramente la fuente dentro de la red. La técnica por medio de la cual se logra esto se explicará de acuerdo con el ejemplo sencillo de la figura 3-19(a). La fuente de voltaje única se puede considerar equivalente a dos fuentes idénticas en paralelo, como se ilustra en (b) de la figura.

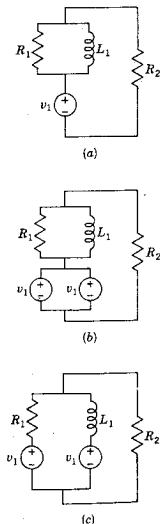


Figura 3-19. Tres redes equivalentes que ilustran un procedimiento para "empujar a una fuente a través de un nodo".

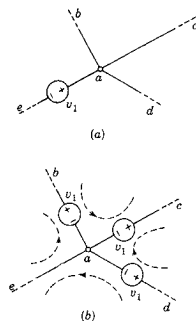


Figura 3-20. Ilustración del procedimiento mediante el cual se mueve una fuente de voltaje en una red.

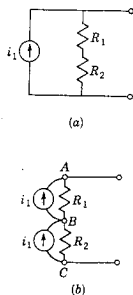


Figura 3-21. Dos redes equivalentes que ilustran la forma en que una fuente se substituye por dos, de tal manera que se siga satisfaciendo la ley de corrientes de Kirchhoff en cada nodo.

Ahora, la red de (c) es idéntica a la de (b), ya que una conexión que une las terminales positivas de las dos fuentes no afecta a la red, debido a que no se tendrá una corriente en una conexión de esta índole. Por tanto, la red de (c) es equivalente a la de (a); la fuente se ha “empujado a través del nodo” al obtener una red equivalente en la que las corrientes de toda la red no se alteran, debido a la transformación. Si ahora se requieren fuentes de corriente, se puede modificar la red de la figura 3-19(c) utilizando las equivalencias de las figuras 3-16 y 3-17.

El ejemplo que se acaba de dar es un caso especial de una forma más general de movimiento o desplazamiento de fuente de voltaje, que se ilustra en la figura 3-20. Al recorrer las cuatro mallas indicadas por las líneas punteadas de (b) de la figura, se observa que la ley de voltajes de Kirchhoff da las mismas ecuaciones para las dos redes, (a) y (b). Por tanto, se puede “empujar la fuente de voltaje a través del nodo”, intercalando una nueva fuente idéntica en cada rama conectada al nodo, sin que se afecte la distribución de corrientes de la red. La regla de polaridad que se debe aplicar para que esto se realice se muestra en la figura 3-20. Se observará que varía la distribución del voltaje en la red, ya que el nodo *a* tiene ahora el mismo voltaje que el nodo *e*, en tanto que antes del desplazamiento de la fuente la diferencia de voltaje de los dos nodos era v_1 .

También se pueden efectuar transformaciones equivalentes para fuentes de corriente, siguiendo el patrón de dualidad que se ha mostrado desde que se introdujo por primera vez este concepto, en el capítulo 2. En el ejemplo de la figura 3-21, la red de (b) es equivalente a la de (a), al aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff en cada uno de los nodos. La corriente i_1 entra y sale del nodo B, en tanto que las corrientes en los nodos A y C, son las mismas que las de (a) en la misma figura. Se pueden efectuar otras transformaciones como las que se ilustran en el segundo ejemplo de la figura 3-22. Como se puede ver, el modelo general de transformación de fuentes consiste en mantener las mismas corrientes en todos los nodos de la red, básicamente sumando y, luego, restando la misma cantidad de corriente. En este modelo de cambio de fuentes de corriente los voltajes no varían debido a la transformación, aunque sí se modifican las corrientes en las ramas activas.

Las operaciones antes descritas se pueden emplear sucesivamente para determinar el equivalente sencillo de una red complicada. Por ejemplo, la red resistiva de la figura 3-23 tiene tres fuentes de voltaje y una fuente de corriente. Mediante la reducción por etapas que se ilustra en la figura, se encuentran las redes equivalentes simplificadas de (e) y (f).

Las transformaciones de fuentes influyen en la representación de una red, mediante una gráfica. Se pueden hacer dos observaciones: (1) Los elementos en paralelo con las fuentes de voltaje o en serie

con las fuentes de corriente se pueden eliminar de la gráfica. (2) Pues-
to que las fuentes de voltaje se pueden cambiar de una rama a otras,
con la consiguiente eliminación de dicha rama de la red, al elaborar
una gráfica las fuentes de voltaje se deben poner en corto circuito,
antes de iniciar el análisis. De la misma manera, las fuentes de corrien-
te se deben poner en circuito abierto y eliminarlas así de la gráfica
que representa la red.

Aquí se seguirá siempre la práctica de *preparar la red*, antes de
escribir las ecuaciones, a partir de las leyes de Kirchhoff. Esto implicará
las siguientes prácticas: (1) Si la red se va a analizar en base de
nodos, con la ley de corrientes de Kirchhoff, las fuentes de la red se
transformarán de tal manera que en la red resultante se tengan sólo
fuentes de corriente. (2) Si se va a analizar en base de mallas, utili-
zando la ley de voltajes de Kirchhoff, entonces las fuentes se transfor-
marán hasta que se encuentren las fuentes de voltaje equivalentes.
(3) Si la red se va a analizar utilizando variables de estado, se puede
preparar de tal modo que tenga tanto fuentes de voltaje como de
corriente, según las variables que se seleccionen. Esta norma se adopta
para lograr mayor sencillez y se entiende que bastará para todos los
problemas de red, excepto para los más complejos.

Con esto se está ya en condiciones de escribir los conjuntos de
ecuaciones que describen a las redes. Se entiende que para escribir
estas ecuaciones se puede utilizar el método de nodos, el de mallas o
cualquier otro sistema. ¿Cuál de todas las elecciones es la más conve-
niente? La selección se hará de acuerdo con factores tales como los
siguientes: (1) ¿Qué método proporciona el número más pequeño de
variables? (2) ¿Cuál es el objetivo del análisis? ¿Un solo voltaje? ¿Var-
ias corrientes? (3) ¿Se logrará la solución por medio de cálculos
manuales o con una computadora digital? A su vez, esta pregunta
puede determinar el grado de preocupación que se tenga respecto a la
independencia de las ecuaciones de la red. Si se va a usar lápiz y
papel para obtener la solución, la preocupación mayor consistirá en
hacer que el número de variables sea mínimo, debido a la cantidad de
operaciones algebraicas comprendidas en la solución de ecuaciones si-
multáneas. Este número aumenta con gran rapidez con el número de
variables, y este punto se ilustrará por medio de ejemplos cuando se
estudien los métodos de evaluación por determinantes.

3-4. EJEMPLOS DE LA FORMULACION DE LAS ECUACIONES DE REDES

A continuación se dan varios ejemplos que ilustrarán la formación
de las ecuaciones de redes utilizando las leyes de Kirchhoff y las
diversas reglas de este capítulo y el anterior.

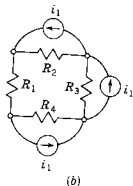
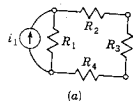


Figura 3-22. Un ejemplo que ilustra el procedimiento que permite mover una fuente de corriente dentro de una red.

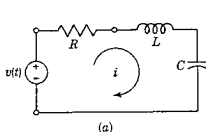
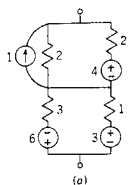


Figura 3-24. Redes que se analizan en los ejemplos 1 y 2.

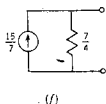
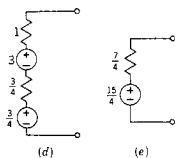
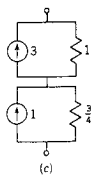
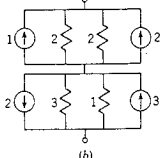


Figura 3-23. Ejemplo de una simplificación de red utilizando transformaciones sucesivas de fuentes.

EJEMPLO 1

En la figura 3-24(a) se muestra un circuito RLC en serie. Para este circuito sencillo, la ley de voltajes de Kirchhoff requiere que

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = v(t) \quad (3-19)$$

en todo momento. Esta es una *ecuación integrodiferencial*, que se puede transformar en una ecuación diferencial mediante una derivación, para dar

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dv(t)}{dt} \quad (3-20)$$

en donde las derivadas se han colocado en orden descendente.

EJEMPLO 2

Al aplicar la ecuación (3-12) a la red de la figura 3-24(b), se observa que $b - n + 1 = 5 - 4 + 1 = 2$, un hecho que es evidente de acuerdo con la regla de "ventanas". Con las dos corrientes de malla i_1 e i_2 asignadas con los sentidos positivos que se indican, las ecuaciones de equilibrio basadas en la ley de voltajes de Kirchhoff son

$$R_1 i_1 + \frac{1}{C} \int (i_1 - i_2) dt = v(t) \quad (3-21)$$

$$\frac{1}{C} \int (i_2 - i_1) dt + L \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = 0 \quad (3-22)$$

EJEMPLO 3

En la figura 3-25 se muestra una red de 3 nodos, con voltajes de nodo a referencia v_1 , v_2 y v_3 , asignados tal como se señala. Suponiendo que la corriente que sale del nodo es positiva para cada uno de los tres nodos, se obtienen tres ecuaciones de corriente según Kirchhoff:

$$\frac{1}{R_1} v_1 + C_1 \frac{d}{dt} (v_1 - v_2) = i(t) \quad (3-23)$$

$$C_1 \frac{d}{dt}(v_2 - v_1) + \frac{1}{R_2} v_2 + C_2 \frac{d}{dt}(v_2 - v_3) = 0 \quad (3-24)$$

$$\frac{1}{R_3} v_3 + C_2 \frac{d}{dt}(v_3 - v_2) = 0 \quad (3-25)$$

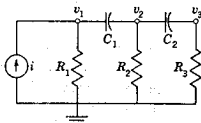


Figura 3-25. Red de tres circuitos que se analiza en el ejemplo 3.

EJEMPLO 4

La red que se muestra en la figura 3-26(a) se conoce con el nombre de *red doble T*. Este ejemplo es más complicado que los tres anteriores, y la construcción de una gráfica ayudará a la formulación

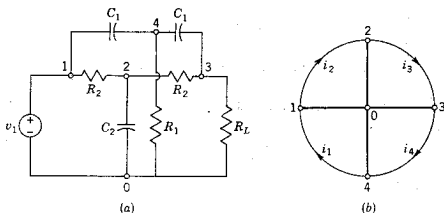


Figura 3-26. Red *RC* de doble *T* y su gráfica que se analiza en el ejemplo 4.

de las ecuaciones de voltaje. La gráfica de esta red, la elección de un árbol y la elección de los sentidos de las cuerdas se ilustran en la figura 3-26(b). Las cuatro ecuaciones necesarias son

$$\frac{1}{C_1} \int i_1 dt + R_1(i_1 - i_4) = -v_1 \quad (3-26)$$

$$R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int (i_2 - i_3) dt = +v_1 \quad (3-27)$$

$$\frac{1}{C_2} \int (i_3 - i_2) dt + R_2 i_3 + R_L(i_3 - i_4) = 0 \quad (3-28)$$

$$\frac{1}{C_1} \int i_4 dt + R_1(i_4 - i_1) + R_L(i_4 - i_3) = 0 \quad (3-29)$$

82 Ecuaciones de redes

Se observará que en estos ejemplos se ha usado la integral sólo como una notación abreviada para la integral con límites; así

$$\int i_k dt \text{ representa a } \int_{-\infty}^t i_k(t) dt \quad (3-30)$$

EJEMPLO 5

En este ejemplo y el siguiente se escribirán las ecuaciones para redes acopladas utilizando los resultados de la sección 2-3. Sea la red la que aparece en la figura 3-27. Esta red se compone de dos partes que están acopladas magnéticamente. Para redes acopladas, la ecuación (3-12) se debe modificar a la forma $b - n + p$, en donde p es el número de partes separadas de la red. En la misma forma, el número de ecuaciones de nodo para las redes acopladas es $n - p$ en vez de $n - 1$, como se vio antes. Por tanto, para este problema se debe escribir $b - n + p = 5 - 5 + 2 = 2$ ecuaciones de mallas.

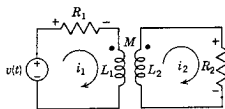


Figura 3-27. Red del ejemplo 5, la cual contiene dos partes acopladas magnéticamente.

Para encontrar la polaridad de los voltajes inducidos en la red, se aplican los métodos descritos en la sección 2-3. En consecuencia, en la figura 3-28(a) la corriente i_1 entra por el terminal con punto del devanado 1-2 e induce un voltaje en el devanado 3-4, positivo en la terminal con punto, es decir la terminal 3. Del mismo modo, i_2 induce un voltaje en el devanado 1-2, siendo positiva la terminal 1 —la que lleva el punto. En la figura 3-28(b) la corriente i_2 tiene un sentido positivo que es contrario al que se acaba de ver. Esta corriente

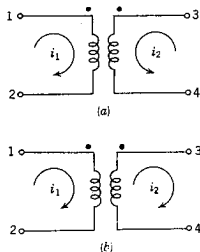


Figura 3-28. Redes que sirven para ilustrar las reglas que determinan la polaridad de los voltajes inducidos.

es positiva cuando sale de la terminal con punto y, por tanto, induce un voltaje en el devanado 1-2, tal que la terminal 2 resulta positiva.

Al aplicar esta regla a la red de la figura 3-27, la ley de voltajes de Kirchhoff es

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = v(t) \quad (3-31)$$

En la segunda malla, la ecuación de equilibrio para voltajes es

$$L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 = 0 \quad (3-32)$$

EJEMPLO 6

El sentido del devanado de las tres bobinas sobre un material conductor de flujo es como se indica en la figura 3-29. Se pide que se escriban las ecuaciones de voltajes de Kirchhoff, tomando en consideración la inductancia mutua. Con la ayuda de los puntos, el sistema de la figura 3-29 se puede substituir por el circuito equivalente de la figura 3-30. Si se utiliza la notación de doble subíndice para que la

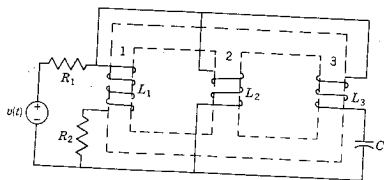


Figura 3-29. Red con acoplamiento magnético que se analiza en el ejemplo 6.

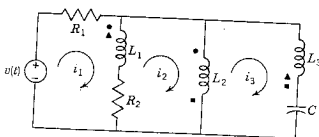


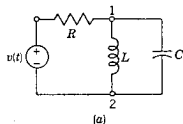
Figura 3-30. Representación de red que es equivalente a la de la figura 3-29.

inductancia mutua indique las dos bobinas que se están tomando en cuenta, las ecuaciones de voltaje de Kirchhoff son

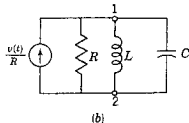
$$R_1 i_1 + L_1 \frac{d(i_1 - i_2)}{dt} + M_{12} \frac{d(i_2 - i_3)}{dt} - M_{13} \frac{di_3}{dt} + R_2(i_1 - i_2) = v(t) \quad (3-33)$$

$$R_2(i_2 - i_1) + L_1 \frac{d(i_2 - i_1)}{dt} - M_{12} \frac{d(i_2 - i_3)}{dt} + M_{13} \frac{di_3}{dt} + L_2 \frac{d(i_2 - i_3)}{dt} + M_{21} \frac{d}{dt}(i_1 - i_2) + M_{23} \frac{d}{dt} i_3 = 0 \quad (3-34)$$

$$L_2 \frac{d}{dt}(i_3 - i_2) - M_{23} \frac{di_3}{dt} - M_{21} \frac{d}{dt}(i_1 - i_2) + L_3 \frac{di_3}{dt} + M_{32} \frac{d}{dt}(i_2 - i_3) - M_{31} \frac{d}{dt}(i_1 - i_2) + \frac{1}{C} \int i_3 dt = 0 \quad (3-35)$$



(a)



(b)

Figura 3-31. Red del ejemplo 7.

En este problema en particular, las ecuaciones serían más sencillas si se hubieran escogido otras tres mallas, de tal modo que cada una incluyera a $v(t)$. (Véase el problema 3-25.)

EJEMPLO 7

A continuación se verá la formulación de ecuaciones de equilibrio, en base de nodos. Sea la red la que se ilustra en la figura 3-31(a). La fuente de voltaje se puede convertir en una fuente de corriente equivalente mediante el procedimiento de la sección 3-3, con lo que se obtiene la red que aparece en la figura 3-31(b). El nodo 2 se designa como el de referencia, y todas las corrientes de rama se asignan como positivas cuando salen del nodo 1. De acuerdo con la ley de corrientes de Kirchhoff, la ecuación de la corriente es

$$\frac{1}{R} v_1 + \frac{1}{L} \int v_1 dt + C \frac{dv_1}{dt} = \frac{v(t)}{R} \quad (3-36)$$

Por supuesto, no es necesario hacer la conversión a la fuente de corriente antes de analizar la red. Puesto que el voltaje de la terminal + del generador es $v(t)$ en la figura 3-31(a), se puede escribir lo que sigue

$$\frac{1}{R} [v_1 - v(t)] + \frac{1}{L} \int v_1 dt + C \frac{dv_1}{dt} = 0 \quad (3-37)$$

o bien,

$$\frac{1}{R} v_1 + \frac{1}{L} \int v_1 dt + C \frac{dv_1}{dt} = \frac{v(t)}{R}$$

que es idéntica a la ecuación (3-36). El análisis se puede efectuar con la fuente de voltaje o con la fuente de corriente equivalente.

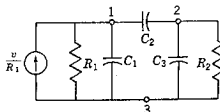


Figura 3-32. Red que se analiza en el ejemplo 8.

EJEMPLO 8

La red que se ilustra en la figura 3-32 equivale a la fuente de corriente de la red de tres mallas que se muestra en la figura 3-25. El nodo 3 es el de referencia y los voltajes desconocidos de los nodos 1 y 2 se representan como v_1 y v_2 . En el nodo 1, cuando se hace que $1/R_1 = G_1$ y $1/R_2 = G_2$.

$$G_1 v_1 + C_1 \frac{dv_1}{dt} + C_2 \frac{d}{dt}(v_1 - v_2) = G_1 v \quad (3-38)$$

y en el nodo 2

$$C_2 \frac{d}{dt}(v_2 - v_1) + C_3 \frac{dv_2}{dt} + G_2 v_2 = 0 \quad (3-39)$$

En este ejemplo, la formulación, base de nodos, ha proporcionado menos ecuaciones diferenciales que en base de mallas, como sucede en el ejemplo 3. Por lo común se requiere menos trabajo para resolver dos ecuaciones diferenciales simultáneas que para resolver tres. La elección de método de formulación, sea por mallas o por nodos, depende también del objetivo del análisis. En este ejemplo lo que se busca es el voltaje en el nodo 2; por tanto, el método de nodos tiene más ventajas que el de mallas. Sin embargo, si lo que se debe determinar es la corriente que fluye por el capacitor C_3 , es necesario sopesar las ventajas relativas de los dos métodos. Las corrientes de malla se pueden asignar de tal modo que fluya tan sólo una corriente de malla en C_3 ; pero se deben resolver tres ecuaciones simultáneas. Cuando se usa el método de nodos, se puede encontrar primero el voltaje del nodo 2 y, luego, determinar las corrientes del capacitor, con base en la ecuación

$$i_{c_3} = C_3 \frac{dv_2}{dt} \quad (3-40)$$

El segundo método comprende menos cálculos en este ejemplo en particular.

EJEMPLO 9

La red que se muestra en la figura 3-33 difiere de las redes de los otros ejemplos en que hay una resistencia en serie con la fuente de

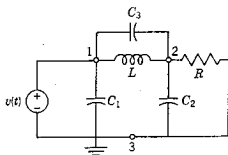


Figura 3-33. Red del ejemplo 9.

voltaje. Aunque esta red tiene tres mallas independientes, existe un solo voltaje de nodo desconocido, que es el del nodo 2. De acuerdo con la ley de corrientes de Kirchhoff, se escribe

$$C_3 \frac{d}{dt}(v_2 - v_1) + \frac{1}{L} \int (v_2 - v_1) dt + Gv_2 + C_2 \frac{dv_2}{dt} = 0 \quad (3-41)$$

en donde, como antes, $G = 1/R$. Obsérvese que C_1 no aparece en la ecuación. Esto se debe a que el voltaje del nodo 1 es independiente del capacitor C_1 , que es un elemento extraño. La fuente de voltaje debe conservar el mismo voltaje terminal para cualquier carga (o no es un elemento ideal), de manera que es posible eliminar C_1 sin efectuar a las ecuaciones de la red.

3-5. ANALISIS CON VARIABLES DE MALLA

Hasta ahora se han visto desde el análisis de redes muy sencillas hasta configuraciones de redes más complejas por los métodos de mallas y de nodos. En las tres siguientes secciones continuará la exposición de la sección 3-3 para tres de los numerosos métodos posibles que sirven para formular las ecuaciones que describen a las redes. Este postulado se ilustra en la figura 3-34, que es una ampliación de la que

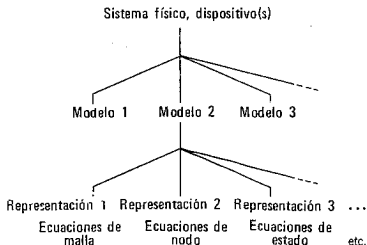


Figura 3-34. Se dispone de varias representaciones para describir un modelo dado de un sistema físico.

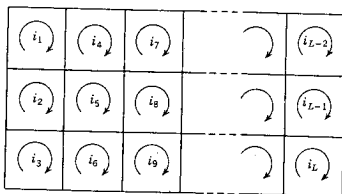


Figura 3-35. Gráfica de una red con L corrientes de malla independientes identificadas.

se presentó en el capítulo 1. Tiene por objeto ilustrar el punto de que, una vez que se escoge un modelo de un sistema de dispositivos, se tienen varias alternativas para representar dicho modelo mediante un conjunto de ecuaciones de red. En la sección 3-3 ya se vieron los factores que intervienen en la elección de la representación, e incluyen el de mantener el número de variables lo más reducido posible, encontrar el resultado deseado del modo más directo posible, etc. Todos los métodos válidos pueden conducir al mismo resultado final, o sea, determinar todos los voltajes y todas las corrientes de rama de la red. Como se observa, rara vez se lleva el análisis hasta este límite, ya que por lo general el interés reside sólo en un voltaje o en una corriente.

Ahora, el análisis es relativamente sencillo para redes en las que se incluyen sólo elementos pasivos, excluyendo la inductancia mutua y las fuentes controladas. Este método se verá primero en un caso sencillo y más adelante se delinearán las modificaciones necesarias para tratar el caso más general.

Para empezar, sea una red de L mallas, representada por la gráfica de la figura 3-35. Véase primeramente la malla 1, que puede contener resistencia, inductancia y capacitancia en cualquiera de las ramas o en todas las que forman la malla. Sean

R_{11} la resistencia total de la malla 1.

L_{11} la inductancia total de la malla 1.

D_{11} la elastancia total de la malla 1.

En este caso se utiliza la elastancia en vez de la capacitancia, debido a que los términos de elastancia se suman directamente para un circuito en serie, mientras que los de la capacitancia se combinan como sigue

$$\frac{1}{C_{11}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (3-42)$$

En la malla 1 se tendrán caídas de voltaje producidas por las corrientes en la malla 2, en la 3, en la 4 —en realidad, en todas las mallas en el caso general. En vez de limitarse a la malla 1, véase el efecto de la corriente en la malla j -ésima en los voltajes de la malla k , en donde j y k son cualquier entero, desde 1 hasta L . Para estas dos mallas, sea R_{kj} = la resistencia total común a las mallas k y j ; L_{kj} = la inductancia total (incluyendo la mutua) que es común a las mallas k y j ; D_{kj} = la elastancia total común a las mallas k y j . La caída de voltaje en la malla k , producida por la corriente i_j , es

$$R_{kj}i_j + L_{kj}\frac{di_j}{dt} + D_{kj} \int i_j dt \quad (3-43)$$

En este punto se adoptará una notación especial para las ecuaciones de esta forma, lo que permite que la siguiente expresión equivalga a la ecuación (3-43).

$$\left(R_{kj} + L_{kj}\frac{d}{dt} + D_{kj} \int dt \right) i_j = a_{kj}i_j \quad (3-44)$$

Este simbolismo implica que la variable i_j se opera mediante multiplicación por R_{kj} , multiplicación por L_{kj} y diferenciación, haciéndose finalmente una multiplicación por D_{kj} y una integración. Estas tres operaciones se resumen en el símbolo a_{kj} .

La caída total de voltaje en la malla k se encuentra considerando en forma sucesiva la corriente en dicha malla k y las corrientes que fluyen en las demás mallas. Matemáticamente esto se realiza dando a j todos los valores de 1 a L . Dicha caída total de voltaje debe ser igual a la elevación total de voltaje proveniente de las fuentes activas de la malla k , que se escribe como v_k . Entonces, de acuerdo con la ley de voltajes de Kirchhoff, se tiene que

$$\sum_{j=1}^L a_{kj}i_j = v_k \quad (3-45)$$

Queda tan sólo repetir este proceso para todas las mallas haciendo que k tenga todos los valores, desde 1 hasta L . Por consiguiente, la forma más general de la ley de voltajes de Kirchhoff para una red de circuito L es

$$\sum_{j=1}^L a_{kj}i_j = v_k, \quad k = 1, 2, \dots, L \quad (3-46)$$

El desarrollo de esta ecuación concisa es el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}i_1 + a_{12}i_2 + a_{13}i_3 + \dots + a_{1L}i_L &= v_1 \\ a_{21}i_1 + a_{22}i_2 + a_{23}i_3 + \dots + a_{2L}i_L &= v_2 \\ \dots & \dots \\ a_{L1}i_1 + a_{L2}i_2 + a_{L3}i_3 + \dots + a_{LL}i_L &= v_L \end{aligned} \quad (3-47)$$

Conviene ordenar estas ecuaciones en forma de un *cuadro* (o *tabla*), donde destaquen los coeficientes del operador. A continuación se muestra un ejemplo de este tipo de tabla.

Ec.	Voltaje	Coeficiente de						
		i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	\dots	i_L
1	v_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	\dots	a_{1L}
2	v_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	\dots	a_{2L}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
L	v_L	a_{L1}	a_{L2}	a_{L3}	a_{L4}	a_{L5}	\dots	a_{LL}

Si se supone que las corrientes de malla son todas positivas para el mismo sentido de recorrido, por ejemplo en el sentido de las manecillas del reloj, entonces todas las a_{jj} son positivas y todas las a_{jk} ($j \neq k$) son negativas. Por supuesto, en problemas reales muchos de los coeficientes del operador son cero.

El cuadro que se acaba de escribir y la ecuación (3-47) se pueden expresar de un modo compacto como una ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1L} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2L} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3L} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{L1} & a_{L2} & a_{L3} & \dots & a_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ i_L \end{bmatrix} \quad (3-48)$$

o bien, simplemente

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}\mathcal{I} \quad (3-49)$$

En este caso, las matrices \mathcal{V} e \mathcal{I} se conocen como matrices o *vectores columna* y \mathcal{A} es una matriz *cuadrada*. La multiplicación matricial de \mathcal{A} e \mathcal{I} se efectúa de tal modo que se reconstruya la ecuación (3-47). Por tanto, el primer elemento en la columna \mathcal{V} es igual a la suma de los productos de los elementos sucesivos en el primer renglón de \mathcal{A} y los elementos de la columna de \mathcal{I} . De acuerdo con esta regla, se ve que

$$v_1 = a_{11}i_1 + a_{12}i_2 + a_{13}i_3 + \dots + a_{1L}i_L \quad (3-50)$$

que es la ecuación (3-46) para $k=1$. Se observará que en la ecuación (3-46), k y j de a_{kj} describen, respectivamente, el renglón y la

90 Ecuaciones de redes

columna de los coeficientes de las ecuaciones (3-47) y (3-48), así como del cuadro que se hizo. Los detalles del álgebra matricial se estudian en el apéndice B.

EJEMPLO 10

En la figura 3-36 se muestra una red de dos mallas. En esta red se tienen dos fuentes de voltaje y no hay inductancia mutua. Entonces, la ley de voltajes de Kirchhoff es

$$\sum_{j=1}^2 a_{kj} i_j = v_k, \quad k = 1, 2 \quad (3-51)$$

o bien, en forma desarrollada,

$$a_{11} i_1 + a_{12} i_2 = v_1, \quad a_{21} i_1 + a_{22} i_2 = v_2 \quad (3-52)$$

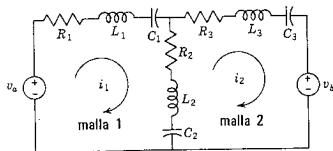


Figura 3-36. Red de dos mallas que se analiza en el ejemplo 10.

Los coeficientes del operador se encuentran analizando la red como sigue.

$$a_{11} = (R_1 + R_2) + (L_1 + L_2) \frac{d}{dt} + (D_1 + D_2) \int dt \quad (3-53)$$

$$a_{22} = (R_2 + R_3) + (L_2 + L_3) \frac{d}{dt} + (D_2 + D_3) \int dt \quad (3-54)$$

$$a_{12} = a_{21} = -R_2 - L_2 \frac{d}{dt} - D_2 \int dt \quad (3-55)$$

En la ecuación (3-53) a_{11} se determina recorriendo la malla 1 y sumando los valores de las R , L y D ; a_{22} se determina igualmente mediante una suma alrededor de la malla 2. La ecuación (3-55) la forman los términos en R , L y D , comunes a las mallas 1 y 2, y el signo negativo se origina debido a que en ellas los sentidos de recorrido de las mallas 1 y 2 son opuestos. Por último, se puede ver que los términos de voltaje son

$$v_1 = v_s, \quad v_2 = -v_s \quad (3-56)$$

Las ecuaciones de Kirchhoff tienen una forma particularmente sencilla para las redes resistivas cuando $a_{jk} = R_{jk}$. Esto se ilustrará mediante un ejemplo.

EJEMPLO 11

Sea la red de la figura 3-36. Para este ejemplo, las ecuaciones de voltajes de Kirchhoff se expresarán en forma tabulada, en donde el primer renglón de la gráfica equivale a la ecuación

$$0 = 4i_1 - i_2 + 0i_3 - i_4 + 0i_5 + 0i_6 + 0i_7 + 0i_8 + 0i_9 \quad (3-57)$$

Ec.	Voltaje	Coeficiente de								
		i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7	i_8	i_9
1	0 =	4	-1	0	-1	0	0	0	0	0
2	1 =	-1	5	-1	0	-1	0	0	0	0
3	0 =	0	-1	4	0	0	-1	0	0	0
4	-1 =	-1	0	0	5	-1	0	-1	0	0
5	0 =	0	-1	0	-1	4	-1	0	-1	0
6	0 =	0	0	-1	0	-1	5	0	0	-1
7	1 =	0	0	0	-1	0	0	4	-1	0
8	0 =	0	0	0	0	-1	0	-1	5	-1
9	0 =	0	0	0	0	0	-1	0	-1	4

También en este caso dicha tabla se puede construir de una manera muy sencilla. Los elementos de la diagonal principal de la tabla se encuentran sumando las resistencias alrededor de cada una de las nueve mallas. Los elementos que quedan fuera de la diagonal son todos negativos y son los valores de la resistencia común a las dos mallas que se están considerando, identificadas por el número de renglón (número de ecuación) y el número de columna (subíndice de la corriente).

De acuerdo con la tabla, o a partir de la matriz correspondiente de la forma (3-48), se observará que: (1) los elementos que están sobre la diagonal principal son todos positivos, y todos los demás son negativos o cero. (2) Existe una simetría alrededor de la diagonal principal. Esta simetría y la regla de signos se aplican siempre que se recorren las mallas en el mismo sentido, ya sea en el sentido de las

manecillas del reloj o en sentido contrario. Estas observaciones para un ejemplo describen el caso general en ausencia de fuentes controladas.

¿Qué se puede decir de la inductancia mutua y las fuentes controladas? La inductancia mutua no presentará problemas, como lo indican los ejemplos de la última sección, y las observaciones de simetría se aplican también, ya que $M_{ij} = M_{ji}$. La presencia de las fuentes controladas es algo totalmente distinto. Estas fuentes dan origen a términos de la forma $v_j = K i_k$, que aparecerán en la suma alrededor de la malla que contiene v_j , pero no en la malla que define a i_k . La escritura de las ecuaciones no representa un problema; pero por lo común las reglas de simetría y signos que se han observado no se aplicarán (existen excepciones) en presencia de fuentes controladas. Este tema se estudiará con más detalle en el capítulo 9, en relación con el estudio de la reciprocidad.

3-6. ANALISIS CON VARIABLES DE NODO

Sea una red con n nodos y sólo una parte. Como se vio en la sección 3-3, existen $n - 1$ pares de nodos independientes. De las muchas posibilidades para variables de par de nodos, se escogerán los voltajes de nodo a referencia, como variables exclusivamente. La forma de los voltajes para la rama que conecta al nodo j con el k cuando el nodo j es positivo, será $v_j - v_k$ (de acuerdo con la ley de voltajes de Kirchhoff). Se supondrá que las corrientes salen de cada uno de los $n - 1$ nodos en los que se formulará la ley de corrientes de Kirchhoff, para estar de acuerdo con la asignación del signo del voltaje, que se acaba de hacer. De conformidad con la exposición anterior, ésta es una elección arbitraria, y escoger la otra alternativa equivale a multiplicar las ecuaciones resultantes por -1 .

Se seguirá la práctica de convertir todas las fuentes de voltaje en fuentes equivalentes de corriente, como preparación de la red, antes de proceder a la escritura de las ecuaciones. Por ahora, se pospondrá la consideración de inductancia mutua y fuentes controladas, y se considerará una red pasiva, compuesta de resistencias, capacitores e inductores. Obsérvese primeramente que, para los elementos conectados como se indica en la figura 3-37, los elementos se pueden substituir

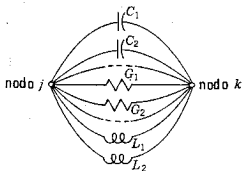


Figura 3-37. Elementos que se conectan entre los nodos j y k . Los tres tipos de elementos se pueden combinar para dar una red RLC en paralelo equivalente entre los nodos j y k .

mediante un sistema equivalente, como sigue: (1) todas las capacitancias en paralelo se substituyen por una capacitancia equivalente con un valor de $C_{kj} = C_1 + C_2 + \dots$; (2) la resistencia equivalente se encuentra sumando las conductancias como sigue, $G_{kj} = 1/R_{kj} = G_1 + G_2 + \dots$; (3) la inductancia equivalente, con un valor de L_{kj} , en donde $1/L_{kj} = 1/L_1 + 1/L_2 + \dots$. Al aplicar esta simplificación de red a los elementos entre el nodo k y todos los otros nodos, desde $j=1$ hasta $j=N$, se tiene la ecuación

$$\sum_{j=1}^N \left(G_{kj} + C_{kj} \frac{d}{dt} + \frac{1}{L_{kj}} \int dt \right) v_j = i_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3-58)$$

que se puede escribir en forma abreviada como

$$\sum_{j=1}^N b_{kj} v_j = i_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3-59)$$

haciendo que b_{kj} resuman las operaciones,

$$\left(G_{kj} + C_{kj} \frac{d}{dt} + \frac{1}{L_{kj}} \int dt \right) = b_{kj} \quad (3-60)$$

El desarrollo de la ecuación (3-59) tiene la misma forma que el desarrollo para el caso de mallas en la ecuación (3-47), en donde los valores de a se substituyen por los de b , los de i por los de v y los de v por los de i .

Al aplicar esta ecuación a las redes no es necesario simplificarlas combinando elementos. En el nodo j , la capacitancia C_{jj} es la suma de las capacitancias *conectadas* al nodo j o la capacitancia del nodo j a tierra, cuando todos los demás nodos se conectan también a tierra. El valor de C_{kj} es la suma de las capacitancias *conectadas entre* el nodo j y el nodo k , o la capacitancia del nodo j al nodo k , cuando todos los demás están conectados a tierra. Se pueden aplicar las mismas instrucciones para la inductancia inversa $1/L$ y para la conductancia $G = 1/R$. Por tanto, los coeficientes se pueden determinar por medio de un examen, observando sencillamente qué elementos están "conectados a" o "conectados entre" los diferentes nodos.

Si se mantiene la misma convención para la corriente positiva al formular todas las ecuaciones de nodo para una red, el signo de b_{kj} será positivo cuando $k=j$, y negativo cuando $k \neq j$.

EJEMPLO 12

En la figura 3-38 se ilustra una red con dos pares de nodos independientes. Para este tipo de red, la ley de corrientes de Kirchhoff es

$$\sum_{j=1}^2 b_{kj} v_j = i_k, \quad k = 1, 2 \quad (3-61)$$

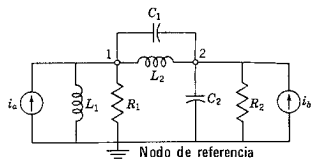


Figura 3-38. Red con dos voltajes independientes de par de nodos que se analiza en el ejemplo 11.

o bien,

$$b_{11}v_1 + b_{12}v_2 = i_1, \quad b_{21}v_1 + b_{22}v_2 = i_2 \quad (3-62)$$

Si esto se expresa en la forma de una ecuación matricial, se tiene

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (3-63)$$

Los valores para los coeficientes del operador se resumen en forma de tabla como sigue

		Coeficiente de	
Ec. Corriente		v_1	v_2
1	i_1	$G_1 + C_1 \frac{d}{dt} + \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) \int dt$	$-C_1 \frac{d}{dt} - \frac{1}{L_2} \int dt$
2	i_2	$-C_1 \frac{d}{dt} - \frac{1}{L_2} \int dt$	$+G_2 + (C_1 + C_2) \frac{d}{dt} + \frac{1}{L_2} \int dt$

EJEMPLO 13

Sea la red resistiva la que se ilustra en la figura 3-39. Para este tipo de red, las seis ecuaciones de variables de nodo se pueden escribir rutinariamente en forma de cuadro, como sigue

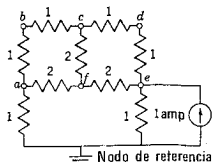


Figura 3-39. Red del ejemplo 13. Los valores de los elementos se dan en ohms.

Ec. para el nodo: Corriente	Coeficientes de						
	v_a	v_b	v_c	v_d	v_e	v_f	
a	0	$\frac{5}{2}$	-1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$
b	0	-1	2	-1	0	0	0
c	0	0	-1	$\frac{5}{2}$	-1	0	$-\frac{1}{2}$
d	0	0	0	-1	2	-1	0
e	1	0	0	0	-1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$
f	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

En forma de ecuación matricial, esto se expresa así:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \\ v_d \\ v_e \\ v_f \end{bmatrix} \quad (3-64)$$

Esta clase de ecuaciones se puede deducir rápidamente utilizando las reglas de estar "conectado a" y "conectado entre", así como el acuerdo del signo, para i_j y G_{kj} . Obsérvese que todos los términos de la diagonal principal son positivos y que existe simetría con respecto a la diagonal principal.

Se pueden encontrar problemas especiales en el análisis nodal de las redes, en donde se tiene inductancia mutua, y una buena regla de trabajo consiste en dejar a un lado el problema, analizando siempre esas redes en base de mallas. En caso de que se requiera el análisis nodal, uno de los planteamientos consiste en substituir las bobinas acopladas con una red equivalente sin inductancia mutua.³ La presencia de fuentes controladas en la red que se va a analizar no crea problemas especiales; pero, por lo general, da como resultado una matriz no simétrica, de la forma que se indica en la ecuación (3-64).

Suponiendo que ahora sea posible escribir las ecuaciones de red en las dos representaciones, el siguiente problema consiste en poder resolver los grupos de ecuaciones, para lo cual se requiere conocer determinantes.

³ Como ejemplo, véase, de Paul M. Chirlian, *Basic Network Theory* (McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969), págs. 136-140.

3-7. DETERMINANTES: MENORES Y EL METODO DE ELMINACION DE GAUSS

El arreglo de cantidades encerrado entre dos líneas verticales se conoce como *determinante de orden n*. Las cantidades dentro de

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3-65)$$

las líneas horizontales forman *rengiones* y las cantidades en líneas verticales forman *columnas*. Un determinante de esta índole es cuadrado y tiene n rengiones y n columnas. Cada una de las n^2 cantidades en el determinante se conoce como *elemento*. La posición del elemento dentro del determinante se identifica mediante un subíndice doble; el primero de ellos indica el renglón y el segundo indica la columna (se numera desde la esquina superior izquierda). Los elementos que se encuentran a lo largo de la línea que se extiende desde a_{11} hasta a_{nn} forman la *diagonal principal* del determinante.

El determinante tiene un valor que es función de los valores de sus elementos. Para encontrar este valor, se deben utilizar las reglas para el desarrollo de determinantes. Los determinantes de segundo y tercer orden tienen desarrollos que se estudian en álgebra elemental.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (3-66)$$

y

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \quad (3-67)$$

Los desarrollos de determinantes de cuarto orden o mayores, se efectúan con facilidad en términos de *menores*.

El *menor* de cualquier elemento de un determinante a_{jk} es el determinante que permanece cuando se elimina la columna y la hilera que contiene a_{jk} . De acuerdo con el determinante de tercer orden,

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (3-68)$$

98 Ecuaciones de redes

en donde Δ es el *determinante del sistema* y se da como

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1L} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{L1} & a_{L2} & \dots & a_{LL} \end{vmatrix} \quad (3-74)$$

que debe ser diferente de cero, para que las soluciones i_1, i_2, \dots, i_n sean únicas y D_j sea el determinante que se forma al substituir la columna j de los coeficientes a , por la columna v_1, v_2, \dots, v_n .

Con la regla de Cramer y el método de desarrollo por menores se pueden resolver las ecuaciones simultáneas de la forma de la ecuación (3-47). Para una ecuación de tercer orden, la solución de i_1 es

$$i_1 = \frac{D_1}{\Delta} = \frac{v_1 \Delta_{11} + v_2 \Delta_{21} + v_3 \Delta_{31}}{\Delta} \quad (3-75)$$

o bien,

$$i_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} v_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta} v_2 + \frac{\Delta_{31}}{\Delta} v_3 \quad (3-76)$$

De manera similar,

$$i_2 = + \frac{\Delta_{21}}{\Delta} v_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} v_2 + \frac{\Delta_{23}}{\Delta} v_3 \quad (3-77)$$

y así sucesivamente. La forma de estas ecuaciones se simplifica mucho si todos los valores de v , excepto uno, son cero, lo que corresponde a sólo una fuente de voltaje.

EJEMPLO 14

Para una red de tres mallas en particular, se dan las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} 5i_1 - 2i_2 - 3i_3 &= 10 \\ -2i_1 + 4i_2 - 1i_3 &= 0 \\ -3i_1 - 1i_2 + 6i_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3-78)$$

De acuerdo con la regla de Cramer, se escribe la siguiente solución para i_1 como

$$i_1 = \frac{D_1}{\Delta} = \frac{10 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ -3 & -1 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{230}{43} \quad (3-79)$$

De la misma manera,

$$i_2 = \frac{-(+10) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{150}{43}, \quad i_3 = \frac{+(10) \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{140}{43}$$

(3-80)

Cuando el orden del determinante es mayor que 4 ó 5, el *método de eliminación de Gauss* o sus variantes ofrece mayores ventajas en relación con los desarrollos por medio de menores, ya que se requiere $n^3/3$ multiplicaciones en lugar de $n \times n!$. El método de eliminación de Gauss es una forma sistemática de eliminar variables que será presentado por medio del ejemplo de las ecuaciones (3-78) que se acaban de resolver. Se observará que los dos miembros de una ecuación se pueden multiplicar por una constante, sin alterar su valor. Si se multiplica la primera ecuación de (3-78) por 2/5 y luego se le suma la primera y la segunda ecuaciones, se tiene

$$0i_1 + \frac{1}{5}i_2 - \frac{1}{5}i_3 = 4 \quad (3-81)$$

A continuación se multiplica la primera ecuación por 3/5 y se suma, a la tercera lo cual da

$$0i_1 - \frac{1}{5}i_2 + \frac{2}{5}i_3 = 6 \quad (3-82)$$

Ahora, si la ecuación (3-81) se multiplica por 11/16, se puede eliminar i_2 sumando la ecuación resultante con la (3-82) y se obtiene

$$\frac{21}{5}i_3 = 140 \quad (3-83)$$

Las tres ecuaciones

$$5i_1 - 2i_2 - 3i_3 = 10$$

$$0i_1 + \frac{1}{5}i_2 - \frac{1}{5}i_3 = 4 \quad (3-84)$$

$$0i_1 + 0i_2 + 43i_3 = 140$$

están en una forma característica del método de Gauss, es decir, un arreglo triangular como el que se muestra en la figura 3-40. La última ecuación de (3-84) es la solución para i_3 , que es 140/43. Este valor se substituye en la segunda ecuación y da la solución para i_2 y al substituir estos dos valores en la primera ecuación se encuentra el valor de i_1 , como en las ecuaciones (3-79) y (3-80).

La idea básica del método de Gauss es la eliminación sistemática de variables, que se denomina *triangularización*. La generalización de este ejemplo crea un método poderoso para el cálculo aritmético. Su-

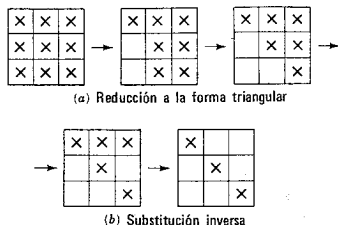


Figura 3-40. Ilustración de los pasos comprendidos en el proceso de eliminación de Gauss. Se aplica el mismo patrón a sistemas de un número mayor de ecuaciones. Los espacios que no tienen una X contienen un cero.

póngase que se tiene un conjunto de n ecuaciones con n incógnitas. La primera ecuación de este grupo es:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = A_1 \quad (3-85)$$

en donde $a_{11} \neq 0$. Si $a_{11} = 0$, es necesario ordenar las ecuaciones de tal manera que la primera satisfaga este requisito. A continuación se multiplica esta ecuación, la (3-85), por un factor apropiado, de tal manera que cuando se suma a la siguiente ecuación se elimine el término que contiene x_1 . Este proceso se repite para cada una de las ecuaciones restantes, de tal suerte que se tenga la ecuación (3-85) y $n - 1$ ecuaciones adicionales en las que el multiplicador del término x_1 sea cero. Una de estas ecuaciones debe tener un coeficiente del término x_2 que no sea cero, porque de otra manera no existe solución para el grupo de ecuaciones. Sea esta ecuación

$$b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \dots + b_{2n}x_n = B_2 \quad (3-86)$$

La operación básica se repite con esta ecuación: se multiplica por un factor apropiado y luego se suma a cada una de las $n - 2$ ecuaciones restantes, una a la vez, aplicando un factor multiplicador distinto a cada una de ellas. El resultado será $n - 2$ ecuaciones y el multiplicador de x_2 será cero. Esta operación se continúa hasta el último término, que es

$$q_{nn}x_n = Q_n \quad (3-87)$$

y para el cual se determina x_n . Luego se trabaja en sentido inverso, determinando cada valor de x_j hasta que se llega a la última etapa, en que se determina x_1 . Los pasos se conocen como *substitución inversa*.

Así, se puede considerar que el método de eliminación de Gauss consta de dos partes: triangularización y sustitución inversa. Una vez que se aprende el algoritmo es muy sencillo.

3-8. DUALIDAD

En las exposiciones anteriores se subrayaron algunas situaciones análogas. Los enunciados de las dos leyes de Kirchhoff eran casi idénticos, palabra por palabra, substituyendo voltaje en lugar de corriente y malla independiente en lugar de par de nodos independiente, etc. De la misma manera, las ecuaciones integrodiferenciales que se obtuvieron al aplicar las dos leyes de Kirchhoff tienen una apariencia semejante. Esta semejanza repetida es sólo parte de un patrón más general de otros patrones idénticos de comportamiento en los papeles que desempeñan el voltaje y la corriente en el análisis de redes. Tal semejanza, con todas sus implicaciones, se conoce como el principio de *dualidad*. Véanse las dos redes totalmente diferentes en lo que respecta al aspecto físico que se muestran en la figura 3-41. Al examinarlas se observa que la primera se puede analizar en base de mallas y la segunda en base de nodos. Las ecuaciones resultantes son

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = v(t) \quad (3-88)$$

$$C' \frac{dv'}{dt} + G'v' + \frac{1}{L'} \int v' dt = i'(t) \quad (3-89)$$

Estas dos ecuaciones especifican operaciones matemáticas idénticas y la única diferencia reside en los símbolos de las letras. La solución de una ecuación constituye también la solución de la otra; es decir, las dos redes son *duales*. Sólo se intercambiaron las funciones de la corriente y el voltaje en estas dos redes. Conviene hacer una advertencia: una red no es la equivalente de la otra, en el sentido de que la pueda substituir.

Al examinar los términos de las ecuaciones (3-88) y (3-89) se observa que las siguientes cantidades son análogas (omitiendo las primas).

$$\begin{array}{l} Ri \quad y \quad Gv \\ L \frac{di}{dt} \quad y \quad C \frac{dv}{dt} \\ \frac{1}{C} \int i dt \quad y \quad \frac{1}{L} \int v dt \end{array}$$

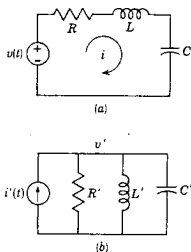


Figura 3-41. Redes que ilustran el concepto de las redes duales. Las redes se califican de duales cuando $R' = 1/R$, $L' = C$, $C' = L$ e $i'(t) = v(t)$.

Es evidente que los siguientes pares son cantidades duales

$$R \quad \text{y} \quad G$$

$$L \quad \text{y} \quad C$$

corriente de malla, i y v , voltaje de par de nodos

$$\left. \begin{array}{l} q \\ \int i \, dt \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi \\ \int v \, dt \end{array} \right.$$

circuito y par de nodos

corto circuito y circuito abierto

Se puede seguir una sencilla construcción gráfica⁴ para encontrar el dual de una red.

- (1) Dentro de cada circuito sitúe un nodo, asignándole un número para mayor claridad. Sitúe un nodo adicional, el de referencia, que quede fuera de la red. Sitúe los mismos nodos numerados en el papel, en un espacio por separado, para construir la red dual.
- (2) Trace líneas de un nodo a otro, a través de los elementos de la red original, atravesando sólo un elemento a la vez. Para cada elemento que se atraviese en la red original, conecte el elemento dual correspondiente —de acuerdo con la lista que se dio antes—, en la red dual que se está construyendo.
- (3) Continúe con este proceso hasta que se agote el número de trayectorias posibles a través de los elementos individuales (si por un error atravesara un alambre de conexión que se supone está en corto circuito, el elemento dual es un circuito abierto).
- (4) La red hecha de esta manera es la que se califica como dual. Esta estructura se puede comprobar escribiendo las ecuaciones diferenciales para los dos sistemas, uno en base de mallas y el otro en base de nodos.

La representación gráfica que se acaba de bosquejar se ilustra en la figura 3-42. Si la gráfica de una red es plana, el método determinará siempre la red dual. Si la red tiene una gráfica que no es plana, el método fracasará siempre.

⁴ M. F. Gardner y J. L. Barnes, *Transients in Linear Systems* (John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1942), pág. 46 y sigs.

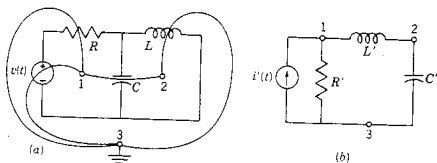


Figura 3-42. Construcción gráfica que se usa para determinar la red dual de una red plana. Se considera que las redes son duales cuando $i'(t) = v(t)$, $R' = 1/R$, $L' = C$ y $C' = L$.

3-9. ANALISIS CON VARIABLES DE ESTADO

La tercera formulación de las ecuaciones de redes que se describe en este capítulo se basa en el uso de variables de estado. Las variables de estado que por lo general se seleccionan para el análisis de redes son los voltajes de capacitores y las corrientes de inductores. Estos substituyen a las corrientes de malla y a los voltajes de nodo a referencia en los dos métodos que se estudiaron antes. Tales variables tienen la misma propiedad que las que se vieron con anterioridad: su determinación permite que se encuentren todos los voltajes y todas las corrientes de la red.

La ventaja particular de la formulación de la variable de estado consiste en que se hace en una forma especialmente apropiada para la solución en computadora, ya sea digital o analógica. Además, esta formulación es popular para describir sistemas de control —en efecto, los sistemas en general, incluyendo los de parámetros variables, en el tiempo y los casos no lineales.

Este método de análisis se presentará para el caso de la red sencilla que aparece en la figura 3-43. Para esta red RLC en serie las variables de estado son el voltaje del capacitor v_C y la corriente del inductor i_L . En el nodo 3 se escribe la siguiente expresión de acuerdo con la ley de corrientes de Kirchhoff

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_L \quad (3-90)$$

De acuerdo con la ley de voltajes de Kirchhoff que se aplica a la única malla

$$L \frac{di_L}{dt} = v_s - i_L R - v_C \quad (3-91)$$

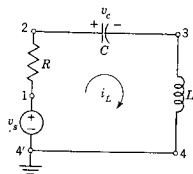


Figura 3-43. Red RLC que se emplea para presentar el método de variables de estado.

Estas dos ecuaciones se reordenan en la siguiente forma

$$\begin{aligned}\frac{dv_C}{dt} &= 0v_C + \frac{1}{C} i_L \\ \frac{di_L}{dt} &= \frac{-1}{L} v_C - \frac{R}{L} i_L + v_s\end{aligned}\quad (3-92)$$

que se dice que se encuentran en *forma de estado*. La generalización de esas ecuaciones se efectúa con suma facilidad utilizando x como la variable general de estado y y como la entrada general

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + y_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + y_2 \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + y_n\end{aligned}\quad (3-93)$$

Dado que se desea escribir las ecuaciones de red en esta forma, la pregunta consiste en cómo se puede lograr en general, con la certeza de que las ecuaciones así escritas sean independientes. Como se mencionó antes, la motivación es que la ecuación (3-93) en forma de variables de estado es la más conveniente para una solución en computadora.

En primer lugar, se observa intuitivamente que si se desean términos tales como dv_C/dt , de la ecuación (3-92), entonces se deben escribir ecuaciones de nodo para los capacitores; de igual manera, los términos di_L/dt sugieren ecuaciones de mallas. ¿Cómo se pueden escribir éstas sistemáticamente?

En 1957, T. R. Bashkow presentó la primera solución a este problema, aplicada específicamente al caso de las redes. La estrategia que sugirió se logra en los siguientes pasos.

- (1) Escoja un árbol que contenga todos los capacitores⁵ y ningún inductor.
- (2) Las variables de estado son los voltajes de capacitores de las ramas de este árbol y las corrientes de inductores de las cuerdas.
- (3) Escriba una ecuación de nodo para cada capacitor.
- (4) Maneje cada ecuación, si es necesario, hasta que contenga sólo las variables que seleccione en (2) más las entradas.

⁵ Si una red contiene una malla de capacitores o un nodo al que estén conectados sólo inductores, entonces se debe modificar el método. Para esto hay que consultar los libros de texto avanzados que aparecen en la bibliografía.

- (5) Escriba una ecuación de malla, utilizando cada inductor como una cuerda del árbol de (1).
- (6) Repita el paso (4).
- (7) Transforme las ecuaciones como sea necesario (por ejemplo, dividiendo entre constantes) hasta que aparezcan en la forma estándar de la ecuación (3-93).

A continuación se da un ejemplo que ilustra estos pasos.

EJEMPLO 14

Sea la red la que aparece en la figura 3-44(a). Siguiendo los pasos que antes se dan:

- (1) El árbol indicado por las líneas gruesas satisface el requisito de que contenga todos los capacitores pero no los inductores.
- (2) Las variables de estado se muestran en la figura, identificadas como v_C , i_1 e i_2 , indicándose también los sentidos de referencia.
- (3) En el nodo C la ley de corriente de Kirchoff da

$$C \frac{dv_C}{dt} = -i_1 - i_2 \quad (3-94)$$

- (4) Esta ecuación tiene la forma apropiada, excepto por la división entre C.

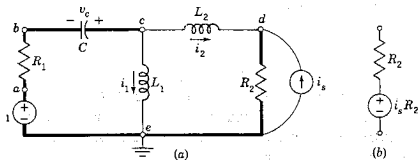


Figura 3-44. Red del ejemplo 15 con el árbol seleccionado el cual se indica mediante las líneas gruesas.

- (5) La primera malla está formada con la cuerda que contiene a L_1 . La ley de voltajes de Kirchoff da

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = -i_1 R_1 + v_C + v_1 \quad (3-95)$$

La segunda malla está formada por la cuerda que contiene a L_2 . La fuente de corriente y la resistencia R_2 se convierten primeramente en la forma que se indica en (b) de la figura. A continuación,

$$L_2 \frac{di_2}{dt} = -(R_1 + R_2)i_2 + v_c - R_2 i_1 \quad (3-96)$$

(6) Esta ecuación se escribe en términos de las variables de estado de (2) y requiere sólo la división entre L_2 .

(7) En la forma estándar, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dv_c}{dt} &= 0v_c - \frac{1}{C}i_1 - \frac{1}{C}i_2 \\ \frac{di_1}{dt} &= \frac{1}{L_1}v_c - \frac{R_1}{L_1}i_1 + 0i_2 + \frac{1}{L_1}v_1 \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{1}{L_2}v_c + 0i_1 - \frac{1}{L_2}(R_1 + R_2)i_2 - \frac{R_2}{L_2}i_1 \end{aligned} \quad (3-97)$$

En forma de matriz, esta ecuación se convierte en

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_c}{dt} \\ \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{L_2} & 0 & -\frac{(R_1 + R_2)}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & -\frac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} \quad (3-98)$$

o bien en su forma compacta

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{By} \quad (3-99)$$

En este caso, \mathbf{x} es la matriz de estado del *vector de estado*, \mathbf{A} es una matriz constante conocida como la *matriz A de Bashkow*, \mathbf{B} es un vector constante y \mathbf{y} es la *entrada vectorial*. El mayor interés se centrará en $\mathbf{x}(0)$ que es el *estado inicial* y se estudiará en el capítulo 5.

En esta sección se ha subrayado un método sistemático para escribir ecuaciones que describan una red en la forma de estado-espacio. La solución de las ecuaciones de tipo de la (3-98) es otra cuestión muy distinta. Si la solución se va a lograr por computadora, entonces la formulación estado-espacio presenta ventajas y el único requisito consiste en escribir correctamente las ecuaciones. Si la red que se va a analizar contiene uno o varios elementos que no son lineales o que varían con el tiempo, entonces se recomienda la formulación de estados-espacio y, por supuesto, la solución por métodos de computadora es la única posibilidad práctica. Si la solución se va a obtener utilizando papel y lápiz, entonces por lo general es más sencillo aplicar las fórmulas de nodos y de mallas.

BIBLIOGRAFIA

CHIRLIAN, PAUL M., *Basic Network Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969. Capítulos 3 y 7. En el capítulo 7 se estudia una interpretación gráfica de la solución de ecuaciones de estado-espacio.

CRUZ, JOSE B., Jr. y M. E. VAN VALKENBURG, *Signals in Linear Circuits*, Houghton Mifflin Company, Boston, Mass., 1974.

DESOER, CHARLES A. y ERNEST S. KUH, *Basic Circuit Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969. Capítulos 11 y 12.

GUILLEMIN, ERNST A., *Introductory Circuit Theory*, John Wiley & Sons, Inc. Nueva York, 1953. Una obra clásica.

HAYT, Jr., WILLIAM H. y JACK E. KEMMERLY, *Engineering Circuit Analysis*, 2.ª edición., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1971.

HUANG, THOMAS S. y RONALD R. PARKER, *Network Theory: An Introductory Course*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1971.

KARNI, SCHLOMO, *Intermediate Network Analysis*. Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1971. Capítulos 10 y 11.

LEON, BENJAMIN J. y PAUL A. WINTZ, *Basic Linear Networks for Electrical and Electronics Engineers*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., Nueva York, 1970.

ROHRER, RONALD A., *Circuit Theory: An Introduction to the State Variable Approach*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1970.

WARD, JOHN R. y ROBERT D. STRUM, *State Variable Analysis*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1970. Se trata de un manual de instrucción programada, en el que se hace hincapié en la resolución de las ecuaciones de estado.

EJERCICIOS PARA COMPUTADORAS DIGITALES

Este capítulo trata de muchos temas relacionados con el uso de la computadora digital. Las posibilidades elementales incluyen la multiplicación de matrices, como se describe en las referencias del apéndice E-3.2 y el método de eliminación de Gauss de las referencias del apéndice E-4.1. Véase también el análisis de las redes resistivas de escalera, tal como se describen en las referencias del apéndice E-4.2. Véase Huelsman, referencia 7 del apéndice E-10, si se desea hallar sugerencias específicas para resolver redes resistivas por el método de solución de ecuaciones simultáneas del capítulo 7 y el de solución de las ecuaciones para las redes RLC del capítulo 6. Algunas posibilidades más avanzadas incluyen la solución de ecuaciones de estado por métodos descritos en las referencias que se dan en el apéndice E-4.3 y el uso de programas de biblioteca para análisis de redes, como se dan en el apéndice E-8.4.

PROBLEMAS

- 3-1. ¿Cuál debe ser la relación entre C_{eq} y C_1 y C_2 , en (a) de la figura de las redes, si (a) y (c) son equivalentes? Repita el procedimiento para la red que aparece en (b).

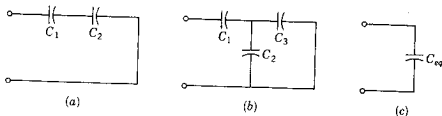


Fig. P3-1.

- 3-2. ¿Cuál debe ser la relación entre L_{eq} y L_1 , L_2 y M para que las redes de (a) y (b) equivalgan a la de (c)?

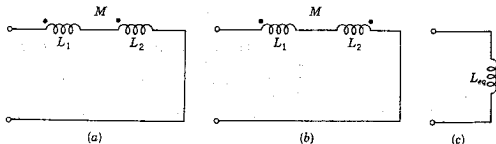


Fig. P3-2.

- 3-3. Repita el problema 3-2 para las tres redes que se muestran en la figura que sigue.

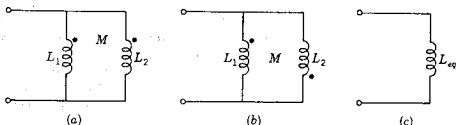


Fig. P3-3.

- 3-4. La red de inductores que se muestra en la siguiente figura está formada por un inductor de 1-H en cada arista de un cubo, en donde los inductores se conectan en los vértices del cubo, tal como se indica. Demuestre que, con respecto a los vértices a y b , la red es equivalente a la de (b) en la figura, cuando $L_{eq} = 5/6$ H. Aproveche la simetría para resolver este problema en vez de escribir las leyes de Kirchhoff.

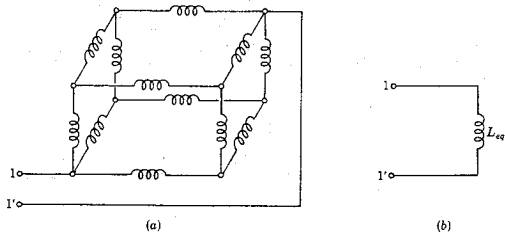


Fig. P3-4.

- 3-5. En las redes del problema 3-4, cada inductor de 1-H se substituye con un capacitor 1-F, y L_{eq} se substituye mediante C_{eq} . ¿Cuál debe ser el valor de C_{eq} para que las dos redes sean equivalentes?

- 3-6. Este problema se puede resolver utilizando las leyes de Kirchoff y las relaciones de voltaje-corriente para los elementos. En el tiempo t_0 , después de que se cierra el interruptor K , se encuentra que $v_2 = +5$ V. Se le pide que determine el valor de $i_2(t_0)$ y di_2/dt .

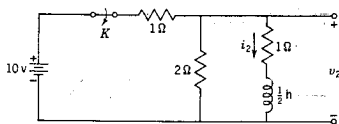


Fig. P3-6.

- 3-7. Este problema es similar a la situación del 3-6. En la red que se da en la figura se establece que $v_2(t_0) = 2$ V y $(dv_2/dt)(t_0) = -10$ V/segundo, en donde t_0 es el tiempo inmediatamente después de que se cerró el interruptor K . Determine el valor de C .

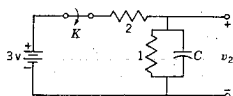
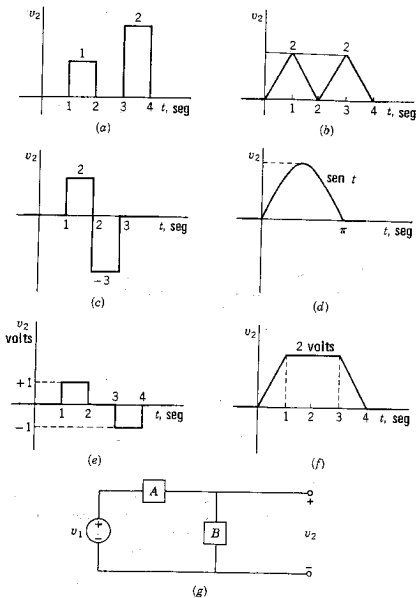


Fig. P3-7.

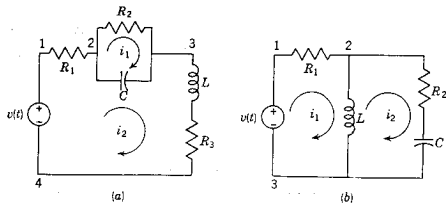
La serie de problemas que se describen en la tabla siguiente pertenece a la red de (g) de la figura, y los valores de A y B se especifican en la tabla. En A , las dos entradas en la columna implican una conexión en serie de los elementos, en tanto que en B dos entradas implican que los elementos están conectados en paralelo. En cada caso, todas las condiciones iniciales son iguales a cero. Para la forma de onda especificada para v_2 , se le pide determinar v_1 y hacer un dibujo de la forma de onda, como se puede ver en un osciloscopio de rayos catódicos. Evalúe las amplitudes y las pendientes significativas, etc.

	Red de A	Red de B	Formas de onda de v_2
3-8.	$R = 2$	$L = \frac{1}{2}$	a, b, c, d, e, f
3-9.	$C = \frac{1}{2}$	$L = 1$	a, b, c, d, e, f
3-10.	$C = \frac{1}{2}, R = 1$	$L = 2$	a, b, c, d, e, f
3-11.	$C = 1, R = \frac{1}{2}$	$L = \frac{1}{2}, R = 1$	a, b, c, d, e, f
3-12.	$R = 2$	$C = 1$	b, d, f
3-13.	$R = 1$	$R = 2, C = 1$	b, d, f
3-14.	$R = 2$	$R = 1, C = 1$	b, d, f
3-15.	$L = \frac{1}{2}$	$R = 1, C = \frac{1}{2}$	b, d, f
3-16.	$L = 1, R = 1$	$R = 1, C = \frac{1}{2}$	b, d, f



Figs. P3-8 a P3-16.

- 3-17. Por cada una de las cuatro redes que aparecen en la siguiente figura determine el número de corrientes de malla independientes y la cantidad de voltajes de nodo a nodo que se deben utilizar para escribir las ecuaciones de equilibrio, utilizando las leyes de Kirchhoff.



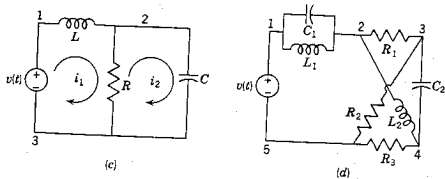


Fig. P3-17.

3-18. Repita los problemas 3-17 para cada una de las cuatro redes que se muestran en esta figura.

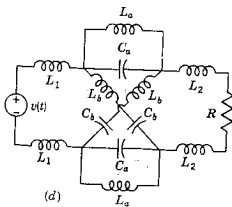
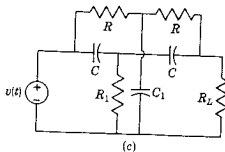
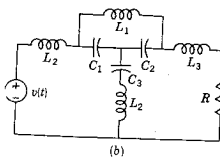
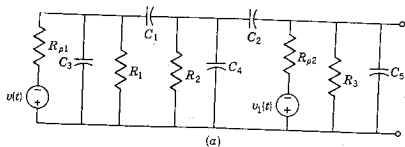


Fig. P3-18.

3-19. Demuestre la equivalencia de las redes que se ilustran en la figura 3-17 y establezca también una regla para convertir una fuente de voltaje en serie

112 Ecuaciones de redes

con un inductor en una red equivalente que contenga una fuente de corriente.

- 3-20. Demuestre que las dos redes de la figura 3-18 son equivalentes.
- 3-21. Escriba un grupo de ecuaciones, utilizando la ley de voltajes de Kirchhoff, en términos de las variables apropiadas de corrientes de malla para las cuatro redes del problema 3-17.
- 3-22. Aplique la ley de voltajes de Kirchhoff para escribir ecuaciones en base de mallas, para las cuatro redes del problema 3-18.
- 3-23. Escriba un grupo de ecuaciones de equilibrio, basándose en base de mallas, para describir la red de la figura adjunta. Observe que la red contiene una fuente controlada. Reúna los términos de su formulación, de modo que las ecuaciones tengan la forma general de la (3-47).

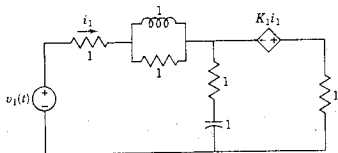


Fig. P-3-23.

- 3-24. Para la red acoplada de la figura que sigue, escriba las ecuaciones de mallas, utilizando la ley de voltajes de Kirchhoff. En su formulación, utilice las tres corrientes de circuito que están indicadas.

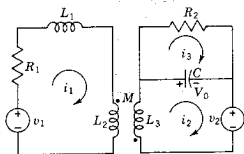


Fig. P3-24.

- 3-25. La red de la figura es la que se observa en la figura 3-30; pero se han escogido diferentes corrientes de malla. Use las corrientes que se especifican para escribir las ecuaciones de la ley de voltajes de Kirchhoff correspondientes a esta red.

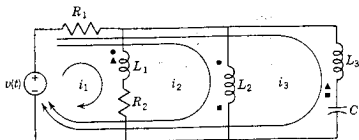


Fig. P3-25.

- 3-26. En la figura que sigue se muestra una red con acoplamiento magnético. En este caso, $M_{12} = 0$. Formule las ecuaciones de mallas para esta red, utilizando la ley de voltajes de Kirchhoff.

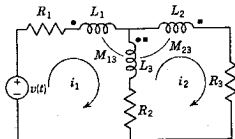
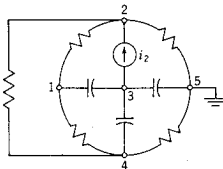


Fig. P3-26.

- 3-27. Escriba las ecuaciones de voltaje en base de mallas para la red de acoplamiento magnético de la figura P5-22, cuando K está cerrado.
- 3-28. De acuerdo con la ley de corrientes de Kirchhoff, escriba las ecuaciones en base de nodos para las cuatro redes del problema 3-17.
- 3-29. Aplique la ley de corrientes de Kirchhoff para escribir ecuaciones en base de nodos para las cuatro redes del problema 3-18.
- 3-30. Para la red que se da a continuación, escriba las ecuaciones en base de nodo, utilizando como variables los voltajes de nodo a referencia. En su formulación reúna los términos de tal suerte que las ecuaciones tengan la forma general de las expresiones (3-59).



Todos los valores de $R = \frac{1}{2}$ ohm

Todos los valores de $C = \frac{1}{2}$ farad

Fig. P3-30.

- 3-31. La red de la siguiente figura contiene una fuente de voltaje independiente y dos fuentes controladas. Use la ley de corrientes de Kirchhoff para escribir las ecuaciones en base de nodos. Reúna los términos de la formulación, para que las ecuaciones tengan la forma general de las expresiones (3-59).

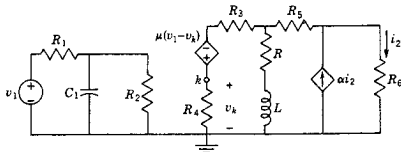


Fig. P3-31.

114 Ecuaciones de redes

- 3-32. La red de la figura siguiente es un modelo apropiado para la operación "de media banda" del amplificador de transistor MOS "conectado en cascode". Analice la red, (a) en base de mallas y (b) en base de nodos. Escriba las ecuaciones resultantes en forma de matriz, pero no las resuelva.

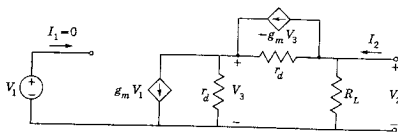


Fig. P3-32.

- 3-33. En la red de la figura siguiente, cada rama contiene una resistencia de 1 ohm y cuatro ramas contienen una fuente de voltaje de 1 V. Analice la red en base de mallas y organice las ecuaciones resultantes en una tabla, como se indica en el ejemplo 11. No resuelva las ecuaciones.

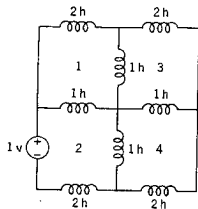


Fig. P3-34

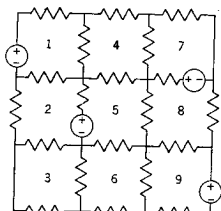


Fig. P3-33.

- 3-34. Repita el problema P3-33 para la red de la figura que sigue. Además, escriba las ecuaciones en base de nodos y acomódelas en la forma tabular del ejemplo 13.
- 3-35. En la red de la figura siguiente, $R = 2$ ohms y $R_1 = 1$ ohm. Escriba las ecuaciones, en base de (a) mallas y (b) nodos; simplifique las ecuaciones a la forma tabular que se usó en los ejemplos 11 y 13.

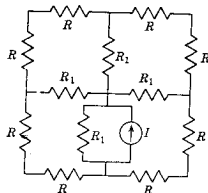


Fig. P3-35.

- 3-36. Para la siguiente red, determine el valor numérico de la corriente de rama i_1 . Todas las fuentes de la red son invariantes con el tiempo.

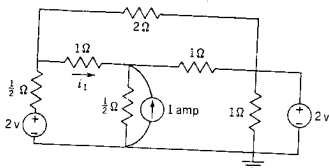


Fig. P3-36.

- 3-37. En la red de la siguiente figura, ninguna de las fuentes varía con el tiempo. Determine el valor numérico de i_2 .

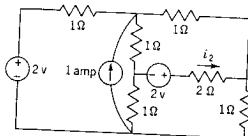


Fig. P3-37.

- 3-38. En la red que sigue, ninguna de las fuentes varía con el tiempo. Determine la corriente de rama de la resistencia de 2 ohms.

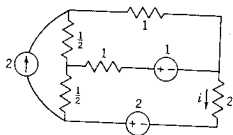


Fig. P3-38.

- 3-39. En la red de la figura siguiente, ninguna de las fuentes de voltaje y corriente varían con el tiempo, y todas las resistencias tienen el valor $R = 1/2$ ohm. Resuelva para los cuatro voltajes de nodo a referencia.

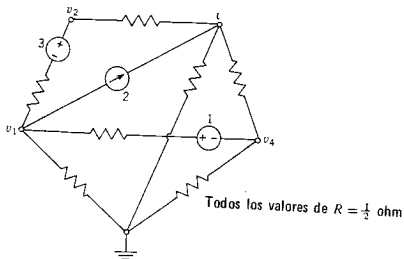


Fig. P3-39.

116 Ecuaciones de redes

- 3-40. En la red que se da, el nodo d se selecciona como el de referencia. Para los valores de elementos y fuentes especificados, determine los valores de los cuatro voltajes de nodo a referencia.

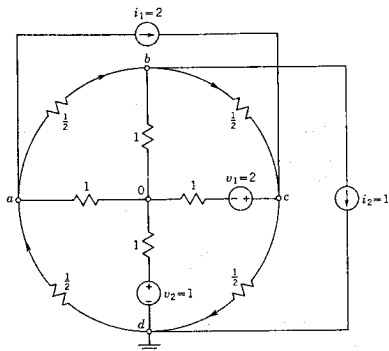


Fig. P3-40.

- 3-41. Evalúe el determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

- 3-42. Evalúe el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

- 3-43. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones para i_1 , i_2 e i_3 , usando la regla de Cramer.

$$\begin{aligned} 3i_1 - 2i_2 + 0i_3 &= 5 \\ -2i_1 + 9i_2 - 4i_3 &= 0 \\ 0i_1 - 4i_2 + 9i_3 &= 10 \end{aligned}$$

- 3-44. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones para las tres incógnitas, i_1 , i_2 e i_3 , de acuerdo con la regla de Cramer.

$$\begin{aligned}8i_1 - 3i_2 - 5i_3 &= 5 \\ -3i_1 + 7i_2 - 0i_3 &= -10 \\ -5i_1 + 0i_2 + 11i_3 &= -10\end{aligned}$$

- 3-45. Resuelva las ecuaciones del problema 3-43 usando el método de eliminación de Gauss.
3-46. Resuelva las ecuaciones del problema 3-44 utilizando el método de eliminación de Gauss.
3-47. Determine i_1 , i_2 , i_3 e i_4 , a partir del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}6i_1 - 8i_2 - 10i_3 + 12i_4 &= 8 \\ 2i_1 - 4i_2 + 5i_3 + 6i_4 &= 33 \\ -8i_1 + 20i_2 + 14i_3 - 16i_4 &= 10 \\ 5i_1 + 7i_2 + 2i_3 - 10i_4 &= -15\end{aligned}$$

- 3-48. Estudie las ecuaciones:

$$\begin{aligned}3x - y - 3z &= 1 \\ x - 3y + z &= 1 \\ 4x + 0y - 5z &= 1\end{aligned}$$

- (a) ¿Es (4, 2, 3) una solución? ¿Es (-1, -1, -1) una solución? (b) ¿Se pueden resolver estas ecuaciones por medio de determinantes? ¿Por qué?
(c) ¿A qué conclusión puede llegar en relación con las tres líneas representadas por estas ecuaciones?
- 3-49. Encuentre las redes duales para las cuatro redes del problema 3-17.
3-50. Encuentre las redes duales de las cuatro redes que se dan en el problema 3-18.
3-51. Encuentre la red dual de la red del problema 3-31.
3-52. Si existe, encuentre una red dual de la que aparece en el problema 3-40.
3-53. Analice la red del problema 3-17(c) empleando la formulación por variables de estado.
3-54. Examine la red que se muestra en el problema 3-23. Analice esta red, utilizando las variables de estado apropiadas.
3-55. Analice la red que se muestra en la figura P3-18(b) aplicando la formulación por variables de estado.
3-56. Analice la red del problema 3-30 utilizando variables de estado.
3-57. Aplique el método de variables de estado para analizar la red que se muestra en la figura P3-31.
3-58. El elemento que se representa en la red es un girador que queda descrito por las ecuaciones

$$\begin{aligned}v_1 &= R_0 i_2 \\ v_2 &= -R_0 i_1\end{aligned}$$

encuentre la red equivalente de dos elementos que se muestra en (b) de la figura que sigue.

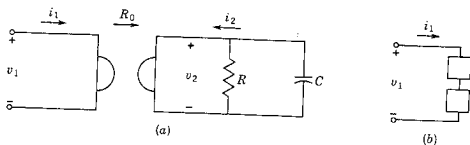


Fig. P3-58.

- 3-59. Para la red girador- RL de la figura que sigue, escriba la ecuación diferencial que relaciona a v_1 con i_1 . Encuentre una red equivalente de dos elementos, como se vio en el problema 3-49, en donde ninguno de los elementos sea un girador.

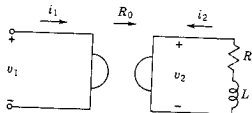


Fig. P3-59.

- 3-60. En la red de (a) de la siguiente figura, todos los valores de autoinductancia son de 1 H, y los valores de inductancia mutua son de 1/2 H. Encuentre L_{eq} , la inductancia equivalente, que se muestra en (b) de la figura.

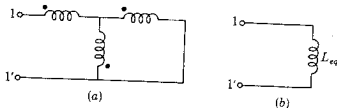


Fig. P3-60.

- 3-61. Se desea que las dos redes de la siguiente figura sean equivalentes con respecto al par de terminales indicadas. ¿Cuáles deben ser los valores de C_1 , L_2 y L_3 ?

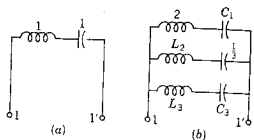


Fig. P3-61.

3-62. Se busca que las dos redes de la figura siguiente sean equivalentes con respecto a los dos pares de terminales, par de terminal 1-1' y par de terminal 2-2'. Para que exista esa equivalencia, ¿cuáles deben ser los valores de C_1 , C_2 y C_3 ?

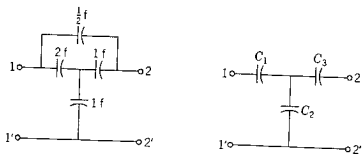
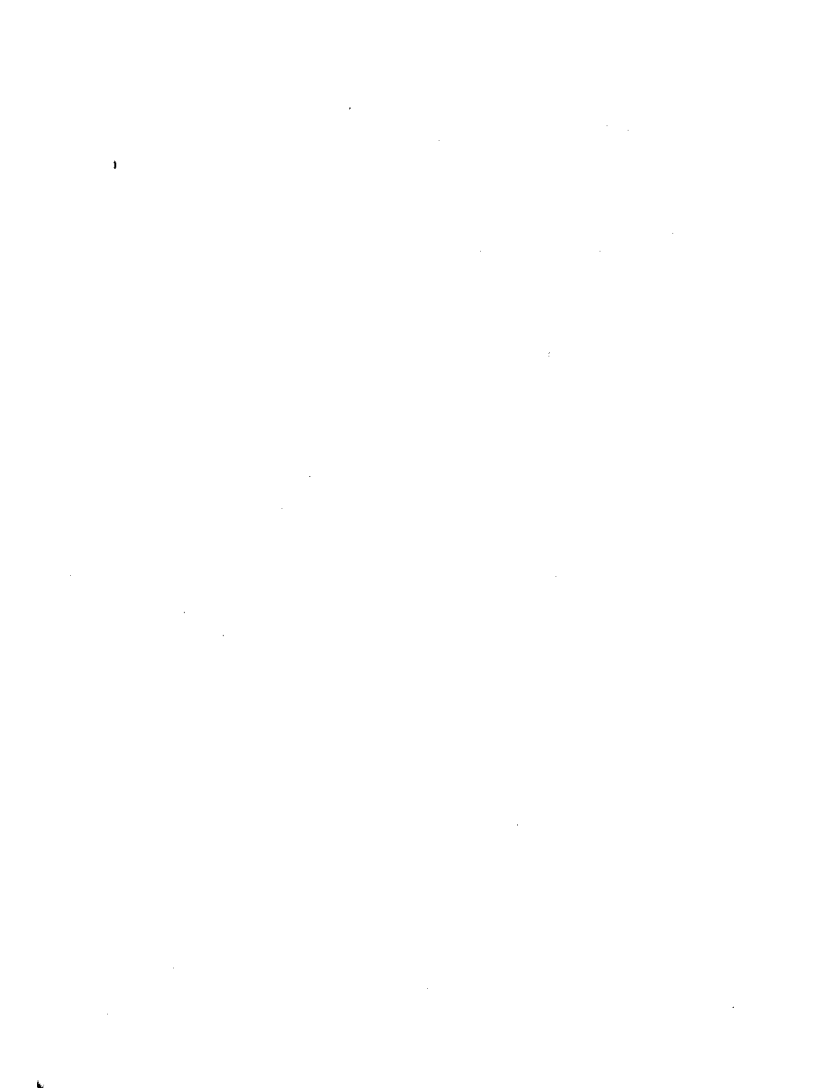


Fig. P3-62.



CAPITULO 4

4 Ecuaciones diferenciales de primer orden

4-1. SOLUCIONES GENERAL Y PARTICULAR

En este capítulo se estudiarán varias técnicas para solucionar la forma más simple de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, que describen a las redes lineales; la de primer orden se escribe

$$a_0 \frac{di(t)}{dt} + a_1 i(t) = v(t) \quad (4-1)$$

que es de la forma para $n = 1$ de las ecuaciones de n -ésimo orden

$$a_0 \frac{d^n i}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{di}{dt} + a_n i = v(t) \quad (4-2)$$

En estas ecuaciones, a_0 , a_1 y a_2, \dots son constantes; $i(t)$, la *variable dependiente*, es casi siempre una corriente, un voltaje, una carga, un flujo; t , la *variable independiente*, es el tiempo, y $v(t)$ es la *función impulsora o de fuerza* que representa una combinación lineal de fuentes de voltaje y de corriente. Con frecuencia la solución de la ecuación se denomina *respuesta* y, del mismo modo, en ocasiones $v(t)$ se llama *excitación*.

Supóngase que se tiene una red de elementos pasivos y fuentes que inicialmente se encuentra en un estado conocido con respecto a todos los voltajes y todas las corrientes. En un instante de referencia que se designa como $t = 0$, el sistema se altera en una forma que se puede representar abriendo o cerrando uno o más interruptores. El objetivo del análisis es obtener ecuaciones para la corriente, el voltaje, la carga, etcétera, en función del tiempo medido a partir del instante en que se alteró el equilibrio por medio del interruptor.

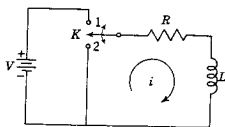


Figura 4-1. Red RL en donde el interruptor K cambia de la posición 1 a la posición 2 para el tiempo de referencia $t = 0$.

En la red que se muestra en la figura 4-1, el interruptor K se cambia de la posición 1 a la 2, para el tiempo de referencia $t = 0$.¹ Una vez que se ha operado el interruptor, la ecuación de voltajes de Kirchhoff es

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad (4-3)$$

Esta es una ecuación diferencial homogénea lineal de primer orden, con coeficientes constantes, y se puede resolver si es posible separar las variables. Esto se logrará reordenando la ecuación (4-3) en la forma

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt \quad (4-4)$$

Cuando las variables han quedado separadas, la ecuación se puede integrar para dar

$$\ln i = -\frac{R}{L} t + K \quad (4-5)$$

en donde \ln indica que el logaritmo tiene la base $e = 2.718 \dots$. Para simplificar la forma de esta ecuación, la constante K se vuelve a definir por el logaritmo de otra constante, como sigue

$$K = \ln k \quad (4-6)$$

A continuación, la ecuación (4-5) se puede expresar como

$$\ln i = \ln e^{-Rt/L} + \ln k \quad (4-7)$$

ya que, de acuerdo con la definición de logaritmo, $\ln e^x = x$, $\log_{10} 10^x = x$. De la misma forma, de acuerdo con los logaritmos, se sabe que

$$\ln y + \ln z = \ln yz \quad (4-8)$$

¹ Se supone que el interruptor es del tipo "conexión-antes de desconexión" y que la transición de la posición 1 a la 2 no produce una interrupción en la corriente i . El interruptor se marca como K (interruptor de navajas) y se reserva el símbolo S para otros usos.

de modo que la ecuación (4-7) se puede expresar como

$$\ln i = \ln (ke^{-Rt/L}) \quad (4-9)$$

Con la ecuación puesta en esta forma, se saca el antilogaritmo y se obtiene

$$i = ke^{-Rt/L} \quad (4-10)$$

Cuando se vuelve a definir la constante K como el logaritmo de otra constante, se ha simplificado la forma de la solución. La ecuación (4-10) es la respuesta o solución de la red. En esta solución no hay derivadas y se expresa la relación entre las variables dependientes e independientes. Para comprobar que se trata de la solución, se substituye la ecuación (4-10) en la (4-3).

En la forma de la ecuación (4-10) la solución se conoce como la *solución general*. Si se evalúa la constante de integración se convierte en *solución particular*. La solución general se aplica a cualquier número de situaciones y la solución particular satisface las especificaciones de un problema en particular.

Para evaluar la constante k se debe saber algo nuevo respecto al problema; por ejemplo, cualquier par de valores de i y t . En este problema particular, cuando se ha efectuado la conmutación se sabe que la corriente es la misma que antes del cambio, debido al inductor del circuito. Por tanto, cuando $t = 0$ se sabe que la corriente tiene el valor

$$i(0) = \frac{V}{R} \quad (4-11)$$

Este valor se denomina *condición inicial* del circuito o *estado cero* del inductor. Cuando se substituye esta condición en la ecuación (4-10), se obtiene

$$\frac{V}{R} = ke^0 = k \quad (4-12)$$

La solución particular de este ejemplo se convierte en

$$\begin{aligned} i &= \frac{V}{R} e^{-Rt/L}, & t \geq 0 \\ &= \frac{V}{R}, & t < 0 \end{aligned} \quad (4-13)$$

Esta ecuación se muestra en la figura 4-2, graficada para varios valores de parámetro. En (a), V y R se mantienen constantes y se permite la variación de L ; en (b), R es variable para V y L constantes. Estas curvas se conocen como exponenciales decrecientes; las ca-

características del decrecimiento se determinan sólo por medio de R y L , que son los dos parámetros de la red.

La interpretación física de este resultado comienza tomando en cuenta la energía de la red. Antes del instante de conmutación, se tiene la energía $Li^2/2$ almacenada en el inductor y la energía se disipa en el resistor, a una velocidad Ri^2 , como se determinó en el capítulo 1. Después de la conmutación, se elimina la fuente de energía y la

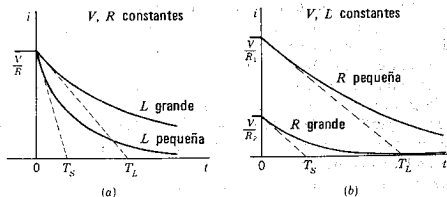


Figura 4-2. Forma exponencial decreciente de la ecuación (4-13): (a) para dos valores de L con R constante y (b) para dos valores de R con L constante.

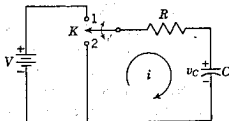
energía almacenada en el inductor se disipa por completo con el paso del tiempo, en el resistor. Puesto que la energía se disipa a una velocidad máxima en el instante inicial, después de la conmutación, la corriente disminuye con mayor rapidez en ese tiempo. La velocidad del decrecimiento la determina la relación L/R . Finalmente, toda la energía se disipa y la corriente se hace cero.

Todas esas proposiciones se ilustran mediante las curvas de la figura 4-2. En (a), la corriente disminuye con menor rapidez para un valor grande de L que para un valor pequeño de L ; en (b), la corriente disminuye con menor rapidez para un valor pequeño de R .

En la red de la figura 4-3, la acción de conmutación se produce para $t = 0$, de tal modo que el estado cero del capacitor es $v_C(0) = V$, que es el voltaje de la batería. Antes de la conmutación, la corriente tiene un valor cero. En $t = 0$, la corriente cambia bruscamente del valor cero a $-V/R$. Cuando el interruptor está cerrado, la ecuación de voltajes de Kirchoff es

$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt + Ri(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + V + Ri(t) = 0, \quad t > 0 \quad (4-14)$$

Figura 4-3. Red RC con un voltaje de capacitor $v_c = V$ en el instante en que el interruptor cambia de la posición 1 a la posición 2.



Al diferenciar esta ecuación y dividirla entre R , se encuentra que

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}i = 0 \quad (4-15)$$

Ahora, esta ecuación tiene la misma forma que las (4-3) y (4-4), y en general es la misma que la ecuación (4-10), en donde $1/RC$ substituye a R/L :

$$i = ke^{-t/RC} \quad (4-16)$$

Puesto que $i(0) = -V/R$, se observa que la solución particular para la red de la figura 4-3 es

$$\begin{aligned} i &= \frac{-V}{R} e^{-t/RC}, & t \geq 0 \\ &= 0, & t < 0 \end{aligned} \quad (4-17)$$

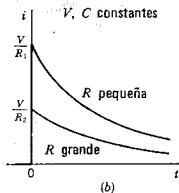
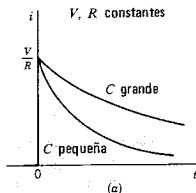


Figura 4-4. Forma de onda de la corriente que es una exponencial decreciente (a) para dos valores de C con R constante, y (b) para dos valores de R con C constante.

La explicación física de este resultado es similar a la que se dio para la red RL en serie. La energía almacenada en el capacitor es $Cv^2/2$. La carga fluye por la resistencia, desde una placa del capacitor hasta la otra, y la energía se disipa en la resistencia a una velocidad Ri^2 . La reducción en la energía almacenada debido a la disipación reduce el voltaje del capacitor y la corriente que es $i = v/R$ se reduce también y, finalmente, se hace cero. Como se indica en la figura 4-4, la velocidad de decrecimiento de la corriente se controla mediante el producto RC : mientras mayor sea el valor de RC , tanto menor será la velocidad de decrecimiento.

4.2. CONSTANTES DE TIEMPO

Las respuestas dadas por las ecuaciones (4-13) y (4-17) para $t \geq 0$ se pueden escribir en la forma general

$$\frac{i}{I_0} = e^{-t/T} \quad (4-18)$$

en donde I_0 es el valor inicial de la corriente para $t = 0$ y T es la constante de tiempo del sistema. La forma de la ecuación (4-18) es la solución de todas las ecuaciones diferenciales homogéneas de primer orden, en donde I_0 y T tienen diferentes valores para problemas distintos. El significado físico asignado a la constante de tiempo tiene una gran importancia en ingeniería eléctrica. De acuerdo con la ecuación (4-18), cuando $t = T$,

$$\frac{i(T)}{I_0} = e^{-1} \cong 0.37 \quad (4-19)$$

o bien,

$$i(T) = 0.37I_0 \quad (4-20)$$

En otras palabras, la corriente disminuye al 37 por ciento de su valor inicial en un tiempo igual a la constante de tiempo. Mediante un cálculo similar, se puede demostrar que la corriente se reduce a aproximadamente el dos por ciento de su valor inicial en un tiempo igual a cuatro constantes de tiempo. En la tabulación siguiente se dan algunos otros valores útiles de $e^{-t/T}$ para valores enteros de t/T :

t/T	i/I_0
0	1.0
1	0.37
2	0.14
3	0.05
4	0.018
5	0.0067

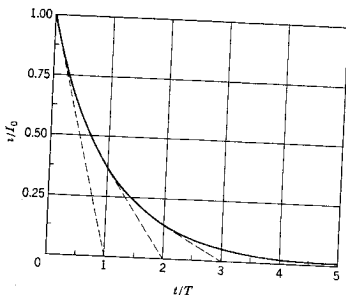


Figura 4-5. La forma normalizada de la exponencial decreciente en la que I_0 es el valor inicial de la corriente y T es la constante de tiempo.

Con esos valores se puede trazar una gráfica de i/I_0 en función de t/T , como se hace en la figura 4-5.

En la siguiente sección se verán las respuestas a una función impulsora o de excitación constante, que se puede expresar en la forma general

$$\frac{i}{I_0} = 1 - e^{-t/T} \quad (4-21)$$

Esta ecuación se muestra graficada en la figura 4-6. Obsérvese que cuando $t = T$,

$$i(T) = (1 - 0.37)I_0 = 0.63I_0 \quad (4-22)$$

lo cual significa que la corriente alcanza el 63% de su valor final en una constante de tiempo. La corriente aumenta a aproximadamente el 98% de su valor final en cuatro constantes de tiempo.

Un medio muy útil para visualizar la constante de tiempo asociada con una respuesta exponencial dada se basa en la observación de que la tangente de la ecuación $i = I_0 e^{-t/T}$ en $t = 0$ cruza la línea $i = 0$ en $t = T$. Por tanto, si la corriente disminuyera a la velocidad inicial, se reduciría a un valor cero en una constante de tiempo. Se pueden aplicar observaciones similares a la ecuación $i = I_0(1 - e^{-t/T})$ que tiene una tangente para $t = 0$ que corta la línea $i = I_0$ en $t = T$. Esas dos líneas se ilustran en las figuras 4-5 y 4-6.

La constante de tiempo es útil para comparar una respuesta con otra. No se pueden comparar tiempos en los que la respuesta desaparece (o llega a su estado permanente), ya que, por lo menos matemáti-

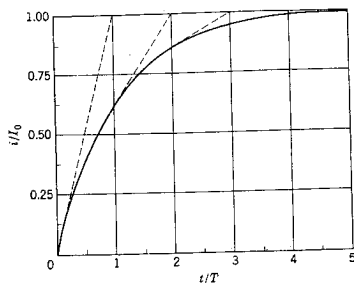


Figura 4-6. La exponencial normalizada de exponencial con saturación asignada a la ecuación (4-21), en la que I_0 es el valor final de la corriente y T la constante de tiempo.

camente, esto requiere un tiempo infinito. Sin embargo, el intervalo para que una función exponencial descienda al 37% de su valor inicial (o aumente al 63% de su valor final) se puede medir con suma facilidad y utilizarlo como estándar para comparaciones. Como ejemplo, sea un circuito RC en serie que tiene la solución general

$$i = I_0 e^{-t/RC} \quad (4-23)$$

La constante de tiempo para el circuito es $T = RC$. Supóngase que R tiene el valor de 100 ohms y C es 1000 pF; en ese caso, $T = 100 \times 1000 \times 10^{-12} = 0.1$ μ segs. No obstante, si $R = 1000 M\Omega$ y $C = 1 \mu F$, entonces $T = 1000$ seg, o 17 min. Para una combinación de R y C , la corriente se reducirá al 37% del valor inicial en el pequeño lapso de 0.1 μ segs; para el otro, la corriente necesitará aproximadamente 17 min para que se reduzca al 37% de su valor inicial.

Para registrar experimentalmente un valor transitorio, con frecuencia la precisión de la medición es del orden del 1 ó el 2%. Por esta razón, a veces se supone que dicho valor desaparece cuando llega al 2% del valor final (con la precisión con que se pueda determinar). Puesto que el tiempo para llegar al 2% del valor final (o el 98% en el caso de un exponencial creciente) es *cuatro constantes de tiempo*, a menudo se supone que el transitorio desaparece en cuatro constantes de tiempo. En algunas ocasiones se utiliza esta base para medir la constante de tiempo de un sistema.

4.3. EL FACTOR DE INTEGRACION

Sea una ecuación no homogénea, que se escribe como sigue

$$\frac{di}{dt} + Pi = Q \quad (4-24)$$

en donde P es una constante y Q puede ser una función de la variable independiente t o una constante. La ecuación no se altera si cada término se multiplica por el mismo factor. Supóngase que la ecuación (4-24) se multiplica por la cantidad e^{Pt} , que se conoce como *factor de integración*.² Se obtiene

$$e^{Pt} \frac{di}{dt} + Pie^{Pt} = Qe^{Pt} \quad (4-25)$$

Se puede reconocer que esta multiplicación por un factor "sacado de la nada" ha hecho posible resolver la ecuación (4-24), recordando la ecuación para la derivada de un producto:

$$d(xy) = x dy + y dx \quad (4-26)$$

Haciendo que $x = i$ y $y = e^{Pt}$, se tiene que

$$\frac{d}{dt}(ie^{Pt}) = e^{Pt} \frac{di}{dt} + ie^{Pt}P \quad (4-27)$$

que es el primer miembro de la ecuación (4-25); por tanto, se obtiene

$$\frac{d}{dt}(ie^{Pt}) = Qe^{Pt} \quad (4-28)$$

Esta ecuación se puede integrar para dar

$$ie^{Pt} = \int Qe^{Pt} dt + K \quad (4-29)$$

o bien³

$$i = e^{-Pt} \int Qe^{Pt} dt + Ke^{-Pt} \quad (4-30)$$

El primer término de la ecuación (4-30) se conoce como *integral particular* y la segunda se denomina *función complementaria*. Se obser-

² Si P es una función del tiempo, el factor de integración apropiado es $e^{\int P dt}$. Véase el problema 4-8.

³ Esta ecuación se puede escribir también como sigue:

$$i = e^{-Pt} \int_0^t Qe^{Pt} dt$$

La forma de la ecuación (4-30) se emplea para enfatizar la separación de la solución en dos partes.

130 Ecuaciones diferenciales de primer orden

vará que la integral particular no contiene a la constante arbitraria y que la función complementaria no depende de la función impulsora Q .

Para cualquier problema de red, P será una constante positiva, determinada por los parámetros de la red y Q será la función impulsora o bien la derivada de dicha función. En el límite, la función complementaria debe tender a cero, porque P es una constante positiva; en otras palabras,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Ke^{-Pt} = 0 \quad (4-31)$$

Por tanto, el valor de i conforme el tiempo tiende al infinito es

$$i(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-Pt} \int Qe^{Pt} dt \quad (4-32)$$

Cuando la integral particular no tiende a cero en el límite, su valor, cuando t tiende a ∞ , se denomina como su *valor de estado permanente*. Para ese caso, la integral particular no debe contener un factor exponencial de otra manera se reducirá a cero. En ingeniería eléctrica, los valores de estado permanente que se encuentran con mayor frecuencia tienen la forma

$$i = A \text{ sen } (\omega t + \phi) \quad \text{e} \quad i = \text{una constante} \quad (4-33)$$

La solución general de la ecuación (4-30) se puede escribir como la suma de las dos partes de la solución, haciendo que i_p sea la integral particular e i_c la función complementaria; en consecuencia,

$$i = i_p + i_c \quad (4-34)$$

Si i_p tiene cualquiera de las formas de la ecuación (4-33), puede escribir como un valor de estado permanente, designado como i_{ss} . Existe una convención para denominar la parte *transitoria* de la solución al término restante i_c . De acuerdo con esta convención, la respuesta se compone de dos partes separadas:

$$i = i_{ss} + i_t \quad (4-35)$$

Se puede considerar que el valor de estado permanente se ha establecido en $t = 0$ y que el transitorio debe ajustarse, matemáticamente, para dar la respuesta en $t = 0$ y todos los demás tiempos. Esta es una división arbitraria de la solución que, no obstante, se ha utilizado como ayuda conceptual. La división de la solución es solamente convencional. Dentro de una corriente, el electrón individual no tiene forma alguna de saber si se encuentra en la división transitoria o de estado permanente de la corriente.

EJEMPLO 1

Para ilustrar la porción transitoria y la de estado permanente de la solución a un problema, véase la red de la figura 4-1, en la que se cambia el interruptor de la posición 2 a la posición 1 para $t = 0$. Después de dividir entre L , la ecuación de voltajes de Kirchhoff es

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L} \quad (4-36)$$

Si se compara esta ecuación con la (4-24), se observa que

$$P = \frac{R}{L} \quad \text{y} \quad Q = \frac{V}{L} \quad (4-37)$$

La solución de esta ecuación se da en la expresión (4-30), que para este problema se convierte en

$$i = e^{-Rt/L} \int \frac{V}{L} e^{Rt/L} dt + Ke^{-Rt/L} \quad (4-38)$$

Al evaluar la integral, se obtiene

$$i = \frac{V}{R} + Ke^{-Rt/L} \quad (4-39)$$

como solución general. Si la corriente de la red que se está estudiando es cero antes de la acción conmutativa, debe serlo también inmediatamente después, debido al conductor. El requisito de que $i(0) = 0$ lleva a la solución particular

$$i = \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \quad (4-40)$$

Las divisiones de estado permanente y transitorio de esta corriente se ilustran en la figura 4-7, junto con su suma o sea la corriente real. La porción de estado permanente (V/R) se indica desde $t = 0$ y el término transitorio se ajusta de tal modo que se tiene una corriente cero para $t = 0$.

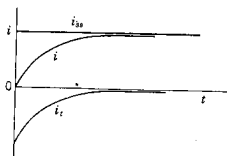


Figura 4-7. Respuesta de la red dada por la ecuación (4-40), que se puede considerar como formada por dos componentes, i_{ss} e i_t .

EJEMPLO 2

Como generalización del ejemplo 1, se observó que para el caso en que Q y P son constantes, la ecuación (4-30) se convierte en

$$i = K_1 + K_2 e^{-t/T} \quad (4-41)$$

donde K_1 y K_2 son constantes y T es la constante de tiempo. Ahora se observará que K_1 es el valor de estado permanente de i , ya que el segundo término de la ecuación (4-41) desaparece conforme t tiende a ∞ . En consecuencia, se escribe

$$K_1 = i(\infty) \quad (4-42)$$

De la misma manera, cuando $t = 0$, se observa que

$$K_1 + K_2 = i(0) \quad (4-43)$$

Si se combina esta ecuación con la (4-42), se observa que

$$K_2 = i(0) - i(\infty) \quad (4-44)$$

y la ecuación (4-41) se puede expresar como sigue

$$i = i(\infty) - [i(\infty) - i(0)]e^{-t/T} \quad (4-45)$$

para cualquier red para la que $i(\infty)$ sea definido.

Para ilustrar el uso de la ecuación (4-45), véase la red que se ilustra en la figura 4-8. Primeramente se cierra el interruptor para $t = 0$. Dado que la corriente no puede cambiar en forma instantánea, se ve que $i(0) = V/(R_1 + R_2)$, $i(\infty) = V/R_1$ y $T = L/R_1$. Al substituir estos valores en la ecuación (4-45), se obtiene

$$i = \frac{V}{R_1} \left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-R_1 t/L} \right) \quad (4-46)$$

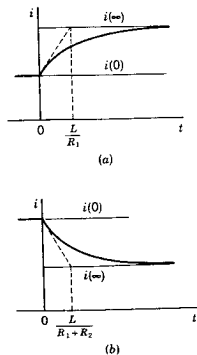


Figura 4.9. (a) La respuesta cuando el interruptor de la red de la figura 4-8 se cierra para $t = 0$ en función de $i(0)$ e $i(\infty)$. (b) La respuesta correspondiente cuando se abre el interruptor para $t = 0$.

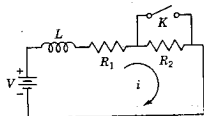


Figura 4-8. Se supone que la red se encuentra en estado permanente antes de que se abra o se cierre el interruptor K .

que aparece graficada en la figura 4-9(a). Una vez que se alcanza el estado permanente con el interruptor cerrado, se pasa a resolver un nuevo problema, que consiste en determinar la corriente, si se abre el circuito para $t = 0$, que es un nuevo tiempo de referencia. En este

caso, los valores de $i(0)$ e $i(\infty)$ se intercambian en comparación con el caso anterior. En consecuencia, se observa que $i(0) = V/R_1$, $i(\infty) = V/(R_1 + R_2)$, y $T = L/(R_1 + R_2)$. Substituyendo estos valores en la ecuación (4-45), se obtiene

$$i = \frac{V}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} e^{-(R_1 + R_2)t/L} \right) \quad (4-47)$$

que aparece graficada en la figura 4-9(b). Obsérvese que son distintas las constantes de tiempo para las dos clases de operaciones de conmutación.

4-4. REDES MAS COMPLICADAS

¿Qué otras redes se pueden describir por medio de las ecuaciones diferenciales de primer orden y tener así una respuesta descrita mediante una constante de tiempo? Hasta ahora se han tomado en cuenta sólo las combinaciones sencillas de RC y RL . Por supuesto, existen otras muchas redes dentro de esta clasificación, la mayoría de las cuales se pueden describir a través de los dos casos siguientes.

- (1) Las redes que contienen un solo inductor o un solo capacitor en combinación con cualquier número de resistores.
- (2) Las redes que se pueden simplificar empleando las condiciones de equivalencia que se vieron en el último capítulo, de tal modo que sea posible representarlas mediante un solo resistor equivalente y un simple inductor o capacitor equivalente.

Para cada uno de esos casos, la constante de tiempo de la respuesta tendrá la forma L_{eq}/R_{eq} , o bien $R_{eq} \cdot C_{eq}$, en donde el subíndice eq designa un elemento equivalente. Estas proposiciones se ilustrarán por medio de ejemplos.

EJEMPLO 3

La red que se ilustra en la figura 4-10 contiene un solo capacitor junto con cuatro resistores y, por tanto, es una red del primer tipo antes descrito, de acuerdo con esta clasificación. Se supondrá que el capacitor está descargado inicialmente. En el tiempo de referencia $t = 0$, el interruptor K se cierra. Para una simplificación algebraica, se asignan valores a los elementos como sigue: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1$ ohm y $C = 1$ F. Analizando la red, en base de nodos se obtienen las ecuaciones

$$\frac{dv_1}{dt} + 2v_1 - \frac{dv_2}{dt} = v \quad (4-48)$$

134 Ecuaciones diferenciales de primer orden

$$-\frac{dv_1}{dt} + \frac{dv_2}{dt} + 2v_2 = v \quad (4-49)$$

La solución de estas ecuaciones se verá en el capítulo 6. Las operaciones son algebraicas e incluyen el operador $D = d/dt$. Al transformar estas ecuaciones, éstas se resuelven para v_1 y v_2 en función de v , que todavía no se especifica.

$$2\frac{dv_1}{dt} + 2v_1 = \frac{dv}{dt} + v \quad (4-50)$$

y

$$2\frac{dv_2}{dt} + 2v_2 = \frac{dv}{dt} + v \quad (4-51)$$

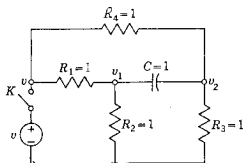


Figura 4-10. La red RC del ejemplo 3, que se puede describir con una constante de tiempo.

Cada una de estas ecuaciones se puede resolver una vez que se determine $v(t)$. Sin embargo, en estas ecuaciones se puede observar directamente que las dos respuestas tienen la misma constante de tiempo $T = 1$ seg. Esto no es una coincidencia, como se verá en el siguiente capítulo, sino que siempre se aplica a las diferentes respuestas en una red determinada. Por esta razón, se dice que la red de la figura 4-10 se describe mediante una constante de tiempo. Se puede llegar a la misma conclusión para todas las redes de la primera clasificación que contengan un solo inductor o capacitor (o un solo elemento que almacene energía) y cualquier número de resistores.

EJEMPLO 4

La red de la figura 4-11 contiene tres capacitores y dos resistores, pero se demostrará que pertenece a la segunda clasificación y, por ende, se puede describir mediante una sola constante de tiempo. La parte capacitiva de la red se reduce a un solo capacitor equivalente mediante las reglas serie y paralelo desarrolladas en el capítulo 3. La red resistiva se reduce con la ayuda de una transformación de fuentes, cambiando la fuente de corriente a una de voltaje y, luego, volviendo

a la de corriente. El voltaje de nodo a nodo de la red resultante se ilustra en la figura 4-11(c) y se describe mediante la ecuación

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{R} v = \frac{1}{2} i_0 \quad (4-52)$$

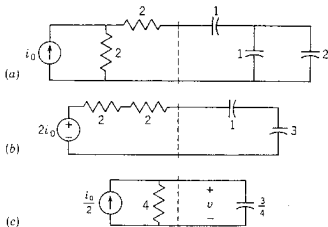


Figura 4-11. La red del ejemplo 4 que tiene una forma especial que se puede reducir a una red RC equivalente substituyendo combinaciones de elementos por medio de sus equivalentes. Los valores de los elementos se dan en ohms y farads.

y para los valores de elementos dados

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{3} v = \frac{2}{3} i_0 \quad (4-53)$$

lo cual permite ver que la constante de tiempo de la respuesta de la red es $T = 3$ segs.

BIBLIOGRAFIA

- CLOSE, CHARLES M., *The Analysis of Linear Circuits*. Harcourt, Brace & World, Nueva York, 1966. Capítulo 2.
- COX, CYRUS W. y WILLIAM L. REUTER. *Circuits, Signals, and Networks*. The Macmillan Company, Nueva York, 1969. Capítulo 4.
- CRUZ, JOSE B., Jr. y M. E. VAN VALKENBURG, *Signals in Linear Circuits*, Houghton Mifflin Company, Boston, Mass., 1974. Capítulo 5.
- HUELSMAN, LAWRENCE P., *Basic Circuit Theory with Digital Computations*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1972. Capítulo 5.
- LEON, BENJAMIN J. y PAUL A. WINTZ, *Basic Linear Networks for Electrical and Electronics Engineers*, Holt, Rinehart & Winston, Nueva York, 1970. Capítulo 2.

EJERCICIOS PARA COMPUTADORA DIGITAL

Los ejercicios relacionados con los temas de este capítulo se ocupan de la solución numérica de las ecuaciones diferenciales de primer orden en el apéndice E-6.1 y la solución del circuito serie RLC del apéndice E-6.2. En particular, véase la sección 5.2 de Huelsman, referencia 7 en el apéndice E-10.

PROBLEMAS

- 4-1. En la red de la figura que sigue, el interruptor K cambia de la posición 1 a la 2, para $t=0$, habiéndose establecido previamente una corriente de estado permanente en el circuito RL . Encuentre la solución particular para la corriente $i(t)$.

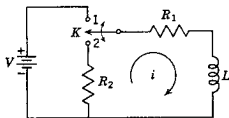


Fig. P4-1.

- 4-2. El interruptor K se mueve de la posición a a la b para $t=0$ habiendo estado en la posición a durante mucho tiempo antes de $t=0$. El capacitor C_2 está descargado para $t=0$. (a) Encuentre la solución particular para $i(t)$ cuando $t > 0$. (b) Encuentre la solución particular de $v_2(t)$ cuando $t > 0$.

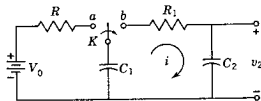


Fig. P4-2.

- 4-3. En la red indicada el voltaje inicial en C_1 es V_1 y el de C_2 es V_2 , de tal manera que $v_1(0) = V_1$ y $v_2(0) = V_2$. El interruptor K se cierra para $t=0$. (a) Determine $i(t)$ para cualquier tiempo. (b) Encuentre $v_1(t)$ para $t > 0$. (c) Encuentre $v_2(t)$ cuando $t > 0$. (d) De acuerdo con los resultados que obtenga en (b) y (c), demuestre que $v_1(\infty) = v_2(\infty)$. (e) Para los siguientes valores de los elementos, $R = 1$ ohm, $C_1 = 1$ F, $C_2 = 1/2$ F, $V_1 = 2$ V, $V_2 = 1$ V, dibuje $i(t)$ y $v_2(t)$ e identifique la constante de tiempo de cada uno.

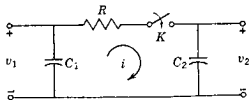


Fig. P4-3.

Problemas 137

- 4-4. En la red de la figura siguiente, el interruptor K está en la posición a durante un largo período. Para $t = 0$, el interruptor se cambia de a a b (mediante un mecanismo de "conexión-antes de desconexión"). Determine $v_2(t)$ aplicando los valores numéricos que se dan en la red. Suponga que la corriente inicial del inductor de 2-H es cero.

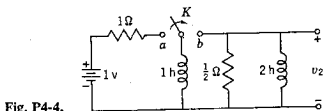


Fig. P4-4.

- 4-5. La red de la figura llega a un estado permanente cuando el interruptor K está abierto. Este interruptor se cierra para $t = 0$. Determine $i(t)$ para los valores numéricos que se dan, trace la forma de onda de la corriente y señale el valor de la constante de tiempo.

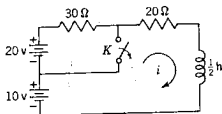


Fig. P4-5.

- 4-6. La red del problema 4-5 llega a un estado permanente en la posición 2 y en $t = 0$ el interruptor se desplaza a la posición 1. Encuentre $i(t)$ para los valores numéricos que se dan, trace la forma de onda e indique el valor de la constante de tiempo.
- 4-7. En la red de la siguiente figura, $v_1 = e^{-t}$ para $t \geq 0$ y es cero para todos los valores de $t < 0$. Si el capacitor está descargado inicialmente, encuentre $v_2(t)$. Sea $R_1 = 10$, $R_2 = 20$ y $C = 1/20$ F y para todos esos valores grafique $v_2(t)$, identificando el valor de la constante de tiempo en el dibujo.

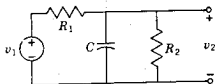


Fig. P4-7.

- 4-8. En la red que aparece a continuación, el interruptor K se cierra para $t = 0$, conectando una fuente e^{-t} a la red de RC. Cuando $t = 0$, se observa que el voltaje del capacitor tiene el valor $v_C(0) = 0.5$ V. Para los valores de elementos que se dan, determine $v_2(t)$.

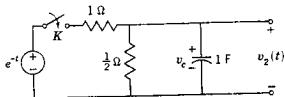


Fig. P4-8.

138 Ecuaciones diferenciales de primer orden

- 4-9. En la red que sigue, $V_0 = 3$ V, $R_1 = 10$ ohms, $R_2 = 5$ ohms y $L = 1/2$ H. La red alcanza el estado permanente y, en $t = 0$, se cierra el interruptor K . Encuentre $v_a(t)$ para $t \geq 0$.

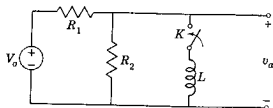


Fig. P4-9.

- 4-10. La red de la figura que sigue se compone de una fuente de corriente de un valor I_0 (una constante), dos resistores y un capacitor. El interruptor K se abre para $t = 0$. Para los valores de elemento que se dan en la figura, encuentre $v_2(t)$ para $t \geq 0$.

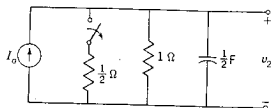


Fig. P4-10.

- 4.11. Se desea multiplicar la ecuación diferencial

$$\frac{di}{dt} + P(t)i = Q(t)$$

por un "factor de integración" R , de tal modo que el lado izquierdo de la ecuación sea igual a la derivada $d(Ri)/dt$. (a) Demuestre que el factor de integración necesario es $R = e^{\int P dt}$. (b) Utilizando este factor de integración, encuentre la solución de la ecuación diferencial que corresponda a la ecuación (4-30).

- 4.12. En la red que se muestra en la siguiente figura, el interruptor K está cerrado en $t = 0$, habiéndose obtenido previamente el estado permanente. Encuentre la corriente del circuito en función del tiempo.

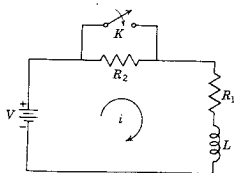


Fig. P4-12.

- 4-13. En la red que se muestra a continuación, la fuente de voltaje obedece a la ley $v(t) = Ve^{-\alpha t}$, en donde α es una constante. El interruptor se cierra para $t = 0$. (a) Determine la corriente, suponiendo que $\alpha \neq R/L$. (b) Encuentre la corriente cuando $\alpha = R/L$.

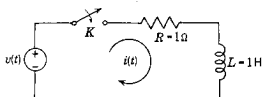


Fig. P4-13.

- 4-14. En la red que se muestra en la figura P4-13, $v(t) = 0$ para $t < 0$, y $v(t) = t$, para $t \geq 0$. Demuestre que $i(t) = t - 1 + e^{-t}$ para $t \geq 0$ y grafique esta forma de onda.
- 4-15. En la red que se muestra en seguida, el interruptor se cierra para $t = 0$, conectando una fuente de voltaje $v(t) = V \text{ sen } \omega t$ a un circuito RL en serie. Para este sistema, determine la respuesta $i(t)$.

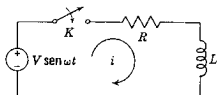


Fig. P4-15.

- 4-16. Estudie la ecuación diferencial

$$\frac{di}{dt} + ai = f_k(t)$$

en donde a es real y positivo. Encuentre una solución general de esta ecuación si todos los valores de $f_k = 0$ para $t < 0$ y para $t \geq 0$ tienen los siguientes valores:

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| (a) $f_1 = k_1 t$ | (e) $f_5 = \text{sen}^2 t$ |
| (b) $f_2 = t e^{-2t}$ | (f) $f_6 = \cos^2 t$ |
| (c) $f_3 = \text{sen } \omega_0 t$ | (g) $f_7 = t \text{ sen } 2t$ |
| (d) $f_4 = \cos \omega_0 t$ | (h) $f_8 = e^{-t} \text{ sen } 2t$ |

- 4-17. En la red de la siguiente figura, el interruptor K está abierto y la red alcanza su estado permanente. El interruptor K se cierra para $t = 0$. Encuentre la corriente en el inductor para $t > 0$, dibuje esta corriente e identifique la constante de tiempo.

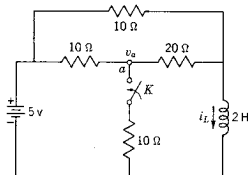


Fig. P4-17.

140 Ecuaciones diferenciales de primer orden

- 4-18. Repita el problema 4-13 determinando el voltaje en el nodo a , $v_a(t)$ para $t > 0$.
- 4-19. La red de la figura se encuentra en el estado permanente, con el interruptor K abierto. Este interruptor se cierra para $t = 0$. Encuentre la corriente del capacitor para $t > 0$, trace esta forma de onda y determine la constante de tiempo.

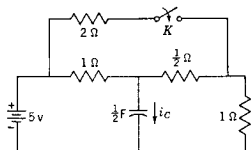


Fig. P4-19.

- 4-20. En la siguiente red, el interruptor K se cierra para $t = 0$. La forma de onda de la corriente se observa con un osciloscopio de rayos catódicos. Después de medirla, se encuentra que el valor inicial de la corriente es de 0.01 amp. Parece ser que la porción transitoria desaparece en 0.1 seg. Encuentre (a) el valor de R , (b) el valor de C y (c) la ecuación de $i(t)$.

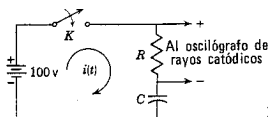


Fig. P4-20.

- 4-21. El circuito que se ilustra a continuación se compone de un resistor y de un relevador con una inductancia L . El relevador se ajusta de tal modo que opera cuando la corriente que pasa por la bobina es 0.008 amp. El interruptor K se cierra para $t = 0$ y se observa que el relevador opera cuando $t = 0.1$ seg. Encuentre: (a) la inductancia L de la bobina, (b) la ecuación de $i(t)$, evaluando todos los términos.

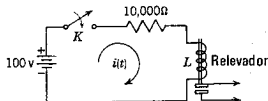


Fig. P4-21.

- 4-22. Un interruptor se cierra para $t = 0$, conectando una batería de voltaje V con un circuito RC en serie. (a) Determine la relación de la energía transmitida al capacitor y la energía total proporcionada por la fuente, en función del tiempo. (b) Demuestre que esta relación se acerca a 0.50 conforme $t \rightarrow \infty$.
- 4-23. Sea la función exponencialmente decreciente $i = Ke^{-t/T}$, en donde T es la constante de tiempo. Haga que la tangente trazada a partir de la curva en $t = t_1$ corte la línea $i = 0$ en t_2 . Demuestre que para cualquier punto de este tipo, $t_2 - t_1 = T$.

CAPITULO 5

5 *Condiciones iniciales en las redes*

5-1. ¿POR QUE SE ESTUDIAN LAS CONDICIONES INICIALES?

Existen muchas razones para este estudio de las condiciones iniciales (y finales). En este punto la más importante es que las condiciones iniciales (o finales) se deben conocer para evaluar las constantes arbitrarias que se presentan en la solución general de las ecuaciones diferenciales. Entre las ventajas que se obtienen mediante la buena comprensión de todo esto se incluyen el conocimiento del comportamiento de los elementos en el instante de la conmutación, que es indispensable para comprender los circuitos no lineales en condiciones de conmutación y el conocimiento del valor inicial de una o más derivadas de una respuesta, lo cual es útil para prever la forma de dicha respuesta y, por tanto, tener una comprobación de la solución. Por último, el estudio de las condiciones iniciales es un medio útil para conocer los elementos, ya sea en forma individual o en combinación, lo cual es esencial en el análisis de redes.

Véase por ejemplo la primera proposición. En el capítulo 4 se encontró que la solución general de una ecuación diferencial de primer orden tenía una incógnita designada como constante arbitraria. Para ecuaciones diferenciales de orden más alto, el número de constantes arbitrarias será igual al orden de la ecuación. Si las constantes arbitrarias desconocidas se van a evaluar para soluciones particulares, es necesario conocer otros datos de la red además de los que se describen en la ecuación diferencial. Se debe formar un conjunto de ecuaciones simultáneas, una de las cuales sea la solución general, con ecuaciones adicionales para totalizar el número de las incógnitas. Las ecuaciones adicionales se dan de manera conveniente como valores del voltaje, la

corriente, la carga, etc., o como derivadas de estas cantidades en el instante en que se altera el equilibrio de la red mediante una acción de conmutación. Las condiciones que existen en este instante se denominan *condiciones iniciales* o *estado inicial*. En algunas ocasiones se pueden utilizar las condiciones para $t = \infty$, que se denominan *condiciones finales*.

El alumno que ya ha estudiado las ecuaciones diferenciales desde el punto de vista matemático puede pensar que las condiciones iniciales siempre se dan en alguna forma, de preferencia con un valor cero. Por supuesto, esto permite concentrarse en la solución del problema, pero se desvía de un problema que puede ser más difícil que encontrar la solución general. Al matemático le es posible suponer condiciones iniciales; por el contrario, el ingeniero debe determinarlas correctamente para resolver los problemas.

En este punto es necesario presentar una notación para distinguir dos estados de una red. En el tiempo de referencia $t = 0$, operan uno o más interruptores; se supone que éstos actúan en un tiempo nulo. Para establecer una diferencia entre el tiempo que está inmediatamente antes e inmediatamente después de la operación del interruptor se utilizarán los signos $-$ y $+$. Por tanto, las condiciones que existen un poco antes de operar el conmutador se designarán como $i(0-)$, $v(0-)$, etcétera. las condiciones posteriores se designarán como $i(0+)$, $v(0+)$.

Las condiciones iniciales de una red dependen de lo que haya pasado antes de que $t = 0-$ y la estructura de la misma en $t = 0+$, después de la conmutación. Lo que haya pasado se manifestará en la forma que tengan los voltajes que haya en capacitores y las corrientes que fluyen en inductores. Los detalles de este proceso no tienen importancia, y lo único que se debe conocer son los valores en el instante de referencia $t = 0-$. Una vez realizada la conmutación en $t = 0+$, pueden aparecer nuevas corrientes y nuevos voltajes en la red como resultado de los voltajes iniciales en capacitores, corrientes iniciales en inductores o debido a la naturaleza de las fuentes de corriente y voltaje que se introducen. La evaluación de todos los voltajes y todas las corrientes, así como de sus derivadas para $t = 0+$, constituye la evaluación de las condiciones iniciales.

5-2. CONDICIONES INICIALES EN LOS ELEMENTOS

El resistor. En el resistor ideal, la corriente y el voltaje están relacionadas de acuerdo con la ley de Ohm, $v = Ri$. Si a una red resistiva se le aplica un voltaje escalón de entrada, como el que se ilustra en la figura 5-1, la corriente tendrá la misma forma de onda modificada sólo por el factor de escala $(1/R)$. La corriente que pasa por un resistor cambiará en forma instantánea si el voltaje cambia instantánea-

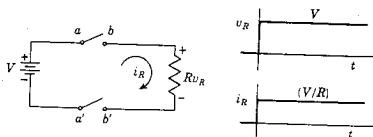


Figura 5-1. Relación corriente-voltaje de un resistor: v_R e i_R son siempre proporcionales.

mente. Del mismo modo, el voltaje cambiará de un modo instantáneo si la corriente cambia instantáneamente.

El inductor. En la sección 1-5 se llegó a la conclusión de que la corriente no puede cambiar instantáneamente en un sistema de inductancia constante. Por tanto, el cierre de un interruptor para conectar un inductor a una fuente de energía no hará que fluya una corriente en el instante inicial, y el inductor actuará como si fuera un *circuito abierto*, independientemente del voltaje en las terminales. Si fluye una corriente con un valor I_0 en el inductor en el instante en que se produce la conmutación, esa corriente seguirá fluyendo. Durante el instante inicial se puede considerar que el inductor es una fuente de corriente de I_0 amp.

El capacitor. En la sección 1-4 se demostró que el voltaje no puede cambiar instantáneamente en un sistema de capacitancia fija. Si se conecta un capacitor descargado a una fuente de energía, fluirá una corriente de manera instantánea y el capacitor se podrá considerar como equivalente a un *corto circuito*. Esto se infiere debido a que el voltaje y la carga son proporcionales en un sistema capacitivo, $v = q/C$, de tal manera que carga cero corresponde a voltaje cero (es decir, a un corto circuito). Con una carga inicial en el sistema, el capacitor equivale a una fuente de voltaje con un valor $V_0 = q_0/C$, en donde q_0 es la carga inicial. Estas conclusiones se resumen en la figura 5-2.

Se puede formular una gráfica similar a la de la figura 5-2 para las condiciones finales de las redes, en donde (1) toda la excitación la proporcionan fuentes de salida constante, fuentes que se reducen a cero para valores grandes de t (por ejemplo e^{-t} , $e^{-t} \text{ sen } t$, etc.) o voltajes iniciales de capacitor y corrientes iniciales de inductor, y (2) redes en las que el valor final de los voltajes y las corrientes sea una constante. Este segundo requisito elimina las redes LC sin resistencia, para las cuales, como se verá en el siguiente capítulo, la condición final de los voltajes y las corrientes puede ser de oscilación permanente.

144 Condiciones iniciales en las redes

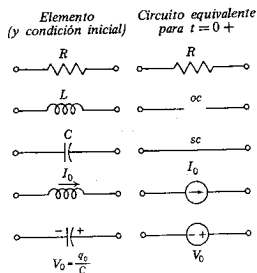


Figura 5-2. Forma equivalente de los elementos en función de la condición inicial de éstos.

Las redes equivalentes para condiciones finales se deducen a partir de las relaciones básicas

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} \quad \text{y} \quad i_C = C \frac{dv_C}{dt} \quad (5-1)$$

y de acuerdo con la observación de que las derivadas tienen un valor cero cuando la cantidad en el estado permanente es una constante. Estos resultados se ilustran en la figura 5-3.

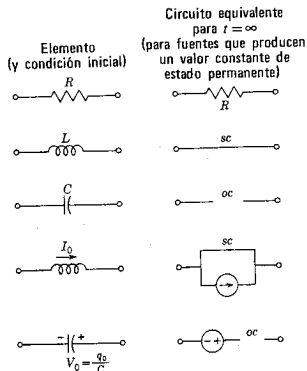


Figura 5-3. Forma equivalente de los elementos de acuerdo con la condición final del elemento.

Hay dos casos especiales que constituyen excepciones a las reglas que se acaban de dar y que requieren un estudio más detallado. El primer caso especial se ilustrará de acuerdo con la red de la figura 5-4. Supóngase que los capacitores están inicialmente descargados y que para $t = 0$ se cierra el interruptor K . Cuando están descargados, los capacitores actúan como corto circuito en el instante inicial, de tal manera que la fuente de voltaje queda en corto circuito al cerrar el interruptor. Ahora bien, un corto circuito de una fuente de voltaje produce una corriente infinita, lo cual significa que se tiene que resolver una situación no usual. La carga transferida al capacitor es

$$q = \int_{0^-}^{0^+} i(t) dt \quad (5-2)$$

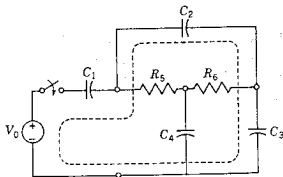


Figura 5-4. Ilustración del caso especial en que se tiene en la red una malla compuesta de capacitores.

y aunque la corriente es infinita, la carga transferida q es finita y tiene un valor tal que se satisface la ley de voltajes de Kirchhoff

$$V_0 = v_{c_1}(0^+) + v_{c_2}(0^+) + v_{c_3}(0^+) \quad (5-3)$$

o bien,

$$V_0 = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} \quad (5-4)$$

en donde $q_1 = q_2 = q_3$ porque la corriente que pasa por los tres capacitores es la misma. El voltaje que se aplica a cada uno de los capacitores se puede encontrar despejando y resolviendo q en la ecuación (5-4), y luego determinando el voltaje

$$v_{c_1}(0^+) = \frac{q}{C_1} \quad (5-5)$$

Por tanto, el cuadro de los fenómenos que se producen al cerrar el interruptor es que fluye una corriente infinita en los capacitores dentro del intervalo comprendido entre $t = 0^-$ y $t = 0^+$, depositando la

suficiente carga en los capacitores de tal modo que cada uno tenga un voltaje inicial en $t = 0+$ y se satisfaga la ley de voltajes de Kirchhoff. En el capítulo 8 se estudiará esta corriente y ahí se le denominará *impulso* de corriente.

Se puede aplicar el mismo tipo de análisis a uno o más de los capacitores de un circuito que tengan un voltaje inicial antes de cerrar el interruptor. El voltaje final de cada capacitor será independiente del valor inicial y se determinará como se explicó para el caso en que está descargado. Entonces se llega a la conclusión de que en ambos casos el voltaje de un capacitor *cambia* instantáneamente, aunque se requiere una corriente infinita de una duración muy breve para iniciar este cambio instantáneo.

Obsérvese que si el capacitor C_1 se substituye por una resistencia R_1 , la dificultad que se acaba de describir se evita debido a que la corriente no se puede hacer infinita. La corriente inicial del circuito estará limitada por R_1 y tendrá el valor $i_{R_1}(0+) = V_a/R_1$, en donde V_a es la suma algebraica del voltaje de la batería y de los voltajes iniciales de los capacitores. En consecuencia, aparecerá instantáneamente un voltaje en R_1 y tendrá un valor tal que se satisfará la ley de voltajes de Kirchhoff.

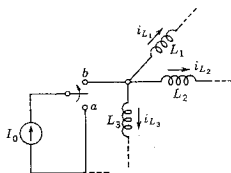


Figura 5-5. Ilustración del caso especial en que un nodo tiene sólo inductores conectados a él.

Esta situación dual se ilustra en la figura 5-5. Antes del instante en que se cambia el interruptor de a a b , la ley de corrientes de Kirchhoff requiere que

$$i_{L_3}(0-) + i_{L_1}(0-) + i_{L_2}(0-) = 0 \quad (5-6)$$

Cuando la fuente de corriente está conectada a la red en $t = 0$, también se debe satisfacer la ley de corrientes de Kirchhoff, lo cual significa que

$$i_{L_3}(0+) + i_{L_1}(0+) + i_{L_2}(0+) = I_0 \quad (5-7)$$

Es evidente que las corrientes deben cambiar de $t = 0-$ a $t = 0+$ para que se satisfagan las dos ecuaciones. El mecanismo por el que se

Interpretación geométrica de las derivadas 147

logra esto consiste en que se genera un voltaje infinito mediante la acción de conmutación y este voltaje infinito produce un flujo finito

$$\psi = \int_{0-}^{0+} v(t) dt \quad (5-8)$$

que es suficiente para que se satisfaga la ecuación (5-7). Entonces, cada corriente cambia instantáneamente de su valor anterior al nuevo valor determinado por las ecuaciones de la forma

$$i_L(0+) = \frac{\psi}{L_1} \quad (5-9)$$

que es la expresión dual de la ecuación (5-5). Al igual que en el caso anterior, se evitará un *impulso* de voltaje si se tiene una resistencia conectada en paralelo con la fuente de corriente, y sin el voltaje infinito se evita el cambio instantáneo en la corriente del inductor.

5-3. INTERPRETACION GEOMETRICA DE LAS DERIVADAS

Sea la ecuación diferencial que describe a un circuito RL conectado a una fuente de voltaje constante:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V \quad (5-10)$$

Esta ecuación se puede poner en la forma

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(V - iR) \quad (5-11)$$

para demostrar la relación que debe existir entre la corriente y la derivada de tiempo de la corriente. Si el conmutador que conecta a la fuente de voltaje con el circuito se cierra para $t = 0$, la corriente del sistema en $t = 0$ debe ser cero. De acuerdo con la ecuación (5-11), el valor inicial de la derivada es

$$\frac{di}{dt}(0+) = \frac{V}{L} \quad (5-12)$$

Ahora, la cantidad di/dt es la pendiente de la gráfica de la corriente que se requiere en función del tiempo. La ecuación (5-12) indica que esta pendiente es positiva y tiene una magnitud V/L . Para algún pequeño intervalo esta pendiente se debe aproximar a la curva real que se encuentra resolviendo la ecuación (5-10). Supóngase que la corriente aumenta linealmente a una velocidad V/L , hasta un nuevo valor i_1 en el tiempo t_1 . En este punto se puede hacer una segunda aproximación de la curva de la corriente en función del tiempo aplicando la ecuación (5-11) como

$$\frac{di}{dt}(t_1) = \frac{1}{L}(V - i_1R) \quad (5-13)$$

La continuación de este proceso, que se ilustra en la figura 5-6, proporciona una interpretación gráfica de la solución de una ecuación diferencial. Mientras más pequeños sean los intervalos de tiempo que se escojan, tanto más semejante será la curva aproximada a la curva real.

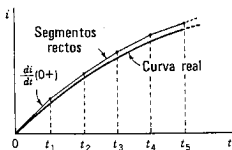


Figura 5-6. La aproximación de $i(t)$ obtenida por medio de segmentos rectos, en donde los dos primeros están descritos por las ecuaciones (5-12) y (5-13).

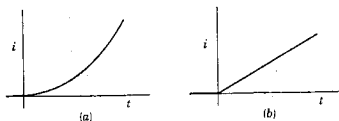
Así como la primera derivada representa la pendiente, la segunda representa la curvatura o la velocidad de cambio de la pendiente con el tiempo. De acuerdo con la ecuación (5-11), que es general y se aplica para todos los tiempos después de $t=0$, se obtiene una expresión general para la segunda derivada

$$\frac{d^2i}{dt^2} = -\frac{R}{L} \frac{di}{dt} \quad (5-14)$$

Al substituir la ecuación (5-12) en esta ecuación, se determina el valor de la segunda derivada en $t=0+$

$$\frac{d^2i}{dt^2}(0+) = -\frac{VR}{L^2} \quad (5-15)$$

que es negativo. Por tanto, la curvatura inicial de la respuesta $i(t)$ es negativa, lo cual significa que la curva es cóncava hacia abajo como se observa en la figura 5-6. En la figura 5-7 se muestran varias combinaciones de las condiciones iniciales con la interpretación correspondiente en términos de la pendiente inicial y la curvatura.



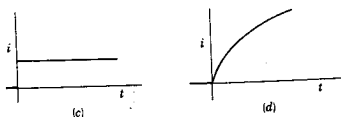


Figura 5-7. Formas de respuesta que ilustran condiciones típicas: (a) $i(0+) = 0$, $di/dt(0+) = 0$, y $d^2i/dt^2(0+) = K > 0$; (b) $i(0+) = 0$, $di/dt(0+) = K > 0$, y $d^2i/dt^2(0+) = 0$; (c) $i(0+) = K > 0$, $di/dt(0+) = 0$, $d^2i/dt^2(0+) = 0$; (d) $i(0+) = 0$, $di/dt(0+) = K_1 > 0$, $d^2i/dt^2(0+) = K_2 < 0$.

5-4. PROCEDIMIENTO PARA EVALUAR LAS CONDICIONES INICIALES

No existe un procedimiento único que se deba seguir para resolver las condiciones iniciales. Esto se asemeja a un juego de ajedrez porque la estrategia que se seleccione dependerá del problema particular que se estudie. Sin embargo, el procedimiento que se definirá de los ejemplos es que por lo general se resuelven primero los valores iniciales de las variables —corrientes, voltajes, cargas— y a continuación se resuelven los correspondientes a las derivadas. El primer paso es rutinario y se puede lograr trazando un circuito equivalente para $t = 0+$, con base en las representaciones equivalentes de los elementos que se dan en la figura 5-2. Al resolver los valores iniciales de las derivadas, los detalles y el orden del procedimiento serán diferentes para cada red distinta. Además, no es obvio cuál es el procedimiento adecuado, lo cual constituye un hecho que añade interés y presenta un reto para solucionar los problemas de los valores iniciales.

Los valores iniciales de corriente o voltaje se pueden encontrar en forma directa a partir de un estudio del diagrama esquemático de la red. Para cada elemento de la red se debe determinar justamente lo que sucederá cuando se efectúe la acción de conmutación. De acuerdo con este análisis, se elabora un nuevo diagrama esquemático de una red equivalente para $t = 0+$ de conformidad con las siguientes reglas:

- (1) Se substituyen todos los inductores por circuitos abiertos o por generadores de corriente que tengan el valor de la corriente que fluye en $t = 0+$.
- (2) Se substituyen todos los capacitores con corto circuitos o con fuentes de voltaje con un valor $V_0 = q_0/C$ si se tiene una carga inicial.
- (3) Las resistencias se dejan en la red sin cambio alguno.

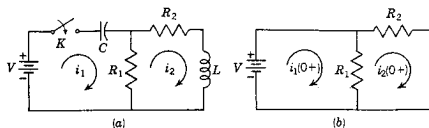


Figura 5-8. Red que se usa para ilustrar la determinación de las condiciones iniciales: (a) la red de dos mallas y (b) la red equivalente para $t = 0+$.

Sea la red de dos mallas que se muestra en la figura 5-8(a). Supóngase que el interruptor se cierra para $t = 0$, sin que se haya aplicado un voltaje a la red pasiva antes de dicho instante. Puesto que no existe un voltaje inicial en el capacitor, se puede substituir por un corto circuito; del mismo modo, el inductor se puede reemplazar por un circuito abierto, por no haber ningún valor inicial de corriente. La red equivalente resultante se ilustra en (b) de la misma figura. En este caso particular no es necesario escribir las ecuaciones para la red de resistencia. Por inspección se observa que los valores iniciales de las corrientes son $i_1(0+) = V/R_1$ e $i_2(0+) = 0$, debido a que la segunda malla está abierta.

El primer paso para encontrar los valores iniciales de las derivadas consiste en escribir las ecuaciones integrodiferenciales de las leyes de Kirchhoff en base de mallas o de nodos que proporcione de un modo más directo las cantidades que se requieren. De acuerdo con la red de la figura 5-8(a), las ecuaciones de voltajes de Kirchhoff son:

$$\frac{1}{C} \int i_1 dt + R_1(i_1 - i_2) = V \quad (5-16)$$

$$R_1(i_2 - i_1) + R_2 i_2 + L \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (5-17)$$

Puesto que estas ecuaciones rigen en general, también lo hacen para $t = 0+$. Ahora se conocen los valores de i_1 e i_2 para $t = 0+$. Así también, el término $(1/C) \int_{-\infty}^{0+} i_1 dt$ tiene un valor conocido, ya que este término es el voltaje que se aplica al capacitor; se sabe que dicho voltaje es cero debido a que el capacitor actúa como un corto circuito. [En la base de nodos, $(1/L) \int_{-\infty}^{0+} v dt$ representa en forma similar la corriente que pasa por el inductor para $t = 0+$.]

Se observa que la ecuación (5-17) contiene un término de derivada además de los que incluyen sólo a i_1 e i_2 , que se conocen para $t = 0+$. Resolviendo algebraicamente para (di_2/dt) se obtiene

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{1}{L} [R_1 i_1 - (R_1 + R_2) i_2] \quad (\text{general}) \quad (5-18)$$

$$\frac{di_2}{dt}(0+) = \frac{1}{L} \left[R_1 \frac{V}{R_1} - (R_1 + R_2) 0 \right] = \frac{V}{L} \quad (t = 0+) \quad (5-19)$$

La precaución de elaborar ecuaciones como (general) o $(t = 0+)$ sugiere como una seguridad contra la posibilidad de derivar ecuaciones que se apliquen sólo para $t = 0+$.

Las ecuaciones (5-16) y (5-17) carecen de un término (di_1/dt) . No obstante, si se deriva y transforma algebraicamente la ecuación (5-16), que tiene una aplicación general, se obtienen los resultados

$$\frac{i_1}{C} + R_1 \frac{di_1}{dt} - R_1 \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (\text{general}) \quad (5-20)$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} - \frac{i_1}{R_1 C} \quad (\text{general}) \quad (5-21)$$

Para $t = 0+$, se conocen tanto di_2/dt como i_1 de tal modo que (di_1/dt) se puede evaluar como

$$\frac{di_1}{dt}(0+) = \frac{V}{L} - \frac{V}{R_1^2 C} \quad (t = 0+) \quad (5-22)$$

Supóngase que es necesario evaluar (d^2i_2/dt^2) para $t = 0+$. Desde un punto de vista práctico, las derivadas de segundo orden y superiores se requieren con menos frecuencia que la primera derivada para resolver ecuaciones diferenciales. Sin embargo, el procedimiento de la derivación continua y las operaciones algebraicas se pueden aplicar para estimar todas las derivadas. La derivación de la ecuación (5-18) da

$$\frac{d^2i_2}{dt^2} = \frac{1}{L} \left[R_1 \frac{di_1}{dt} - (R_1 + R_2) \frac{di_2}{dt} \right] \quad (\text{general}) \quad (5-23)$$

$$\frac{d^2i_2}{dt^2}(0+) = -V \left(\frac{1}{R_1 LC} + \frac{R_2}{L^2} \right) \quad (t = 0+) \quad (5-24)$$

En cada caso, las condiciones iniciales se expresan en función de las constantes (los parámetros de la red y de fuentes impulsoras); las soluciones a los problemas no se deben dar como expresiones integrales o derivadas.

EJEMPLO 1

En el circuito que se muestra en la figura 5-9, $V = 10 \text{ V}$, $R = 10 \mu\text{F}$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 10 \mu\text{F}$ y $v_C(0) = 0$. Se supondrá que se desea encontrar $i(0+)$, $di/dt(0+)$ y $d^2i/dt^2(0+)$. De acuerdo con la ley de voltajes de Kirchhoff,

$$V = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt \quad (\text{general}) \quad (5-25)$$

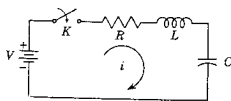


Figura 5-9. Red RLC del ejemplo 1.

Analizando el circuito en función de los valores de elementos equivalentes para $t = 0$, se muestra que, debido al circuito abierto,

$$i(0+) = 0 \quad (t = 0+) \quad (5-26)$$

El último término de la ecuación (5-25), $(1/C) \int i dt$, representa el voltaje que se aplica al capacitor, que es cero cuando $t = 0$. Cuando $t = 0+$, la expresión general de la ecuación (5-25) se transforma en:

$$V = L \frac{di}{dt}(0+) + R0 + 0 \quad (t = 0+) \quad (5-27)$$

de acuerdo con lo cual

$$\frac{di}{dt}(0+) = \frac{V}{L} = 10 \frac{\text{amp}}{\text{seg}} \quad (t = 0+) \quad (5-28)$$

Para encontrar la segunda derivada, la ecuación (5-25) se debe derivar

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0 \quad (\text{general}) \quad (5-29)$$

En la ecuación (5-29), los valores para el segundo y tercer términos se conocen para $t = 0+$; por consiguiente,

$$\frac{d^2i}{dt^2}(0+) = -\frac{R}{L} \frac{di}{dt}(0+) = -100 \frac{\text{amp}}{\text{seg}^2} \quad (5-30)$$

EJEMPLO 2

En la red que se ilustra en la figura 5-10 se llega a un estado permanente cuando el interruptor K está *abierto* y éste se *cierra* para $t = 0$. Supóngase que se desea encontrar el valor inicial de las tres corrientes de malla. Primero se deben determinar las diferentes corrientes y los voltajes de la red para $t = 0-$, antes de cerrar el interruptor. La corriente que pasa por R_2 , R_1 y L es

$$i_{R_1}(0-) = i_L(0-) = \frac{V}{R_1 + R_2} \quad (t = 0-) \quad (5-31)$$

El voltaje total de los capacitores será el mismo que el que se aplica a R_1 ; es decir,

$$V_{C_1} + V_{C_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V \quad (5-32)$$

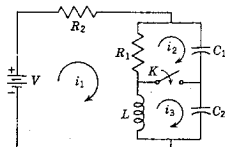


Figura 5-10. Red del ejemplo 2.

Puesto que las cargas de los capacitores deben ser iguales cuando se conectan en serie, se tiene que $q_1 = q_2$ o bien, $C_1 V_{C_1} = C_2 V_{C_2}$. Por tanto, el voltaje de los capacitores se dividirá en tal forma que

$$\frac{V_{C_1}}{V_{C_2}} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_1}{D_2} \quad (\text{general}) \quad (5-33)$$

en donde $D_1 = 1/C_1$ y $D_2 = 1/C_2$, de tal modo que

$$V_{C_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left[\frac{D_1}{D_1 + D_2} \right] V; \quad V_{C_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left[\frac{D_2}{D_1 + D_2} \right] V \quad (5-34)$$

Para encontrar i_1 en $t = 0+$ se aplica la ley de voltajes de Kirchhoff a lo largo de la malla exterior (que no aparece en el diagrama). Recorriendo esta malla, se escribe

$$i_1 R_2 = V - V_{C_1} - V_{C_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V \quad (5-35)$$

de manera que

$$i_1(0+) = \frac{V}{R_1 + R_2} \quad (t = 0+) \quad (5-36)$$

Ahora bien,

$$i_1(0+) - i_3(0+) = i_L(0+) = \frac{V}{R_1 + R_2} \quad (t = 0+) \quad (5-37)$$

puesto que la corriente i_L no puede cambiar instantáneamente. Al comparar estas dos últimas ecuaciones, se observa que

$$i_3(0+) = 0 \quad (5-38)$$

A continuación se considerará la corriente que fluye por la resistencia R_1 . En vista de que el voltaje que se aplica al capacitor no cambia instantáneamente,

$$i_1(0+) - i_2(0+) = \frac{V_{C_1}}{R_1} \quad (5-39)$$

o bien,

$$i_2(0+) = i_1(0+) - \frac{V_{C_1}}{R_1} \quad (5-40)$$

de tal modo que

$$i_2(0+) = \frac{V}{R_1 + R_2} - \frac{D_1}{D_1 + D_2} \frac{V}{R_1 + R_2} \quad (5-41)$$

Finalmente,

$$i_2(0+) = \frac{V}{R_1 + R_2} \frac{D_2}{D_1 + D_2} \quad (5-42)$$

Y esto completa la solución del problema

5-5. ESTADO INICIAL DE UNA RED

En el estudio que se hizo del método de análisis de la variable de estado en la sección 3-9 se utilizaron los voltajes en capacitores y las corrientes en inductores como variables de estado. Aún no se han estudiado aquí técnicas para la solución de las ecuaciones de estado; pero en esa solución se encuentra que las condiciones iniciales requeridas son los valores de las variables de estado para $t=0$ (o en el tiempo inicial más general $t=t_0$). Tales condiciones iniciales se conocen como *estado inicial*, el cual se designa en la notación de matriz vectorial como

$$x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} v_{C_1}(0) \\ v_{C_2}(0) \\ \vdots \\ i_{L_1}(0) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5-43)$$

Si todas las condiciones iniciales tienen un valor cero, entonces se dice que la red está en *estado cero* y la solución para estas condiciones iniciales se conoce como *respuesta de estado cero*.

Se observa que las técnicas que se desarrollaron en la sección 5-2 se pueden aplicar a la determinación del estado inicial. Es más, puesto que los voltajes en capacitores y las corrientes en inductores no pueden cambiar en un tiempo nulo (en ausencia de impulsos), se puede designar el tiempo como $0-$, 0 , o bien $0+$, aunque $t=0-$ es la elección más lógica.

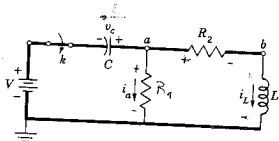


Figura 5-11. La red de la figura 5-8 dibujada de nuevo para mostrar el árbol (líneas gruesas) que se usa en el análisis por variables de estado.

Una diferencia interesante entre la solución de la ecuación de estado y la solución de las ecuaciones escritas en base de mallas o de nodos es que la formulación con variables de estado no requiere conocer el valor inicial de las derivadas de las variables. Sin embargo, si esta información es necesaria, se puede obtener fácilmente a partir de las ecuaciones de estado, como se demostrará mediante un ejemplo. Véase la figura 5-8 que se utilizó como primer ejemplo en la sección 5-4. En la figura 5-11 aparece de nuevo esta red dibujada de modo distinto para subrayar la elección de un árbol en el análisis por variables de estado. En el nodo a se escribe

$$C \frac{dv_C}{dt} = -i_L - i_a \quad (5-44)$$

En esta ecuación, i_a no es una variable de estado, pero se puede reemplazar escribiendo la ecuación de malla que se forma al considerar la cuerda que contiene a R_1 . En este caso,

$$i_a R_1 - V - v_C = 0 \quad (5-45)$$

y la ecuación (5-44) se convierte en

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{R_1 C} v_C - \frac{1}{L} i_L - \frac{V}{R_1 C} \quad (5-46)$$

La segunda ecuación se escribe alrededor de la malla que se define al considerar la cuerda que contiene a L . Después de dividir entre L , se tiene que

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v_C - \frac{R_2}{L} i_L + \frac{V}{L} \quad (5-47)$$

Ahora las ecuaciones (5-46) y (5-47) son del tipo general que se aplica en todos los momentos después de $t=0$, incluyendo $t=0+$. Puesto que la red está en estado cero en el momento en que se cierra K , se observa que

$$\frac{di_L}{dt}(0+) = \frac{V}{L} \quad \text{y} \quad \frac{dv_C}{dt}(0+) = -\frac{V}{R_1 C} \quad (5-48)$$

Si se requieren las segundas derivadas de las variables de estado, se pueden derivar las ecuaciones (5-46) y (5-47) y substituir los valores que se dan en la ecuación (5-48) en las ecuaciones resultantes.

BIBLIOGRAFIA

- BRENNER, EGON y MANSOUR JAVID, *Analysis of Electric Circuits*, 2.^a ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1959. En el capítulo 5 se abordan los temas de este capítulo. En la sección 5-7 se describe un método que permite construir las ecuaciones de estado si se conocen las condiciones iniciales de la red.
- CHIRLIAN, PAUL M., *Basic Network Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969. Capítulo 7.
- CLOSE, CHARLES M., *The Analysis of Linear Circuits*, Harcourt, Brace & World, Inc., Nueva York, 1969. Sección 4.2.
- HUELSMAN, LAWRENCE P., *Basic Circuit Theory with Digital Computations*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1972. Capítulos 5 y 6.

EJERCICIOS PARA COMPUTADORA DIGITAL

La determinación de las condiciones iniciales en redes, como parte del análisis de las redes, se logra mediante el análisis ordinario combinado con el conocimiento del comportamiento de los elementos de la red para el instante específico del tiempo $t=0$. Con frecuencia este tipo de análisis es muy sutil y no es particularmente apropiado al análisis en computadora. Se sugiere que el tiempo disponible se utilice en completar los ejercicios adicionales sugeridos al final del capítulo 3.

PROBLEMAS

- 5-1. En la red de la figura que sigue, el interruptor K se cierra para $t=0$ con el capacitor sin carga alguna. Encuentre los valores para i , di/dt y d^2i/dt^2 para $t=0+$, para los siguientes valores de elementos: $V=100$ V, $R=1000$ Ω , y $C=1$ μ F.

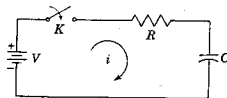


Fig. P5-1.

- 5-2. En la red de la siguiente figura, K se cierra para $t=0$ con una corriente cero en el inductor. Determine los valores de i , di/dt y d^2i/dt^2 en $t=0+$, si $R=10$ Ω , $L=1$ H y $V=100$ V.

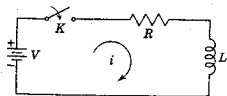


Fig. P5-2.

Problemas 157

- 5-3. En la siguiente red, K se cambia de la posición a a b para $t=0$. Resuelva para i , di/dt y d^2i/dt^2 para $t=0+$ si $R=1000\ \Omega$, $L=1\ \text{H}$, $C=0.1\ \mu\text{F}$ y $V=100\ \text{V}$.

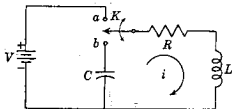


Fig. P5-3.

- 5-4. Para la red y las condiciones de estado que se indican en el problema 4-3, determine los valores de dv_1/dt y dv_2/dt para $t=0+$.
- 5-5. Para la red que se describe en el problema 4-7, determine los valores de d^2v_2/dt^2 y d^3v_2/dt^3 para $t=0+$.
- 5-6. La red que se muestra a continuación está en estado permanente cuando el interruptor K está cerrado. El interruptor se abre para $t=0$. Determine el voltaje en el interruptor, v_K y dv_K/dt para $t=0+$.

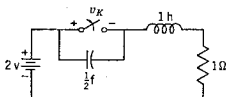


Fig. P5-6.

- 5-7. En la siguiente red el interruptor K se abre para $t=0$. En $t=0+$, encuentre los valores de v , dv/dt y d^2v/dt^2 si $I=10\ \text{amp}$, $R=1000\ \Omega$, y $C=1\ \mu\text{F}$.

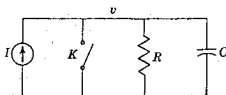


Fig. P5-7.

- 5-8. En la red que aparece en la figura siguiente el interruptor K se abre para $t=0$. Resuelva para v , dv/dt y d^2v/dt^2 para $t=0+$, si $I=1\ \text{amp}$, $R=100\ \Omega$ y $L=1\ \text{H}$.

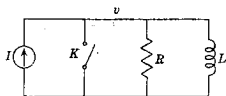


Fig. P5-8.

- 5-9. En la red que se ilustra a continuación se llega al estado permanente con el interruptor K abierto. Para $t=0$ se cierra el interruptor. Para los valores de elementos que se dan, determine el valor de $v_a(0^-)$ y $v_a(0^+)$.

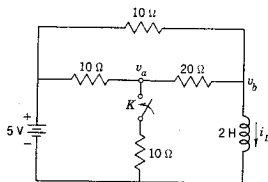


Fig. P5-9.

- 5-10. En la siguiente figura se muestra una red en la que se llega al estado permanente con el interruptor K abierto. Este se cierra para $t=0$.

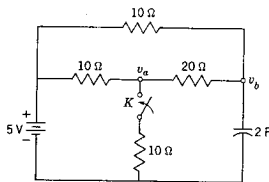


Fig. P5-10.

- Para los valores de elementos que se dan, determine los de $v_a(0^-)$ y $v_a(0^+)$.
- 5-11. En la red de la figura P5-9, determine $i_L(0^+)$ e $i_L(\infty)$ para las condiciones que se indican en el problema 5-9.
- 5-12. En la red que aparece en la figura P5-10 determine $v_b(0^+)$ y $v_b(\infty)$ para las condiciones que se indican en el problema 5-10.
- 5-13. En la red que sigue el interruptor K se cierra para $t=0$ teniendo un voltaje en el capacitor igual a cero y una corriente en el inductor también de cero. Resuelva para (a) v_1 y v_2 en $t=0^+$, (b) v_1 y v_2 en $t=\infty$, (c) dv_1/dt y dv_2/dt en $t=0^+$, (d) d^2v_2/dt^2 , cuando $t=0^+$.

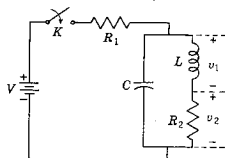


Fig. P5-13.

- 5-14. La red del problema 5-13 llega al estado permanente con el interruptor K cerrado. En un nuevo tiempo de referencia, $t=0$, se abre el interruptor K . Resuelva para las cantidades que se especifican en las cuatro partes del problema 5-13.
- 5-15. El interruptor K de la red que sigue se cierra para $t=0$ conectando la batería a una red no energizada. (a) Determine i , di/dt y d^2i/dt^2 para $t=0+$. (b) Encuentre v_1 , dv_1/dt y d^2v_1/dt^2 para $t=0+$.

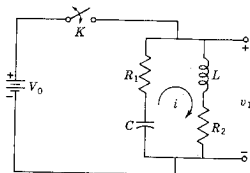


Fig. P5-15.

- 5-16. La red del problema 5-15 llega al estado permanente en las condiciones que en él se especifican. En un nuevo tiempo de referencia, $t=0$, se abre el interruptor K . Determine las cantidades que se especifican en el problema 5-15 para $t=0+$.
- 5-17. En la red de la figura que sigue, el interruptor K se cambia de la posición a a la b para $t=0$ (establecido el estado permanente en la posición a). Demuestre que cuando $t=0+$,

$$i_1 = i_2 = -\frac{V}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad i_3 = 0$$

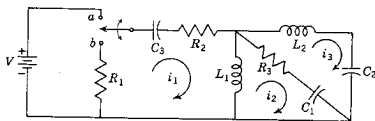


Fig. P5-17.

- 5-18. En la red que aparece a continuación, el capacitor C_1 se carga a un voltaje V_0 y el interruptor K se cierra para $t=0$. Cuando $R_1 = 2 \text{ M}\Omega$, $V_0 = 1000 \text{ V}$, $R_2 = 1 \text{ M}\Omega$, $C_1 = 10 \mu\text{F}$ y $C_2 = 20 \mu\text{F}$, determine d^2i_2/dt^2 para $t=0+$.

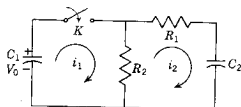


Fig. P5-18.

- 5-19. En el circuito que se muestra en la figura siguiente, el interruptor K se cierra para $t = 0$, conectando un voltaje de $V_0 \text{ sen } \omega t$, al circuito RL - RC en paralelo. Encuentre (a) di_1/dt y (b) di_2/dt para $t = 0^+$.

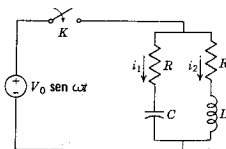


Fig. P5-19.

- 5-20. En la red de la figura que sigue se alcanza el estado permanente con el interruptor K abierto siendo $V = 100 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 20 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ y $C = 1 \mu\text{F}$. En el tiempo $t = 0$, se cierra el interruptor. (a) Escriba las ecuaciones integrodiferenciales para la red después de que se cierra el circuito. (b) ¿Cuál es el voltaje V_0 a través de C antes de

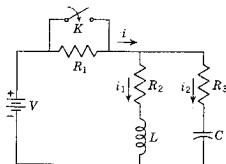


Fig. P5-20

- que se cierre el interruptor? ¿Cuál es su polaridad? (c) Determine el valor inicial de i_1 e i_2 ($t = 0^+$). (d) Encuentre los valores de di_1/dt y di_2/dt en $t = 0^+$. (e) ¿Cuál es el valor de di_1/dt para $t = \infty$?
- 5-21. La red que aparece en la siguiente figura tiene dos pares de nodos independientes. Si el interruptor K se abre para $t = 0$, encuentre las siguientes cantidades en $t = 0^+$: (a) v_1 , (b) v_2 , (c) dv_1/dt , (d) dv_2/dt .

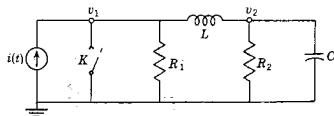


Fig. P5-21.

- 5-22. En la red que se ilustra en la siguiente figura, el interruptor K se cierra en el instante en que $t=0$, conectando un sistema no energizado a una fuente de voltaje. Sea $M_{12} = 0$. Demuestre que si $v(0) = V$, entonces:

$$\frac{di_1}{dt}(0+) = \frac{V(L_2 + L_3 + 2M_{23})}{(L_1 + L_3 + 2M_{13})(L_2 + L_3 + 2M_{23}) - (L_3 + M_{13} + M_{23})^2}$$

$$\frac{di_2}{dt}(0+) = \frac{V(L_3 + M_{13} + M_{23})}{(L_1 + L_3 + 2M_{13})(L_2 + L_3 + 2M_{23}) - (L_3 + M_{13} + M_{23})^2}$$

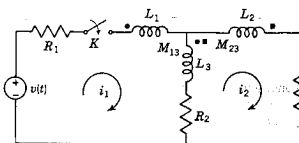


Fig. P5-22.

- 5-23. Para la red de la siguiente figura, demuestre que si K se cierra para $t=0$.

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2}(0+) = -\frac{1}{R_1} \left\{ \frac{-1}{R_1 C} \left[\frac{v(0)}{R_1 C} - \frac{dv(0)}{dt} \right] - \frac{d^2 v}{dt^2}(0) \right\}$$

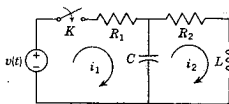


Fig. P5-23.

- 5-24. La siguiente red se compone de dos bobinas acopladas y un capacitor. Para $t=0$ se cierra el interruptor K conectando un generador de voltaje, $v(t) = V \sin(t\sqrt{MC})$. Demuestre que

$$v_a(0+) = 0, \quad \frac{dv_a}{dt}(0+) = (V/L)\sqrt{M/C}, \quad \text{y} \quad \frac{d^2 v_a}{dt^2}(0+) = 0$$

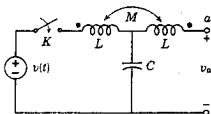


Fig. P5-24.

162 Condiciones iniciales en las redes

- 5-25. En la red que aparece a continuación se abre el interruptor K para $t=0$ cuando la red alcanza el estado permanente con el interruptor cerrado. (a) Encuentre una expresión para el voltaje a través del interruptor en $t=0+$. (b) Si los parámetros están ajustados de tal manera que $i(0+)=1$ y $di/dt(0+)=-1$, ¿cuál es el valor de la derivada del voltaje a través del interruptor, $dv_K/dt(0+)$?

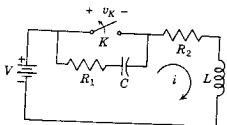


Fig. P5-25.

- 5-26. En la red que se muestra en la siguiente figura el interruptor K se cierra para $t=0$ conectando la batería con un sistema no energizado. (a) Encuentre el voltaje v_a en $t=0+$. (b) Determine el voltaje a través del capacitor C_1 para $t=\infty$.

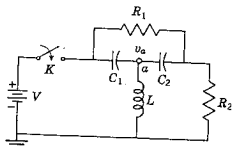


Fig. P5-26.

- 5-27. En la red de la figura que sigue el interruptor K se cierra cuando $t=0$. En $t=0-$, todos los voltajes en capacitores y las corrientes en inductores son cero. Los tres voltajes de nodo a referencia se identifican como v_1 , v_2 y v_3 . (a) Encuentre v_1 y dv_1/dt para $t=0+$. (b) Determine v_2 y dv_2/dt para $t=0+$. (c) Encuentre v_3 y dv_3/dt para $t=0+$.

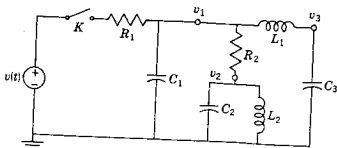


Fig. P5-27.

- 5-28. En la red de la siguiente figura se llega al estado permanente y para $t = 0$ se abre el interruptor K . (a) Determine el voltaje a través del interruptor v_K , para $t = 0 +$. (b) Determine dv_K/dt para $t = 0 +$.

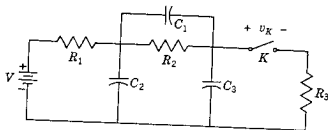


Fig. P5-28.

- 5-29. En la red de la figura que sigue se llega al estado permanente con el interruptor K cerrado y con $i = I_0$ una constante. Para $t = 0$ se abre el interruptor K . Determine: (a) $v_2(0 -)$, (b) $v_2(0 +)$ y (c) $(dv_2/dt)(0 +)$.

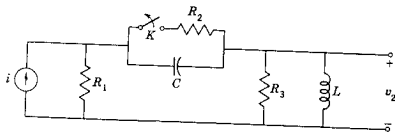
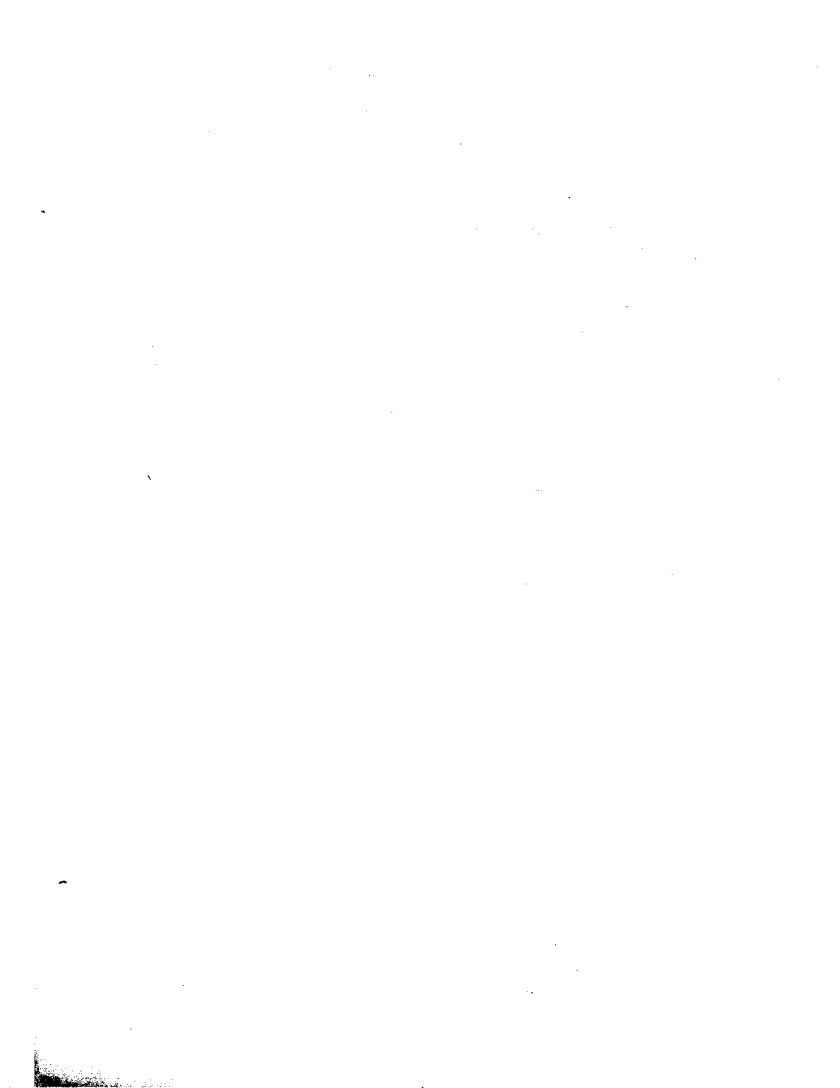


Fig. P5-29.



CAPITULO 6

6 Ecuaciones diferenciales, continuación

Las ecuaciones diferenciales que se vieron en el capítulo 4 se limitaron a las ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes. En el presente se continuará el estudio de las ecuaciones diferenciales con las mismas restricciones en lo que respecta a la linealidad y a los coeficientes constantes, pero de un orden más alto. Los procedimientos que se dan en ambos capítulos se incluyen bajo el encabezado del método *clásico* de solución. Como se verá, el método clásico permite una mejor comprensión de la interpretación de las ecuaciones diferenciales y los requisitos de una solución. Además de las ventajas conceptuales, el método en que se utiliza la transformación de Laplace es más apropiado para las metas de esta obra. Por esta razón, se reservan para el siguiente capítulo los temas que normalmente se tratan utilizando el método clásico pero que se desarrollan con mayor facilidad con la ayuda de la transformación de Laplace.

6-1. ECUACION DE SEGUNDO ORDEN: EXCITACION INTERNA

Una ecuación diferencial homogénea de segundo orden con coeficientes constantes se puede expresar en la forma general:

$$a_0 \frac{d^2i}{dt^2} + a_1 \frac{di}{dt} + a_2 i = 0 \quad (6-1)$$

La solución de esta ecuación diferencial debe ser de tal forma que la solución misma, su primera derivada y su segunda derivada —cada una multiplicada por un coeficiente constante— sumen cero. Para satisfacer este requisito, los tres términos deben ser de la misma forma, diferenciándose sólo en los coeficientes. ¿Existe una función de esta naturaleza? De acuerdo con cualquier método que se busque, quizá tratando funciones posibles la búsqueda lleva siempre a la exponencial¹

$$i(t) = ke^{st} \quad (6-2)$$

en donde k y s son constantes que pueden ser reales, imaginarias o complejas. Al substituir la solución exponencial en la ecuación (6-1) se obtiene

$$a_0 s^2 ke^{st} + a_1 s ke^{st} + a_2 ke^{st} = 0 \quad (6-3)$$

o bien, puesto que ke^{st} no puede ser nunca cero para una t finita, se tiene

$$a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0 \quad (6-4)$$

como requisito para que ke^{st} sea la solución. Esta expresión se conoce como *ecuación característica* (o *auxiliar*). Esta se satisface con las dos raíces dadas por la fórmula cuadrática

$$s_1, s_2 = \frac{-a_1}{2a_0} \pm \frac{1}{2a_0} \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2} \quad (6-5)$$

Ello indica que existen dos formas de la solución exponencial ke^{st} que son

$$i_1 = k_1 e^{s_1 t} \quad \text{e} \quad i_2 = k_2 e^{s_2 t} \quad (6-6)$$

Ahora bien, si i_1 e i_2 son soluciones de la ecuación diferencial de la expresión (6-1), la suma de estas soluciones,

$$i_3 = i_1 + i_2 \quad (6-7)$$

es también una solución. Esto se demuestra mediante la substitución directa de la ecuación (6-7) en la (6-1), lo que da

$$a_0 \frac{d^2}{dt^2}(i_1 + i_2) + a_1 \frac{d}{dt}(i_1 + i_2) + a_2(i_1 + i_2) = 0 \quad (6-8)$$

$$\left(a_0 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + a_1 \frac{d i_1}{dt} + a_2 i_1 \right) + \left(a_0 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + a_1 \frac{d i_2}{dt} + a_2 i_2 \right) = 0 \quad (6-9)$$

¹ Tomando dos a la vez, el seno y el coseno o bien el seno y el coseno hiperbólicos satisfacen este requisito; sin embargo, se demostrará que la solución exponencial simplifica estas formas.

Ecuación de segundo orden: excitación interna 167

o bien $0 + 0 = 0$. Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$i(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} \quad (6-10)$$

La magnitud de los coeficientes de la ecuación (6-1) determina la forma de las raíces de la ecuación característica. En la ecuación (6-5) el radical $\pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}$ puede ser real, cero o imaginario, dependiendo del valor de a_1^2 comparado con $4a_0 a_2$. Las formas de las soluciones de estos tres casos se darán en tres ejemplos sencillos.

EJEMPLO 1

De acuerdo con la ley de Kirchhoff la ecuación diferencial de la corriente del circuito de la figura 6-1 es

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = V \quad (6-11)$$

Al derivar y usar los valores numéricos para R , L y C que se indican en la figura 6, se obtiene

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 3 \frac{di}{dt} + 2i = 0 \quad (6-12)$$

La ecuación característica se encuentra substituyendo la solución de prueba $i = e^{st}$ o, lo que es lo mismo, substituyendo s^2 en lugar de $(d^2 i/dt^2)$ y s en lugar de (di/dt) , de donde resulta

$$s^2 + 3s + 2 = 0 \quad (6-13)$$

Esta ecuación tiene las raíces $s_1 = -1$ y $s_2 = -2$, de tal modo que la solución general es

$$i(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} \quad (6-14)$$

Conociendo las condiciones iniciales las constantes arbitrarias k_1 y k_2 se pueden evaluar para un problema específico. Si el interruptor K se cierra para $t = 0$, entonces $i(0+) = 0$, porque la corriente no puede cambiar instantáneamente en el inductor. En la ecuación (6-11) el segundo y tercer términos de voltaje son cero en el momento de conmutación, siendo $Ri(0+)$ cero, porque $i(0+) = \text{cero}$ y $(1/C) \int_{-\infty}^{0+} i dt$ es cero, ya que es el voltaje inicial del capacitor; en consecuencia,

$$\frac{di}{dt}(0+) = \frac{V}{L} = 1 \quad \text{amp/seg}$$

Las dos condiciones iniciales incluidas en la solución general, la ecuación (6-14), dan las ecuaciones

$$k_1 + k_2 = 0, \quad -k_1 - 2k_2 = 1 \quad (6-15)$$

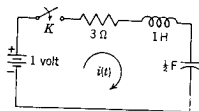


Figura 6-1. Red para los ejemplos 1 y 3.

La solución de estas ecuaciones es $k_1 = +1$ y $k_2 = -1$; de ahí que la solución particular de la ecuación (6-12) sea

$$i(t) = e^{-t} - e^{-2t} \quad (6-16)$$

En la figura 6-2 muestra una gráfica de cada una de las partes y su combinación. Como se vio en el capítulo 4, se puede considerar que la corriente total consta de dos componentes que existen desde $t = 0$ y se combinan en tal forma que satisfaga las condiciones iniciales.

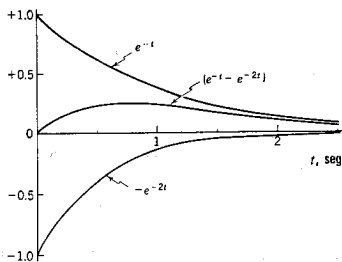


Figura 6-2. Respuesta descrita por la ecuación (6-16), incluyendo las dos partes componentes que se suman para dar la respuesta.

EJEMPLO 2

La ecuación de equilibrio para la red que se ilustra en la figura 6-3, formulada en base de nodos, es

$$C \frac{dv}{dt} + Gv + \frac{1}{L} \int v dt = I \quad (6-17)$$

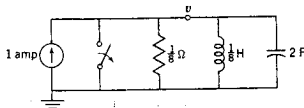


Figura 6-3. Red del ejemplo 2 en que el interruptor se abre para $t = 0$.

o bien, derivando,

$$C \frac{d^2v}{dt^2} + G \frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} = 0 \quad (6-18)$$

Al substituir los valores numéricos en esta ecuación, como se indica en la figura 6-3, se obtiene

$$2 \frac{d^2v}{dt^2} = 8 \frac{dv}{dt} + 8v = 0 \quad (6-19)$$

La ecuación característica correspondiente es

$$2s^2 + 8s + 8 = 0 \quad (6-20)$$

que tiene como raíces $s_1 = -2$ y $s_2 = -2$, o sea raíces repetidas. Cuando se substituye en la forma general de la solución la ecuación (6-10), se tiene que

$$v(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 t e^{-2t} = K e^{-2t} \quad (6-21)$$

en donde $K = k_1 + k_2$. Esta no es una forma completa de la solución, ya que la solución general de una ecuación diferencial de segundo orden debe contener dos constantes arbitrarias. La solución $v = k e^{-2t}$ se debe modificar en alguna forma para la condición de raíces repetidas. Si se supone que la nueva solución es $v = y e^{-2t}$, en donde y es un factor que se debe determinar y al substituirse en la ecuación (6-19), se llega al requisito de que y satisfaga a la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad (6-22)$$

Si se hacen dos integraciones sucesivas de la ecuación, se llega a la solución

$$y = k_1 + k_2 t \quad (6-23)$$

Por tanto, la solución de este problema con raíces repetidas se convierte en

$$v(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 t e^{-2t} \quad (6-24)$$

Para obtener una solución particular para este problema es necesario conocer dos condiciones iniciales. De acuerdo con la red de la figura 6-3, $v(0+)$ debe ser igual a cero, ya que el capacitor actúa como un corto circuito en el instante inicial. En la ecuación (6-17), el segundo y el tercer términos son iguales a cero, el primero porque $v(0+) = 0$ y el segundo porque no existe una corriente en el inductor en el instante inicial. Entonces, de acuerdo con la ecuación (6-17), $dv/dt(0+) = I/C = 1/2$ V/seg para esta red. Substituyendo estas condi-

ciones iniciales en la ecuación (6-24) se llega al resultado de que $k_1 = 0$ y $k_2 = 1/2$. La solución particular deseada es

$$v(t) = \frac{1}{2} t e^{-2t} \quad (6-25)$$

En la figura 6-4 se muestra una gráfica de esta solución.

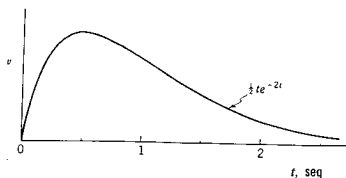


Figura 6-4. Respuesta de voltaje de la red de la figura 6-3, según la ecuación (6-25).

EJEMPLO 3

Para este ejemplo se utilizará la red de la figura 6-1, en donde se tienen los siguientes valores de parámetros de red: $V = 1$ V, $L = 1$ H, $R = 2 \Omega$, y $C = 1/2$ F. La ecuación característica se convierte en

$$s^2 + 2s + 2 = 0 \quad (6-26)$$

con raíces²

$$s_1, s_2 = -1 \pm j1 \quad (6-27)$$

Con estos valores de s , la solución general, ecuación (6-10), se convierte en

$$i(t) = k_1 e^{(-1+j)t} + k_2 e^{(-1-j)t} = e^{-t}(k_1 e^{jt} + k_2 e^{-jt}) \quad (6-28)$$

El siguiente paso consiste en encontrar las expresiones equivalentes a las dos funciones exponenciales e^{jt} y e^{-jt} , en términos de las funciones de seno y coseno. Esto se logra aplicando una relación que se origina en el desarrollo en serie de la exponencial e^x según la ecuación ya conocida

² Aquí se usará la letra j para el operador $\sqrt{-1}$, a fin de reservar la letra i para la corriente. La letra j , como se usa en los libros de texto de ingeniería eléctrica, equivale a $i = \sqrt{-1}$ de los libros de texto de matemáticas y física.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (6-29)$$

Aquí x puede ser una variable real o compleja. Para este estudio, sea $x = j\omega t$ que, con $\omega = 1$, se reduce a las exponenciales de la ecuación (6-28). Al substituir $x = j\omega t$ en la ecuación (6-29), se obtiene

$$e^{j\omega t} = 1 + j\omega t + \frac{(j\omega t)^2}{2!} + \frac{(j\omega t)^3}{3!} + \dots \quad (6-30)$$

Ahora, cuando $j = \sqrt{-1}$, $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = 1$, etc. Usando estas identidades y reuniendo las partes real e imaginaria de la ecuación (6-30), se obtiene

$$e^{j\omega t} = 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \dots + j \left[\omega t - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \dots \right] \quad (6-31)$$

Las partes real e imaginaria de esta serie se identifican a continuación con otros desarrollos en serie conocidos, que son

$$\cos \omega t = 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \dots \quad (6-32)$$

y

$$\operatorname{sen} \omega t = \omega t - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \frac{(\omega t)^5}{5!} - \dots \quad (6-33)$$

Entonces, la ecuación (6-31) se puede expresar como sigue

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t \quad (6-34)$$

Se observará a continuación que cuando $-\omega t$ substituye a ωt en la última ecuación,

$$e^{-j\omega t} = \cos(-\omega t) + j \operatorname{sen}(-\omega t) \quad (6-35)$$

o bien

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \operatorname{sen} \omega t \quad (6-36)$$

Las ecuaciones (6-34) y (6-36) se pueden combinar en una ecuación compacta

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \operatorname{sen} \omega t \quad (6-37)$$

Esta expresión se conoce como la *identidad de Euler*, la que se utilizará con mucha frecuencia en el presente estudio.

Ahora, con $\omega = 1$ en la última ecuación, se tiene el resultado necesario:

$$e^{\pm t} = \cos t \pm j \operatorname{sen} t \quad (6-38)$$

que se puede emplear para expresar la ecuación (6-28) en la forma equivalente

$$i(t) = e^{-t}(k_3 \cos t + k_4 \sin t) \quad (6-39)$$

en donde $k_3 = k_1 + k_2$ y $k_4 = j(k_1 - k_2)$. Las condiciones iniciales son las mismas que las del ejemplo 1: $i(0+) = 0$ y $di/dt(0+) = 1$ amp/seg. Cuando se substituye esto en la solución, se tiene

$$i(0+) = 0 = e^{-0}(k_3 \cos 0 + k_4 \sin 0) = k_3 \quad (6-40)$$

Por tanto k_3 es igual a cero,

$$\frac{di}{dt}(0+) = k_4(e^{-0} \cos 0 - \sin 0 e^{-0}) = 1 \quad (6-41)$$

de donde $k_4 = 1$. La solución particular es

$$i(t) = e^{-t} \sin t \quad (6-42)$$

En la figura 6-5 se muestra una gráfica de cada uno de los dos factores de la solución, así como de su producto.

Los resultados que se encuentran de acuerdo con estos tres ejemplos se pueden generalizar con suma facilidad. Si la ecuación diferencial que se estudia es

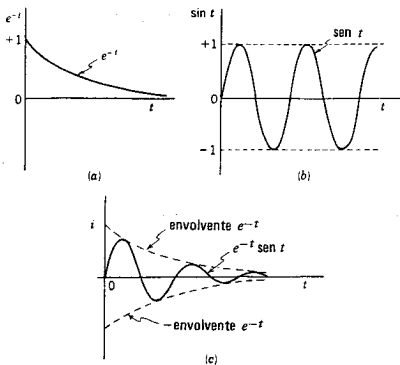


Figura 6-5. Respuesta de corriente del ejemplo 3. La respuesta es el producto de la forma de onda de (a) y de (b). La envolvente de la respuesta se define en (c) de esta figura.

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + a_1 \frac{di}{dt} + a_2 i = 0 \quad (6-43)$$

que se obtiene igualando $a_0 = 1$ en la ecuación (6-1) (dividiendo la ecuación entre el coeficiente del término de orden más elevado), entonces la ecuación característica es

$$s^2 + a_1 s + a_2 = 0 \quad (6-44)$$

Las raíces de esta ecuación se encuentran mediante la fórmula cuadrática y son

$$s_1, s_2 = \frac{-a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2} \quad (6-45)$$

Las tres formas posibles de las raíces, que dependen del valor de a_1^2 en comparación con $4a_2$, son (a) reales y desiguales, (b) reales e iguales y (c) un complejo conjugado. Existe también el caso especial para $a_1 = 0$ en que las raíces son un conjugado imaginario. Estas posibilidades se resumen en la tabla 6-1.

TABLA 6-1. RESPUESTA EN FUNCION DE LAS CONDICIONES DE LOS COEFICIENTES DE LA ECUACION CARACTERISTICA, $s^2 + a_1 s + a_2 = 0$ PARA a_1 Y a_2 REALES Y NO NEGATIVOS

Caso	Condición del coeficiente	Naturaleza de las raíces	Nombre descriptivo	Forma de la solución	Gráfica de la respuesta
1	$a_1^2 > 4a_2$	Negativas, reales y desiguales	Sobreamortiguados	$i = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$	
2	$a_1^2 = 4a_2$	Negativas, reales e iguales	Críticamente amortiguados	$i = K_1 e^{s_1 t} + K_2 t e^{s_1 t}$	
3	$a_1^2 < 4a_2$	Conjugadas complejas (la parte real negativa)	Subamortiguado	$i = e^{\sigma t}(K_1 \cos \omega_1 t + K_2 \text{sen } \omega_1 t)$ $s_1, s_2 = \sigma_1 \pm j\omega_1$	
4	$a_1 = 0$ $a_2 \neq 0$	Conjugadas imaginarias	Oscilatorio	$i = K_1 \cos \omega_1 t + K_2 \text{sen } \omega_1 t$ $s_1, s_2 = \pm j\omega_1$	

6-2. ECUACIONES DE ORDEN MAS ELEVADO:
EXCITACION INTERNA

El método de solución que se vio para las ecuaciones diferenciales de primero y segundo orden se puede seguir en la solución de ecuaciones de orden más elevado. Para una ecuación diferencial de n -ésimo orden, la ecuación característica será³

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (6-46)$$

Un teorema fundamental del álgebra establece que una ecuación de orden n tiene n raíces. Estas raíces se pueden determinar al factorizar la ecuación (6-46)

$$a_0 (s - m_1)(s - m_2) \dots (s - m_n) = 0 \quad (6-47)$$

Cada raíz da origen a un factor de la forma $K_1 e^{m_1 t}$. La suma de todos estos factores constituye la solución de la ecuación diferencial. Por tanto, la solución de las ecuaciones diferenciales homogéneas de orden más elevado, consiste principalmente en el problema de encontrar las raíces de la ecuación característica.

Afortunadamente existe una simplificación para encontrar estas raíces, debido a que los coeficientes de la ecuación (6-46) son *positivos* y *reales*. Esto se infiere porque tales coeficientes se formulan con el sistema de parámetros R , L y C . Y dado que R , L y C son positivos y reales, también los coeficientes a deben ser positivos y reales. Los coeficientes pueden ser cero o negativos y reales cuando se tienen fuentes controladas en la red.

Existen tres formas posibles de raíces: (1) raíces reales, (2) imaginarias y (3) complejas. Para la ecuación característica de primer orden

$$a_0 s + a_1 = 0 \quad (6-48)$$

la raíz es $s = -a_1/a_0$, que es negativa y real porque a_0 y a_1 son siempre positivos y reales. Para una ecuación característica de segundo orden,

$$a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0 \quad (6-49)$$

³ Al describir las ecuaciones algebraicas, los vocablos orden y grado se intercambian en las obras que tratan de ingeniería eléctrica. Puesto que en este caso el énfasis está en la ecuación diferencial de orden n , se usará el vocablo *orden* en los capítulos referentes al dominio del tiempo. A partir del capítulo 9 se empleará la palabra *grado* en vez de orden, para estar de acuerdo con la práctica acostumbrada en el análisis en el dominio de la frecuencia.

se tiene que $a_0 = 1$ (o se divide toda la expresión entre a_0 de tal modo que éste sea el caso). Las raíces están dadas por la ecuación (6-45), que es

$$s_1, s_2 = \frac{-a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2} \quad (6-50)$$

Con las restricciones de que los coeficientes a sean reales y positivos, estas raíces pueden tener cualquiera de las tres formas posibles —reales, imaginarias o complejas. Sin embargo, si las raíces son complejas, se presentan en pares conjugados, ya que ésta es la única forma en que las raíces complejas se pueden combinar para dar coeficientes reales positivos. Por consiguiente, para que las raíces de la ecuación característica sean complejas se deben presentar en pares conjugados.

A continuación se verá la ecuación característica de tercer orden. En este caso, debido a la regla que se acaba de dar para las raíces complejas, es necesario que cuando menos una de ellas sea real. Las otras dos pueden ser reales o bien un par conjugado de raíces complejas.⁴ Para una ecuación característica de cuarto orden existen más posibilidades: cuatro raíces reales, dos raíces reales y un par conjugado complejo o dos conjuntos de raíces conjugadas complejas. Entonces se establece el método general y se dan las siguientes reglas:

- (1) Si las raíces son complejas, se presentan en pares conjugados.
- (2) Si la ecuación característica es de orden impar, cuando menos una de las raíces es real. Las raíces restantes pueden ser reales o presentarse en pares conjugados complejos.
- (3) Si la ecuación característica es de orden par, las raíces pueden ser reales o presentarse en pares conjugados complejos.

Resumiendo este estudio, una ecuación de cualquier orden se puede factorizar mediante sus raíces y éstas determinan la solución de la ecuación diferencial homogénea en forma similar a la suma de las soluciones de primer orden (o segundo orden) que ya se han visto.

Se utilizará un ejemplo para ilustrar el método de solución de ecuaciones diferenciales homogéneas de orden elevado. La ecuación diferencial

$$\frac{d^5 i}{dt^5} + 6 \frac{d^4 i}{dt^4} + 17 \frac{d^3 i}{dt^3} + 28 \frac{d^2 i}{dt^2} + 24 \frac{di}{dt} + 8i = 0 \quad (6-51)$$

⁴ En este estudio las raíces imaginarias se consideran un caso especial de las raíces complejas.

tiene una ecuación característica que se puede factorizar como sigue

$$(s+1)(s+1)(s+2)(s^2+2s+4) = 0 \quad (6-52)$$

En esta ecuación se tienen dos raíces reales repetidas, una raíz real no repetida y un par conjugado complejo. Al aplicar estas ecuaciones ya derivadas para los sistemas de primero y segundo orden, se observa que la solución es

$$i = (K_1 + K_2 t)e^{-t} + K_3 e^{-2t} + e^{-t}(K_4 \operatorname{sen} \sqrt{3}t + K_5 \cos \sqrt{3}t) \quad (6-53)$$

6-3. REDES EXCITADAS CON FUENTES DE ENERGÍA EXTERNA

En la ecuación diferencial no homogénea el segundo miembro de la ecuación no es cero y es igual a la función impulsora o excitación, o a alguna derivada de ésta, $v(t)$. Al estudiar estas ecuaciones se observa en primer lugar que la solución de la ecuación diferencial homogénea correspondiente es una parte de la solución de la ecuación no homogénea. Para ilustrar esto con un ejemplo sencillo, sea la ecuación

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 5 \frac{di}{dt} + 6i = v(t) \quad (6-54)$$

Esta expresión tiene como raíces de su ecuación característica $s_1 = -2$ y $s_2 = -3$. Por tanto, la solución completa para el caso $v(t) = 0$ es

$$i_c = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-3t} \quad (6-55)$$

Supóngase que una función i_p , que se establecerá a continuación, satisface la ecuación no homogénea, (6-54). Entonces, i_p más i_c que se da anteriormente es también una solución, ya que al incluir a $K_1 e^{-2t}$ o bien a $k_2 e^{-3t}$ en la ecuación (6-54) no sumaría nada al lado derecho de la ecuación. En otras palabras, la solución de la ecuación diferencial homogénea es parte de la solución de la ecuación diferencial no homogénea. Por analogía con lo que se vio en la sección 4-3, esta parte se denomina *función complementaria*. La parte faltante de la solución —que se necesita para hacer que las operaciones de la ecuación diferencial resulten $v(t)$ — es la *integral particular*. Por consiguiente la solución total se escribe como la suma de las dos partes de la solución

$$i = i_p + i_c \quad (6-56)$$

Redes excitadas con fuentes de energía externa 177

Puesto que se puede encontrar i_C para cualquier ecuación, como se vio en la sección anterior, lo único que queda por determinarse es la integral particular i_P .

En el análisis de circuitos eléctricos, el término $v(t)$ en la ecuación diferencial es la fuerza impulsora o una derivada de esta fuerza. Como cuestión práctica, las fuerzas impulsoras se representan sólo mediante algunas formas matemáticas como V (una constante), $\text{seno } \omega t$, kt , e^{-at} , o los productos de estos términos (o bien combinaciones lineales que den ondas cuadradas, pulsos, etc.). Por lo general no se encuentran generadores físicos de funciones tales como la tangente. Existen varios métodos matemáticos para determinar la integral particular. Si sólo se toman en cuenta las fuerzas impulsoras de las formas prácticas antes mencionadas, el método de *coeficientes indeterminados* es particularmente apropiado para el caso.

Por lo general, el método de coeficientes indeterminados se aplica seleccionando funciones de prueba de todas las formas posibles que puedan satisfacer la ecuación diferencial. Cada función de prueba se asigna con un coeficiente indeterminado. La suma de las funciones de prueba se substituye en la ecuación diferencial, y se forma un conjun-

TABLA 6-2.

Factor* en $v(t)$	Elección necesaria para la integral particular**
1. V (una constante)	A
2. $a_1 t^n$	$B_0 t^n + B_1 t^{n-1} + \dots + B_{n-1} t + B_n$
3. $a_2 e^{rt}$	$C e^{rt}$
4. $a_3 \cos \omega t$	$D \cos \omega t + E \text{sen } \omega t$
5. $a_4 \text{sen } \omega t$	
6. $a_5 t^n e^{rt} \cos \omega t$	$(F_1 t^n + \dots + F_{n-1} t + F_n) e^{rt} \cos \omega t$ $+ (G_1 t^n + \dots + G_n) e^{rt} \text{sen } \omega t$
7. $a_6 t^n e^{rt} \text{sen } \omega t$	

* Cuando $v(t)$ consta de una suma de varios términos, la integral particular apropiada es la suma de las integrales particulares correspondientes a cada uno de estos términos.

** Siempre que un término de cualquiera de las integrales de prueba que se incluyen en esta columna ya forme parte de la función complementaria de la ecuación dada, es necesario modificar la elección que se indica multiplicándola por t antes de usarla. Si este término aparece r veces en la función complementaria, la elección que se señala se debe multiplicar por t^r .
(Con autorización de *advanced Engineering Mathematics*, 3.^a edición, por C. R. Wylie, Jr., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1966.)

to de ecuaciones algebraicas lineales al igualar los coeficientes de funciones semejantes en la función que resulta de esta substitución. Los coeficientes indeterminados se determinan entonces a través de la solución de este conjunto de ecuaciones. Si cualquiera de las funciones de prueba no constituye una solución, su coeficiente será cero.

No es necesario estudiar reglas a fin de seleccionar funciones de prueba para las formas de la función de fuerza impulsora $v(t)$ que se están considerando. Las formas que se requieren para las funciones de prueba, aparecen en la tabla 6-2. Al utilizar esta tabla, se sugiere el siguiente procedimiento:

- (1) Determine la función complementaria i_C . Compare cada parte de esta función de $v(t)$. Las reglas que se dan en la tabla 6-2 se modifican cuando estas dos funciones tienen términos de la misma forma matemática.
- (2) Escriba la forma de prueba de la integral particular utilizando la tabla 6-2. A cada solución diferente de prueba se debe asignar un coeficiente de letra distinta, y se deben combinar todas las funciones similares.
- (3) Substituya la solución de prueba de la ecuación diferencial. Iguale los coeficientes de todos los términos semejantes y forme un conjunto de ecuaciones algebraicas con los coeficientes indeterminados.
- (4) Resuelva para los coeficientes indeterminados y encuentre así la integral particular. Esos coeficientes se deben encontrar en función de los parámetros del circuito y de la fuerza impulsora. No existen constantes arbitrarias en la integral particular.

Una vez que se determina la integral particular, la solución total se puede encontrar sumando la función complementaria con la integral particular. Si se requiere una solución particular, las constantes arbitrarias de i_C se pueden evaluar conociendo las condiciones iniciales. Como precaución, las condiciones iniciales se deben aplicar siempre a la solución total y nunca a la función complementaria sola, a menos que $i_p = 0$ [cuando $v(t) = 0$].

EJEMPLO 4

Sea un circuito RL en serie con un voltaje como fuerza impulsora de la forma $v(t) = Ve^{-\alpha t}$ para $t \geq 0$, en donde V y α son constantes. De acuerdo con la ley de voltajes de Kirchhoff, la ecuación diferencial es, después de dividir entre L ,

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}e^{-\alpha t} \quad (6-57)$$

La ecuación característica es $s + (R/L) = 0$, de tal manera que la función complementaria es

$$i_c = ke^{-Rt/L} \quad (6-58)$$

De acuerdo con la tabla 6-4, la solución de prueba podría ser

$$i_p = Ae^{-\alpha t} \quad (6-59)$$

con $\alpha \neq R/L$, donde A es el coeficiente indeterminado. Substituyendo esta solución de prueba en la ecuación diferencial, se obtiene

$$-\alpha Ae^{-\alpha t} + \frac{R}{L} Ae^{-\alpha t} = \frac{V}{L} e^{-\alpha t} \quad (6-60)$$

o bien

$$A = \frac{V}{R - \alpha L}, \quad \alpha \neq \frac{R}{L} \quad (6-61)$$

La solución es la suma de i_p e i_c , o bien

$$i = \frac{V}{R - \alpha L} e^{-\alpha t} + Ke^{-Rt/L}, \quad \alpha \neq \frac{R}{L} \quad (6-62)$$

La constante arbitraria se puede evaluar cuando se saben las condiciones iniciales. Si $\alpha = R/L$, la forma de la solución de prueba debería ser

$$i_p = Ate^{-\alpha t} \quad (6-63)$$

Cuando se substituye esta solución en la ecuación diferencial, se obtiene

$$A(-\alpha te^{-\alpha t} + e^{-\alpha t}) + \alpha Ate^{-\alpha t} = \frac{V}{L} e^{-\alpha t} \quad (6-64)$$

o bien

$$A = \frac{V}{L} \quad (6-65)$$

Por consiguiente, la solución de este caso es

$$i = \frac{V}{L} te^{-\alpha t} + Ke^{-Rt/L}, \quad \alpha = \frac{R}{L} \quad (6-66)$$

EJEMPLO 5

Como segundo ejemplo, sea un circuito RC en serie con un voltaje senoidal como fuerza impulsora $v(t) = V \text{ sen } \omega t$ para $t \geq 0$. La ecuación de voltajes de Kirchhoff es

$$Ri + \frac{1}{C} \int i dt = V \text{ sen } \omega t \quad (6-67)$$

o bien, derivando y dividiendo entre R ,

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}i = \frac{\omega V}{R} \cos \omega t \quad (6-68)$$

De acuerdo con la tabla 6-2, la i_p que se supone debe ser la suma de un término en seno y otro en coseno, como sigue

$$i_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (6-69)$$

Si esta solución supuesta se substituye en la ecuación diferencial y se igualan los coeficientes de las funciones iguales, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\frac{A}{RC} + \omega B = \frac{\omega V}{R}, \quad \frac{B}{RC} - \omega A = 0 \quad (6-70)$$

Al resolver para A y B , se obtiene

$$A = \frac{\omega CV}{1 + \omega^2 R^2 C^2}, \quad B = \frac{\omega^2 RC^2 V}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (6-71)$$

Substituyendo estos valores en la solución supuesta, después de algunas simplificaciones resulta

$$i_p = \frac{V}{R^2 + (1/\omega^2 C^2)} \left(\frac{1}{\omega C} \cos \omega t + R \sin \omega t \right) \quad (6-72)$$

Esta ecuación se puede reducir a una sola senoide definiendo $1/\omega C = K \cos \phi$ y $R = K \sin \phi$, y aplicando la identidad trigonométrica del coseno de la diferencia de dos ángulos. Por tanto,

$$K(\cos \phi \cos \omega t + \sin \phi \sin \omega t) = K \cos(\omega t - \phi) \quad (6-73)$$

en donde, puesto que $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$,

$$K^2 = R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} \quad (6-74)$$

y

$$\tan \phi = \omega RC \quad (6-75)$$

Finalmente,

$$i_p = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (1/\omega^2 C^2)}} \cos(\omega t - \tan^{-1} \omega RC) \quad (6-76)$$

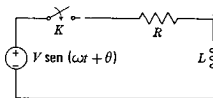
A este valor de i_p se debe sumar $i_C = Ke^{-t/RC}$ para obtener la solución general completa.

EJEMPLO 6

En el estudio de la generación de potencia y los sistemas de distribución es importante saber la respuesta de éstos con voltajes senoidales como fuerza impulsora. Véase el circuito equivalente de un sistema de esta índole, que aparece en la figura 6-6. Cuando K está cerrado, la ecuación de voltajes de Kirchoff para este sistema es

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V \sin(\omega t + \theta) \quad (6-77)$$

Figura 6-6. Red RL a la que se conecta una fuente senoidal para $t = 0$, con $i(0^-) = 0$.



El método para encontrar la integral particular es semejante al que se ilustró en el ejemplo anterior, y el resultado es

$$i_p = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin\left(\omega t + \theta - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right) \quad (6-78)$$

A este resultado se debe sumar la función complementaria que, de acuerdo con el ejemplo 4, es

$$i_c = Ke^{-Rt/L} \quad (6-79)$$

Así, la solución total se convierte en

$$i = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin\left(\omega t + \theta - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right) + Ke^{-Rt/L} \quad (6-80)$$

Ahora, si el interruptor se cierra para $t = 0$, la corriente inicial tiene un valor cero debido al inductor, siendo necesario que

$$\frac{V}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin\left(\theta - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right) + Ke^0 = 0 \quad (6-81)$$

o bien

$$K = -\frac{V}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin\left(\theta - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right) \quad (6-82)$$

Si el ángulo θ , que representa el ángulo de la senoide en el instante en que se cierra el interruptor, tiene el valor

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \quad (6-83)$$

la constante K tendrá un valor cero y se elimina el término transitorio i_C . En otras palabras, si el interruptor se cierra en el instante apropiado no se tendrá un término transitorio. Se puede llegar a la misma conclusión para una red RC en serie, pero no así para una red RLC .

6-4. RESPUESTA EN RELACION CON LA UBICACION DE LAS RAICES EN EL PLANO s

En esta sección se ampliará el estudio anterior de la solución de ecuaciones diferenciales de segundo orden, especialmente en relación con la forma de la respuesta de una red según la ubicación de las raíces de la ecuación característica dentro del plano complejo s . Esto se hará estudiando la respuesta de una red específica, la RLC en serie que se excita mediante una fuente de voltaje, $v(t)$. Para esta red, la ley de voltajes de Kirchhoff da

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = v(t) \quad (6-84)$$

La ecuación homogénea correspondiente es de segundo orden y es

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \quad (6-85)$$

Las dos raíces de la ecuación característica correspondiente se pueden encontrar mediante la fórmula cuadrática, y son

$$s_1, s_2 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (6-86)$$

Para convertir la ecuación (6-85) en una forma estándar, se define el valor de la resistencia que hace que desaparezca el radical de la ecuación anterior, como la *resistencia crítica* R_{cr} . Este valor se encuentra resolviendo la ecuación

$$\left(\frac{R_{cr}}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC} \quad (6-87)$$

o bien

$$R_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (6-88)$$

A continuación se presentarán dos definiciones: se define la cantidad

$$\zeta = \frac{R}{R_{cr}} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (6-89)$$

como *relación de amortiguación*, que carece de dimensiones. (ζ es la letra griega minúscula zeta). La relación de amortiguamiento es la rela-

ción que hay entre la resistencia real y el valor crítico de la resistencia. La otra definición es

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (6-90)$$

en donde ω_n es la frecuencia natural no amortiguada o, sencillamente, la frecuencia natural. Ahora, el producto $2\zeta\omega_n$ tiene el valor

$$2\zeta\omega_n = 2 \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{L} \quad (6-91)$$

y

$$\omega_n^2 = \frac{1}{LC} \quad (6-92)$$

Al substituir estas relaciones en la ecuación (6-85), se obtiene

$$\frac{di^2}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{di}{dt} + \omega_n^2 i = 0 \quad (6-93)$$

Obsérvese que en estas manipulaciones se han substituido sencillamente dos nuevas constantes en lugar de los dos coeficientes de la ecuación (6-85). Como se verá más adelante, estas nuevas constantes son apropiadas para interpretar la geometría de la localización de las raíces en el plano s , y además, tienen un significado especial para comprender la respuesta.

Otra cantidad que se encuentra con frecuencia en estudios de ingeniería eléctrica es el *circuito Q*, que se verá con más detalle en el capítulo 10. La Q del circuito *RLC* en serie que se estudia ahora se define mediante la ecuación

$$Q = \frac{\omega_n L}{R} \quad (6-94)$$

De acuerdo con Q y ω_n , la ecuación (6-85) se convierte en

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_n}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_n^2 i = 0 \quad (6-95)$$

lo cual significa, por supuesto, que $Q = 1/2\zeta$.

A continuación se verá la ubicación de las raíces de la ecuación característica de acuerdo con Q , ζ , y ω_n . La ecuación característica que se obtiene a partir de (6-93) es

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (6-96)$$

y las raíces de la ecuación característica son

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (6-97)$$

La solución general se puede escribir ahora como sigue

$$i = K_1 e^{(-\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t} + K_2 e^{(-\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t} \quad (6-98)$$

Antes de simplificar esta solución se examinará el comportamiento de las raíces de la ecuación característica conforme la relación de amortiguación, sin dimensiones, ζ varía desde cero (que corresponde a $R = 0$) hasta infinito (que corresponde a $R = \infty$). Es evidente que existen tres formas diferentes para las raíces:

Caso 1: $\zeta > 1$, las raíces son reales.

Caso 2: $\zeta = 1$, las raíces son reales y repetidas.

Caso 3: $\zeta < 1$, las raíces son complejas y conjugadas.

Si se sigue la forma de las raíces para una variación de ζ desde 0 hasta ∞ , se reconocerá un lugar geométrico de las raíces en el plano complejo. Para principiar, para

$$s_1, s_2 = \pm j\omega_n \quad (6-99)$$

es decir, las raíces son puramente imaginarias. Para $\zeta < 1$, las raíces son complejas y conjugadas como

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (6-100)$$

De acuerdo con las ubicaciones en el plano s , se observa que las partes real e imaginaria de $s = \sigma + j\omega$ son

$$\sigma = -\zeta\omega_n \quad (6-101)$$

y la parte imaginaria es

$$\omega = \pm\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (6-102)$$

como se ilustra en la figura 6-7. Obsérvese a continuación que, puesto que

$$\sigma^2 + \omega^2 = \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2) = \omega_n^2 \quad (6-103)$$

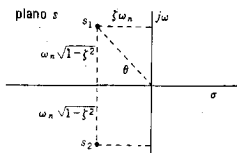


Figura 6-7. Las raíces de la ecuación característica de segundo orden se grafican aquí en el plano complejo s .

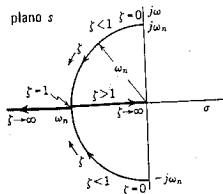


Figura 6-8. Lugar geométrico de las raíces que aparecen en la figura 6-7, conforme ζ varía de 0 a ∞ .

se infiere que el lugar geométrico de las raíces en el plano complejo s es un círculo cuyo radio es ω_n y que este lugar geométrico se forma cuando ζ , varía de 0 a 1. Este lugar geométrico se ilustra en la figura 6-8.

El ángulo comprendido entre la línea que va del origen a cualquiera de las raíces y el eje $-\sigma$ se designará como θ , como se indica en la figura 6-7. Como se acaba de demostrar, la línea a s_1 es la longitud de ω_n lo cual significa que todas las longitudes del triángulo son proporcionales a este valor. En la figura 6-9 se muestra una representación a escala de este triángulo, para $\omega_n = 1$. De acuerdo con esta figura, se observa que

$$\theta = \cos^{-1} \zeta \quad (6-104)$$

Por tanto, se ha demostrado que la ubicación de las raíces s_1 y s_2 en el plano s se puede especificar por medio de ω_n y ζ , ω_n es el radio y $\cos^{-1} \zeta$ es el ángulo medido con respecto al eje real negativo. De otra manera, el ángulo se puede dar en función de Q de la ecuación (6-94) como

$$\theta = \cos^{-1} \frac{1}{2Q} \quad (6-105)$$

A continuación se trazará la trayectoria de las raíces, el lugar geométrico de s_1 y s_2 para un valor fijo de ω_n , conforme ζ varía de 0 a ∞ . Cuando $\zeta = 0$, las raíces se encuentran sobre el eje imaginario del plano s . El rango de valores de ζ , $0 < \zeta < 1$ corresponde a valores complejos de las raíces. Cuando $\zeta = 1$, las raíces se juntan (repiten) y tienen el valor real $-\omega_n$. Para todos los valores de ζ , $1 < \zeta < \infty$, las raíces son negativas y reales, y están dadas por

$$s_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n \quad (6-106)$$

Conforme ζ se hace tan grande que 1 es pequeño en comparación con ζ^2 , las raíces se acercan a $-2\zeta\omega_n$ y 0, y una raíz tiende al infinito conforme la otra se acerca al origen.

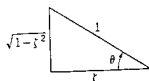


Figura 6-9. Ilustración de una relación útil del triángulo rectángulo.

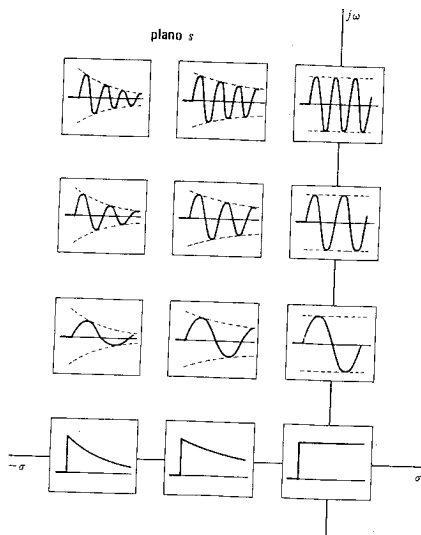


Figura 6-10. Formas de la respuesta para varias ubicaciones de las raíces de la ecuación característica en la mitad izquierda del plano s . Los puntos marcados sobre el eje σ corresponden a raíces únicas y para los otros puntos se supone que está presente la conjugada.

Ahora, la posición de las raíces de la ecuación característica del plano complejo s determina la forma de la respuesta, como se indica en los ejemplos de la sección 6-1 y en el resumen de la tabla 6-1. De acuerdo con ello, se observa que las raíces sobre el eje imaginario corresponden a respuestas oscilatorias (con un amortiguamiento nulo), las raíces en el plano complejo corresponden a oscilaciones amortiguadas (respuesta subamortiguada) y las raíces que están sobre el eje real negativo corresponden ya sea a un caso críticamente amortiguado ($\zeta = 1$) o a una forma de respuesta sobreamortiguada que se expresa como la diferencia de dos funciones exponenciales. La forma de la respuesta en función de la ubicación de la raíz en el plano s se ilustra en la figura 6-10.

Soluciones generales de acuerdo con ξ , Q y ω_n 187

Volviendo al circuito RLC que se vio al principio de este estudio, se observará que ω_n se controla mediante L y C pero no a través de R , y que ξ o Q quedan determinadas por R . Por tanto, si R representa una resistencia variable, es evidente que se puede obtener cualquiera de los casos que se describió para la forma de la respuesta mediante un simple ajuste de la resistencia. Si R tiene un valor pequeño (y el valor cero se obtiene en materiales superconductores), entonces la corriente del circuito oscilará cuando se cierre un interruptor que conecta a una batería. Esta forma oscilatoria de respuesta con un amortiguamiento creciente se seguirá produciendo debido al cierre de un interruptor conforme se incrementa R , hasta que se llegue a un valor crítico. Este es el valor crítico de resistencia que ya se describió. Para valores más grandes de R , la corriente no oscilará, sino que aumentará y se reducirá exponencialmente. Se ha visto que ξ y ω_n son cantidades convenientes no sólo para determinar la ubicación de las raíces en el plano s , sino también para describir la forma de la respuesta dentro de la red. En la siguiente sección se llegará a estas conclusiones de un modo más explícito desarrollando la solución en términos de ξ , Q , y ω_n .

6-5. SOLUCIONES GENERALES DE ACUERDO CON ξ , Q Y ω_n

En esta sección se verán los casos correspondientes a la clasificación de la tabla 6-1, y en cada caso se encontrará una ecuación simplificada a partir de (6-98).

Caso 1: $\xi > 1$ ó $Q < 1/2$. Si $e^{-\xi\omega_n t}$ se factoriza, a partir de la ecuación (6-98), se obtiene

$$i = e^{-\xi\omega_n t} K_1 e^{\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t} + K_2 e^{-\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t} \quad (6-107)$$

en donde K_1 y K_2 son constantes arbitrarias de integración. A veces es más conveniente evaluar esta ecuación de acuerdo con las funciones hiperbólicas. El *coseno hiperbólico* de x se define como

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (6-108)$$

y el *seno hiperbólico* de x se define como

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (6-109)$$

Se puede obtener una relación equivalente sumando o restando sucesivamente estas dos ecuaciones, es decir

$$e^x = \sinh x + \cosh x \quad (6-110)$$

y

$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x \quad (6-111)$$

Estas dos identidades se pueden utilizar para convertir la ecuación (6-107) a los términos relacionados con las funciones hiperbólicas; en consecuencia,

$$i = e^{-\zeta \omega_n t} [K_1 [\cosh (\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t) + \sinh (\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t)] + K_2 [\cosh (\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t) - \sinh (\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t)]] \quad (6-112)$$

o bien

$$i = e^{-\zeta \omega_n t} [K_3 \cosh (\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t) + K_4 \sinh (\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t)] \quad (6-113)$$

en donde

$$K_3 = K_1 + K_2 \quad (6-114)$$

y

$$K_4 = K_1 - K_2 \quad (6-115)$$

Esta ecuación es equivalente a la (6-107). Cada una tiene dos constantes arbitrarias que por lo general se evalúan para encontrar una solución particular de acuerdo con las condiciones iniciales.

Caso 2: $\zeta = 1$ o $Q = 1/2$. Para este caso se ha demostrado que las dos raíces se hacen idénticas. Cuando las raíces son repetidas, la solución de la ecuación es

$$i = (K_1 + K_2 t) e^{-\omega_n t} \quad (6-116)$$

El límite de la cantidad $te^{-\omega_n t}$ se puede investigar de acuerdo con la regla de l'Hospital. Si esta cantidad se escribe como sigue

$$\frac{t}{e^{\omega_n t}} \quad (6-117)$$

al derivar el numerador y el denominador con respecto a t se demuestra que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-\omega_n t} = 0 \quad (6-118)$$

Caso 3: $\zeta < 1$ o $Q > 1/2$. Para el caso 3, las raíces se hacen complejas y la ecuación (6-98) se puede escribir como sigue

$$i = e^{-\zeta \omega_n t} [K_1 e^{j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t} + K_2 e^{-j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t}] \quad (6-119)$$

Esta ecuación se puede escribir en función de senos y cosenos; utilizando la identidad de Euler,

$$e^{\pm jx} = \cos x \pm j \operatorname{sen} x \quad (6-120)$$

La solución del caso 3 se reduce a

$$i = e^{-\zeta \omega_n t} [K_5 \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) + K_6 \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t)] \quad (6-121)$$

en donde

$$K_5 = K_1 + K_2 \quad \text{y} \quad K_6 = j(K_1 - K_2) \quad (6-122)$$

que son también constantes arbitrarias de integración. Esta ecuación se puede expresar de un modo distinto definiendo

$$K_5 = K \operatorname{sen} \phi \quad (6-123)$$

$$K_6 = K \cos \phi \quad (6-124)$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x \quad (6-125)$$

la ecuación (6-121) se convierte en

$$i = K e^{-\zeta \omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi) \quad (6-126)$$

Estas transformaciones algebraicas dan como resultado una ecuación de una senoide equivalente a la expresión (6-121), que contiene dos senoïdes de la misma frecuencia. En la nueva forma, las dos constantes arbitrarias son K y ϕ , que se pueden relacionar a K_5 y K_6 mediante las ecuaciones (6-123) y (6-124). Sumando los cuadrados de K_5 y K_6 se obtiene la relación

$$K = \sqrt{K_5^2 + K_6^2} \quad (6-127)$$

Al dividir la ecuación (6-123) entre la (6-124) se obtiene una ecuación de ϕ en función de K_5 y K_6 , y es

$$\phi = \tan^{-1} \frac{K_5}{K_6} \quad (6-128)$$

De los factores con la forma $\operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t)$, en la solución del caso 3 es obvio que

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (6-129)$$

es la frecuencia⁵ de oscilación de la senoide decreciente. En ausencia de amortiguación ($R = 0$ o $\zeta = 0$), la frecuencia se convierte en $\omega = \omega_n$. Originalmente se definió a ω_n como la frecuencia natural no amortiguada y se ve que, en efecto, se trata de un caso especial de la ecuación (6-129) cuando $\zeta = 0$. Si, en ausencia de amortiguación, un sistema oscila con una frecuencia ω_n , entonces el agregar amortiguación hará que la frecuencia de oscilación disminuya y esta reducción la determina exclusivamente el factor $\sqrt{1 - \zeta^2}$.

Para ilustrar la aplicación de las soluciones generales que se han encontrado a una red particular con un conjunto de determinadas condiciones iniciales, véase la red de la figura 6-11. Con el capacitor cargado a un voltaje V_0 y, para el tiempo $t = 0$, se cerrará el interruptor K . El valor de la resistencia R con respecto a la resistencia crítica R_{cr} determinará que el sistema esté sobreamortiguado, críticamente amortiguado o subamortiguado. Considérese individualmente cada una de estas tres posibilidades.

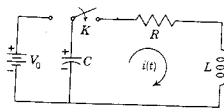


Figura 6-11. Red para la que se encuentran soluciones particulares a partir de las soluciones generales de la ecuación diferencial de segundo orden.

Cuando $R > R_{cr}$, el sistema está sobreamortiguado. La solución general se puede reducir a una solución particular para un determinado conjunto de condiciones iniciales. Para el circuito que se ilustra en la figura 6-11, $i(0+) = 0$ debido a la inductancia. El término $(1/C) \int_{-\infty}^0 i dt = -V_0$ en $t = 0$ (el voltaje inicial del capacitor), de tal modo que

$$\frac{di}{dt}(0+) = +\frac{V_0}{L} \quad (6-130)$$

El requisito de que $i(0+) = 0$ significa que K_3 de la ecuación (6-113) tiene un valor cero, es decir

$$i = K_4 e^{-\zeta \omega_n t} \sinh \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \quad (6-131)$$

⁵ El uso de ω como frecuencia en radianes por segundo no se debe confundir con la aplicación similar de ω como velocidad angular en sistemas mecánicos giratorios; por ejemplo, maquinaria rotatoria. Obsérvese también que se usa la frecuencia f en hertz, y las dos frecuencias se relacionan mediante la ecuación $\omega = 2\pi f$.

La constante K_4 se puede evaluar de acuerdo con la segunda condición inicial:

$$\frac{di}{dt} = K_4 [e^{-\zeta\omega_n t} \cosh(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t) \cdot \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} + \sinh(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t) e^{-\zeta\omega_n t} (-\zeta\omega_n)] \quad (6-132)$$

El término en coseno hiperbólico tiende a la unidad conforme $t \rightarrow 0$, y el término en seno hiperbólico se acerca a cero conforme $t \rightarrow 0$. Por tanto,

$$\frac{di}{dt}(0+) = K_4 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} = \frac{V_0}{L} \quad (6-133)$$

y

$$K_4 = \frac{V_0}{\omega_n L \sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (6-134)$$

La solución particular para el caso sobreamortiguado se convierte entonces en

$$i = \frac{V_0}{\omega_n L \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\zeta\omega_n t} \sinh(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t) \quad (6-135)$$

La forma general de la curva de la corriente en función del tiempo para esta ecuación se ilustra en la figura 6-12(a).

Para el caso críticamente amortiguado, $R = R_{cr}$ y la solución en general es

$$i = (K_1 + K_2 t) e^{-\omega_n t} \quad (6-136)$$

que está sometida a las mismas condiciones iniciales que en el caso sobreamortiguado. La condición inicial de corriente implica que $K_1 = 0$, ya que de otra manera esta ecuación no se reduce a cero en $t = 0$. Para aplicar las condiciones a la derivada, la ecuación (6-136) se deriva como sigue

$$\frac{di}{dt} = K_2 [t e^{-\omega_n t} (-\omega_n) + e^{-\omega_n t}] \quad (6-137)$$

Por tanto,

$$\frac{di}{dt}(0+) = K_2 = \frac{V_0}{L} \quad (6-138)$$

y la solución particular para el caso críticamente amortiguado

$$i = \frac{V_0}{L} t e^{-\omega_n t} \quad (6-139)$$

Esta curva se ilustra en la figura 6-12(b) y tiene más o menos el mismo aspecto que la de la figura 6-12(a).

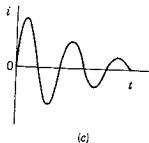
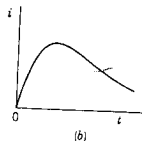
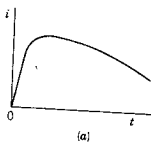


Figura 6-12. Respuesta de red para los tres siguientes casos: (a) sobreamortiguado (b) críticamente amortiguado y (c) subamortiguado u oscilatorio.

Para el caso subamortiguado u oscilatorio, $R < R_{cr}$ y la solución da la ecuación (6-121). La condición inicial para la corriente requiere que K_5 sea cero, de tal manera que la solución se puede escribir como

$$i = K_6 e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) \quad (6-140)$$

La constante K_6 se evalúa utilizando la condición inicial de la derivada de la corriente, de donde

$$\frac{di}{dt} = K_6 e^{-\zeta \omega_n t} [\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) - \zeta \omega_n \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t)] \quad (6-141)$$

de tal modo que

$$\frac{di}{dt}(0+) = K_6 \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \frac{V_0}{L} \quad (6-142)$$

La solución particular para el caso oscilatorio es

$$i = \frac{V_0}{\omega_n L \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) \quad (6-143)$$

La variación de la corriente con el tiempo para el caso oscilatorio se ilustra en la figura 6-12(c). Puesto que la corriente es el producto del factor de amortiguación y el término oscilatorio, dicho factor representa una *envolvente* o *curva de contorno* para la oscilación. El factor $\zeta \omega_n$ determina la rapidez con que se amortiguan las oscilaciones. Conforme R tiende a cero, las oscilaciones resultan no amortiguadas y se obtienen oscilaciones *sostenidas*.

El significado físico de este resultado matemático se puede interpretar de acuerdo con un intercambio de energía entre el elemento que almacena energía eléctrica (C) y el elemento que almacena energía magnética (L). Después de cerrar el interruptor, la energía que está almacenada en el campo eléctrico se transfiere al inductor en forma de energía magnética. Cuando la corriente comienza a decrecer, la energía se devuelve al campo eléctrico desde el magnético. Este intercambio continúa en tanto quede algo de energía. Si la resistencia tiene un valor cero, la corriente oscilatoria se sostendrá indefinidamente. Sin embargo, si *existe* resistencia, la corriente que pasa por el resistor producirá disipación de energía y el total de ésta disminuirá con cada ciclo. Finalmente se disipará toda la energía y la corriente se reducirá a cero. Si se puede disponer de un procedimiento para suministrar la energía que se pierde en cada ciclo, se pueden sostener las oscilaciones. Esto se logra en el oscilador electrónico para producir señales senoidales de radiofrecuencia o audiofrecuencia.

BIBLIOGRAFIA

- BALABANIAN, NORMAN, *Fundamentals of Circuit Theory*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1961, capítulo 3.
- CHIRLIAN, PAUL M., *Basic Network Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969, capítulo 4.
- CLEMENT, PRESTON R. y WALTER C. JOHNSON, *Electrical Engineering Science*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1960, capítulo 7.
- CLOSE, CHARLES M., *The Analysis of Linear Circuits*, Harcourt, Brace & World, Inc., Nueva York, 1966, capítulo 4.
- HUELSMAN, LAWRENCE P., *Basic Circuit Theory with Digital Computations*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1972, capítulo 6.
- SKILLING, HUGH H., *Electrical Engineering Circuits*, 2.ª ed., John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1965, capítulo 2.
- WYLIE, CLARENCE R., Jr., *Advanced Engineering Mathematics*, 3.ª ed. McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1966, capítulos 2, 3 y 5.

EJERCICIOS PARA COMPUTADORA DIGITAL

Las referencias que son útiles para diseñar ejercicios que se refieren a los temas de este capítulo se citan en el apéndice E-6.3 y tratan de la solución numérica de ecuaciones diferenciales de orden elevado. Se recomiendan en particular las sugerencias contenidas en los capítulos 5, 6 y 7 de Huelsman, referencia 7 del apéndice E-10.

PROBLEMAS

- 6-1. Demuestre que $i = ke^{-2t}$ e $i = ke^{-t}$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 3\frac{di}{dt} + 2i = 0$$

- 6-2. Demuestre que $i = ke^{-t}$ e $i = kte^{-t}$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\frac{di}{dt} + i = 0$$

- 6-3. Encuentre la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $\frac{d^2i}{dt^2} + 3\frac{di}{dt} + 2i = 0$

(e) $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{di}{dt} + 6i = 0$

(b) $\frac{d^2i}{dt^2} + 5\frac{di}{dt} + 6i = 0$

(f) $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{di}{dt} + 2i = 0$

(c) $\frac{d^2i}{dt^2} + 7\frac{di}{dt} + 12i = 0$

(g) $\frac{d^2i}{dt^2} + 2\frac{di}{dt} + i = 0$

(d) $\frac{d^2i}{dt^2} + 5\frac{di}{dt} + 4i = 0$

(h) $\frac{d^2i}{dt^2} + 4\frac{di}{dt} + 4i = 0$

194 Ecuaciones diferenciales, continuación

- 6-4. Determine la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:

(a) $\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt} + 2v = 0$

(d) $2\frac{d^2v}{dt^2} + 8\frac{dv}{dt} + 16v = 0$

(b) $\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt} + 4v = 0$

(e) $\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt} + 3v = 0$

(c) $\frac{d^2v}{dt^2} + 4\frac{dv}{dt} + 2v = 0$

(f) $\frac{d^2v}{dt^2} + 3\frac{dv}{dt} + 5v = 0$

- 6-5. Encuentre soluciones particulares para las ecuaciones diferenciales del problema 6-3 sometidas a las siguientes condiciones iniciales:

$$i(0+) = 1, \quad \frac{di}{dt}(0+) = 0$$

- 6-6. Encuentre soluciones particulares para las ecuaciones diferenciales del problema 6-3 sometidas a las siguientes condiciones iniciales:

$$i(0+) = 2, \quad \frac{di}{dt}(0+) = +1$$

- 6-7. Determine soluciones particulares para las ecuaciones diferenciales del problema 6-4 con las siguientes condiciones iniciales:

$$v(0+) = 1, \quad \frac{dv}{dt}(0+) = -1$$

- 6-8. Encuentre soluciones particulares para las ecuaciones diferenciales del problema 6-4, dadas las siguientes condiciones iniciales:

$$v(0+) = 2, \quad \frac{dv}{dt}(0+) = 1$$

- 6-9. Resuelva la ecuación diferencial

$$3\frac{d^3i}{dt^3} + 8\frac{d^2i}{dt^2} + 10\frac{di}{dt} + 3i = 0$$

- 6-10. Resuelva la ecuación diferencial

$$2\frac{d^3i}{dt^3} + 9\frac{d^2i}{dt^2} + 13\frac{di}{dt} + 6i = 0$$

sometida a las condiciones iniciales $i(0+) = 0$, $di/dt = 1$ para $t = 0+$ y $d^2i/dt^2 = -1$ para $t = 0+$.

- 6-11. Se ha encontrado que la respuesta de una red es

$$i = K_1 t e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0$$

en donde α es real y positivo. Encuentre el tiempo en que $i(t)$ alcanza un valor máximo.

- 6-12. En cierta red se ha encontrado que la corriente está dada por la expresión

$$i = K_1 e^{-\alpha_1 t} - K_2 e^{-\alpha_2 t}, \quad t > 0, \quad \alpha_1 > \alpha_2$$

Demuestre que $i(t)$ llega a un valor máximo en el instante

$$t = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \ln \frac{\alpha_1 K_1}{\alpha_2 K_2}$$

- 6-13. La gráfica que sigue muestra una forma de onda senoidal amortiguada de la forma general

$$Ke^{-\sigma t} \sin(\omega t + \phi)$$

Según la gráfica, determine los valores numéricos de K , σ , ω y ϕ .

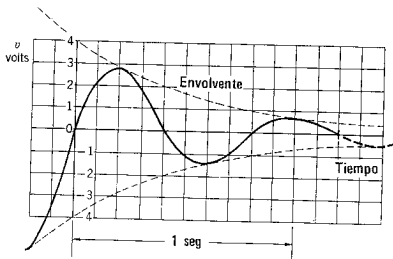


Fig. P6-13.

- 6-14. Repita el problema 6-13 para la forma de onda de la figura que sigue

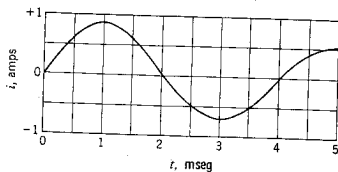


Fig. P6-14.

- 6-15. En la red de la siguiente figura el interruptor K se cierra y se llega al estado permanente en ella. Para $t=0$, el interruptor se abre. Encuentre una expresión para la corriente del interruptor, $i_2(t)$.

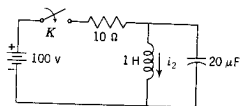


Fig. P6-15.

- 6-16. El capacitor de la siguiente figura tiene un voltaje inicial $v_C(0^-) = V_1$ y, al mismo tiempo, la corriente del inductor es cero. Para $t = 0$ se cierra el interruptor K . Determine una expresión para el voltaje $v_2(t)$.

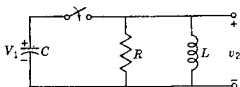


Fig. P6-16.

- 6-17. La fuente de voltaje de la red de la siguiente figura se describe mediante la ecuación $v_1 = 2 \cos 2t$ para $t \geq 0$ y está en corto circuito antes de ese momento. Determine $v_2(t)$. Repita el problema cuando $v_1 = K_1 t$ para $t \geq 0$ y $v_1 = 0$ para $t < 0$.

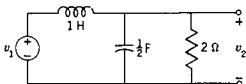


Fig. P6-17.

- 6-18. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales no homogéneas para $t \geq 0$

$$(a) \frac{d^2 i}{dt^2} + 2 \frac{di}{dt} + i = 1$$

$$(b) \frac{d^2 i}{dt^2} + 3 \frac{di}{dt} + 2i = 5t$$

$$(c) \frac{d^2 i}{dt^2} + 3 \frac{di}{dt} + 2i = 10 \sin 10t$$

$$(d) \frac{d^2 q}{dt^2} + 5 \frac{dq}{dt} + 6q = te^{-t}$$

$$(e) \frac{d^2 v}{dt^2} + 5 \frac{dv}{dt} + 6v = e^{-2t} + 5e^{-3t}$$

- 6-19. Resuelva las ecuaciones diferenciales del problema 6-18, sometiéndolas a las siguientes condiciones iniciales:

$$x(0+) = 1 \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt}(0+) = -1$$

en donde x es la variable dependiente general.

- 6-20. Determine las soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales del problema 6-18 para las siguientes condiciones iniciales:

$$x(0+) = 2 \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt}(0+) = -1$$

en donde x es la variable dependiente en cada caso.

- 6-21. Resuelva la ecuación diferencial

$$2 \frac{d^3 i}{dt^3} + 9 \frac{d^2 i}{dt^2} + 13 \frac{di}{dt} + 6i = K_0 te^{-t} \sin t$$

que es válida para $t \geq 0$ si $i(0+) = 1$, $di/dt(0+) = -1$ y $d^2 i/dt^2(0+) = 0$.

Problemas 197

- 6-22. Un generador especial tiene una variación de voltaje dada por la ecuación $v(t) = t$ V, en donde t es el tiempo en segundos y $t \geq 0$. Este generador se conecta a un circuito RL en serie, en donde $R = 2 \Omega$ y $L = 1$ H para el tiempo $t = 0$ al cerrar un interruptor. Determine la ecuación para la corriente en función del tiempo $i(t)$.
- 6-23. Un rayo que tiene una forma de onda que se aproxima a $v(t) = t^{-1}$ cae en una línea de transmisión que tiene una resistencia $R = 0.1 \Omega$ y una inductancia $L = 0.1$ H (se supone que la capacitancia de línea a línea es despreciable). A continuación se muestra una red equivalente. ¿Cuál es la forma de la corriente en función del tiempo? (Esta corriente se dará en amperios por unidad de voltajes del rayo; la base de tiempo se normaliza de la misma manera.)
- 6-24. En la red de la figura siguiente, el interruptor K se cierra para $t = 0$ cuando el capacitor no está energizado inicialmente. Para los valores numéricos que se indican, encuentre $i(t)$.

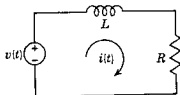


Fig. P6-23.

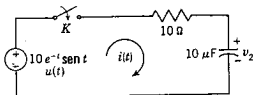


Fig. P6-24.

- 6-25. En la red que se muestra a continuación se llega al estado permanente, con el interruptor K abierto. Este se cierra en el instante $t = 0$. Para los valores de elementos que se dan determine la corriente $i(t)$ para $t \geq 0$.

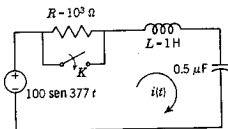


Fig. P6-25.

- 6-26. En la red que se muestra en la figura P6-25 se llega al estado permanente con el interruptor K abierto. Para $t = 0$ el valor de la resistencia R , se cambia al valor crítico R_{cr} definido por la ecuación (6-88). Para los valores de elemento que se dan, determine la corriente $i(t)$ para $t \geq 0$.
- 6-27. Sea la red que se muestra en la figura P6-24. El capacitor tiene un voltaje inicial $v_C = 10$ V. Para $t = 0$ se cierra el interruptor K . Determine $i(t)$ para $t \geq 0$.
- 6-28. La red de la figura que sigue funciona en estado estacionario con el interruptor K abierto. Este se cierra para $t = 0$. Encuentre una expresión para el voltaje $v(t)$ para $t \geq 0$.

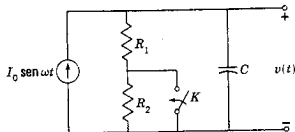


Fig. P6-28.

- 6-29. Considere una red RLC en serie que se excita mediante una fuente de voltaje. (a) Determine la ecuación característica correspondiente a la ecuación diferencial para $i(t)$. (b) Suponga que L y C tienen valores fijos, pero que R varía desde cero hasta ∞ . ¿Cuál será el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica? (c) Grafique las raíces de la ecuación característica en el plano s si $L = 1$ H, $C = 1$ μ F y R tiene los siguientes valores: 500 Ω , 1000 Ω , 3000 Ω , 5000 Ω .
- 6-30. Sea la red RLC del problema 6-16. Repita el problema 6-29 excepto que en este caso el estudio se ocupará de la ecuación característica correspondiente a la ecuación diferencial de $v_2(t)$. Compare los resultados con los que se hayan obtenido en el problema 6-29.
- 6-31. Analice la red que se da en la siguiente figura en base de mallas, y determine la ecuación característica de las corrientes de la red en función de K_1 . Encuentre el valor (o los valores) de K_1 para el que las raíces de la ecuación característica se encuentran sobre el eje imaginario del plano s . Encuentre el rango de valores de K_1 para el cual las raíces de la ecuación característica tienen partes positivas y reales.

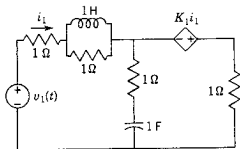


Fig. P6-31.

- 6-32. Demuestre que la ecuación (6-121) se puede escribir en la forma

$$i = Ke^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi)$$

Dé los valores de K y ϕ en función de K_5 y K_6 de la ecuación (6-121).

- 6-33. Un interruptor se cierra para $t=0$ conectando una batería de voltaje V con un circuito RL en serie. (a) Demuestre que la energía en el resistor en función del tiempo es

$$w_R = \frac{V^2}{R} \left(t + \frac{2L}{R} e^{-Rt/L} - \frac{L}{2R} e^{-2Rt/L} - \frac{3L}{2R} \right) \text{ joules}$$

(b) Determine una expresión para la energía del campo magnético en función del tiempo. (c) Grafique w_R y w_L en función de tiempo. Presente las asíntotas del estado permanente; es decir, los valores a los que tienden w_R y w_L conforme $t \rightarrow \infty$. (d) Encuentre la energía total que proporciona la fuente de voltaje en el estado permanente.

- 6-34. En el circuito RLC en serie que se muestra en el siguiente diagrama la frecuencia del voltaje de la fuente impulsora es

(1) $\omega = \omega_n$ (la frecuencia natural no amortiguada)

(2) $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ (la frecuencia natural)

Estas frecuencias se aplican en dos experimentos independientes. En cada uno de ellos se mide (a) el valor pico de la corriente momentánea cuando el interruptor se cierra en $t = 0$ y (b) el valor máximo de la corriente de estado permanente. (a) ¿En qué caso (es decir, a qué frecuencia) es mayor el valor máximo de la corriente transitoria? (b) ¿En qué caso (es decir, a qué frecuencia) es mayor el valor máximo de la corriente de estado permanente?

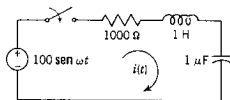
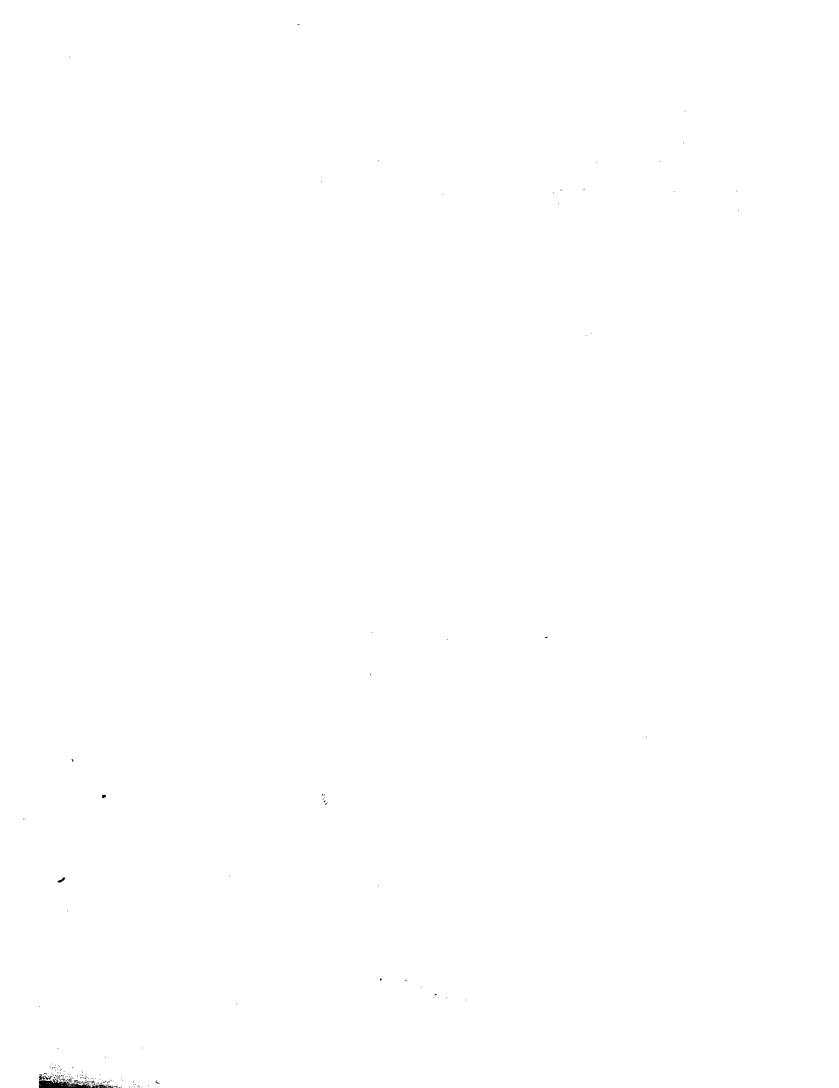


Fig. P6-34.



CAPITULO 7

7 La transformación de Laplace

7-1. INTRODUCCION

El *cálculo operacional*, sistema precursor del método de transformación de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales, fue inventado por el brillante ingeniero inglés Oliver Heaviside (1850-1925). Heaviside era un hombre práctico y su interés se centraba más en la solución práctica de los problemas de circuitos eléctricos que en la cuidadosa justificación de sus métodos. Tenía la cualidad de comprender muy bien lo que respecta a los problemas físicos, y ello le permitía escoger la solución correcta entre varias alternativas. Este punto de vista heurístico originó una crítica amarga y reiterada de los matemáticos notables de su tiempo. En los años que siguieron a la publicación del trabajo de Heaviside, el rigor matemático fue proporcionado por personas tales como Bromwich, Giorgi, Carson y otros. Las bases para substanciar el trabajo de Heaviside se encontraron en los escritos de Laplace de 1780. Al paso de los años, los miembros de la estructura del cálculo operacional de Heaviside se han substituido, uno por uno, utilizando nuevos miembros derivados de la transformación de Laplace. Esta transformación ha proporcionado la substentación rigurosa de los métodos operacionales y no se han encontrado errores importantes en los resultados de Heaviside.

El método de transformación de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales presenta varias ventajas sobre los métodos clásicos que se vieron en los capítulos 4 y 6. Por ejemplo:

- (1) La solución de las ecuaciones diferenciales es una rutina y progresa de un modo sistemático.

- (2) El método proporciona la solución total —la integral particular y la función complementaria— en una operación.
- (3) Las condiciones iniciales quedan especificadas automáticamente en las ecuaciones transformadas. Más aún, las condiciones iniciales se incorporan al problema como uno de los primeros pasos, en vez de hacerlo en el último.

¿Qué es una transformación? El *logaritmo* es un ejemplo de una transformación que se utilizó en el pasado. Los logaritmos simplifican en gran medida operaciones tales como la multiplicación, la división, la extracción de raíces y la elevación de cantidades a potencias. Supóngase que se tienen dos números, con siete decimales y que se desea encontrar el producto, conservando la precisión de los números dados. En vez de limitarse a multiplicar los dos números entre sí, éstos se transforman, sacando sus logaritmos. Los logaritmos se suman (o se restan, en el caso de la división). La suma resultante propiamente dicha tiene muy poco significado, pero si se efectúa una *transformación inversa*, es decir, si se encuentra el antilogaritmo, se tiene el resultado numérico que se desea. La división común parece ser un proceso directo, pero la experiencia ha demostrado que el uso de los logaritmos con frecuencia ahorra mucho tiempo. Si el simple problema de multiplicar dos números es convincente, considérese la evaluación de $(1437)^{0.1328}$ sin logaritmos.

En la figura 7-1 se muestra un diagrama de flujo de la operación que consiste en usar logaritmos para encontrar un producto o un cociente. Los casos individuales son: (1) encontrar el logaritmo de cada número por separado, (2) sumar o restar los números para obtener la suma de logaritmos y (3) sacar el antilogaritmo para obtener el producto o cociente. Esto es un rodeo, en comparación con la multiplicación o la división *directas*; sin embargo, se utilizan los logaritmos con ventaja, sobre todo cuando se dispone de una buena tabla de logaritmos.

La idea del diagrama de flujo se puede emplear para ilustrar lo que se hará al utilizar la transformación de Laplace para resolver una ecuación diferencial. El diagrama de flujo para la transformación de Laplace se ilustra en la figura 7-1(b), en la que cada cuadro equivale al cuadro correspondiente del diagrama de flujo de logaritmos que se vio antes. Los pasos serán los siguientes: (1) Se principia con una ecuación integrodiferencial y se encuentra la *transformada* correspondiente de Laplace. Este es un proceso matemático; pero existen tablas de transformadas, al igual que las hay de logaritmos (y se incluye una en este capítulo). (2) La transformada se maneja algebraicamente, después de que se insertan las condiciones iniciales. El resultado es una *transformada revisada*. Como paso (3) se efectúa una transformación inversa de Laplace para encontrar la solución. En este caso se puede utilizar

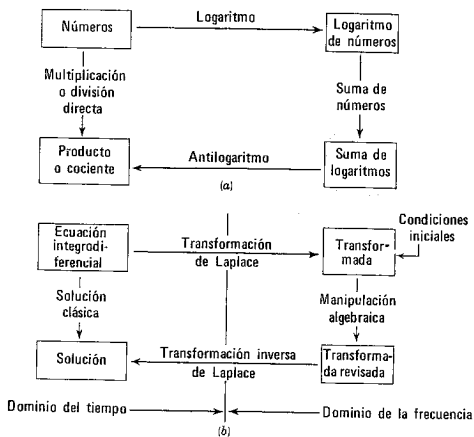


Figura 7-1. Comparación de logaritmos y la transformación de Laplace.

también una tabla de transformadas, del mismo modo que se usa una tabla de logaritmos en el paso correspondiente para éstos.

El diagrama de flujo recuerda que *existe otra forma*: la solución clásica parece ser más directa, y a veces lo es, para problemas sencillos. Para problemas más complejos se encontrará que conviene más aplicar la transformación de Laplace, al igual que se halló ventaja en el uso de los logaritmos.

7-2. LA TRANSFORMACION DE LAPLACE

Para construir una transformada de Laplace para determinada función del tiempo $f(t)$, primero se multiplica $f(t)$ por e^{-st} , donde s es un número complejo, $s = \sigma + j\omega$. Este producto se integra con respecto al tiempo, de cero a infinito. El resultado es la transformada de Laplace de $f(t)$, que se designa como $F(s)$. Si se designa la transformación de Laplace mediante el símbolo \mathcal{L} (a fin de reservar la L

para la inductancia), la transformación de Laplace está dada por la expresión

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (7-1)$$

La letra \mathcal{L} se puede reemplazar por las palabras "la transformada de Laplace de" en la expresión anterior. La implicación del uso de $0-$ como el límite inferior de integración en esta ecuación requiere algunas aclaraciones. Al estudiar los circuitos eléctricos se acostumbra subdividir el tiempo $t = 0$ en tres partes: $0-$ indica el tiempo inmediatamente anterior al de referencia (o sea, $t = -\epsilon$, $\epsilon > 0$, cuando $\epsilon \rightarrow 0$), 0 indica el tiempo exacto de referencia y $0+$ el tiempo inmediatamente posterior a $t = 0$. Cuando se satisface la condición de continuidad $f(0-) = f(0+)$ la elección de $0-$ ó $0+$ no es importante; sin embargo, si se tiene una función de impulso para $t = 0$, entonces se debe usar $t = 0-$, de tal modo que se incluya la función de impulso. En vez de hacer una excepción para redes con impulsos, se utilizará siempre $t = 0-$.

Para que $f(t)$ sea transformable, basta que

$$\int_{0-}^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < \infty \quad (7-2)$$

para un valor real y positivo de σ_1 . Aunque la ecuación (7-1) parece ser una integral muy impresionante a primera vista, por lo general no es muy difícil la evaluación de $F(s)$ para una determinada $f(t)$. Además, una vez que se encuentra la transformada de una función no es necesario hallarla otra vez para cada nuevo problema, sino que se puede tabular para uso futuro. La función de tiempo $f(t)$ y su transformada $F(s)$ se denominan *par de transformadas*. Varias personas han compilado tablas extensas de pares de transformadas, de tal manera que la ecuación (7-1) se usará rara vez para resolver problemas en la práctica.

Hay dos partes del último párrafo que requieren un examen adicional. (1) ¿Qué importancia tiene la limitación impuesta por la ecuación (7-2) que se debe satisfacer para que $f(t)$ tenga una transformada? (2) Para una $F(s)$ dada, ¿cómo se encuentra la $f(t)$ correspondiente?, ¿se pueden usar pares de transformadas en sentido inverso?

La restricción de la ecuación (7-2) se satisface en casi todas las $f(t)$ que se encuentran en la ingeniería, ya que $e^{-\sigma t}$ es un "poderoso factor reductor" como multiplicador de $f(t)$. Por tanto, se puede demostrar, aplicando la regla de l'Hospital, que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^n e^{-\sigma t} = 0, \quad \sigma > 0 \quad (7-3)$$

de manera que la integral del producto para $n = 1$ es

$$\int_{0^-}^{\infty} t e^{-\sigma t} dt = \frac{1}{\sigma^2}, \quad \sigma > 0 \quad (7-4)$$

y la integral para otros valores de n permanece finita para $\sigma \neq 0$.

Un ejemplo de una función que no satisface la ecuación (7-2) es $e^{\sigma t^2}$ o, en general, $e^{\sigma t^n}$; no existe un valor de σ para el que la integral de la ecuación (7-2) de estas $f(t)$ siga siendo finita. Ahora, es raro que se requiera que estas funciones describan la función impulsora en problemas de ingeniería. Además, un generador puede producir esta función para sólo un rango limitado de valores de t y a partir de ese punto se saturaría a un valor constante. La función que se acaba de describir y que es

$$\begin{aligned} v &= e^{\sigma t^2}, & 0 \leq t \leq t_0 \\ &= K, & t > t_0 \end{aligned} \quad (7-5)$$

satisface, por supuesto, a la ecuación (7-2).

EJEMPLO 1

Como ejemplo de la evaluación de la ecuación (7-1), véase la función escalón unitario introducida por Heaviside. Esta función se describe mediante la ecuación

$$\begin{aligned} u(t) &= 1, & t \geq 0 \\ &= 0, & t < 0 \end{aligned} \quad (7-6)$$

como se ilustra en la figura 7-2. Dicha notación es conveniente para representar el cierre de un interruptor para $t = 0$; si se conecta una batería de voltaje V_0 a una red en $t = 0$, el voltaje impulsor se puede representar como $V_0 u(t)$, sin necesidad de mencionar la presencia de un interruptor (o sin que aparezca en el diagrama esquemático). Para $V_0 = 1$, se tiene que

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (7-7)$$

De la misma manera,

$$\mathcal{L}[V_0 u(t)] = \frac{V_0}{s} \quad (7-8)$$

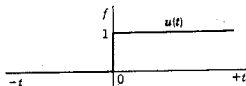


Figura 7-2. Función escalón unitario.

EJEMPLO 2

Como segundo ejemplo del cálculo de una transformada, sea $f(t) = e^{at}$, donde a es una constante. Al hacer las sustituciones en la ecuación (7-1) se tiene que

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}, \quad \sigma_1 > a \quad (7-9)$$

De donde e^{at} y $1/(s-a)$ constituyen un par de transformadas.

Estas dos computaciones forman el principio de una tabla de pares de transformadas que se muestra a continuación.

$f(t)$	$F(s)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

Ahora se puede pasar a la segunda pregunta, que se relaciona con encontrar $f(t)$ a partir de $F(s)$. La transformación inversa de Laplace está dada por la *integral compleja de inversión*,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (7-10)$$

que es una integral de contorno, en donde la trayectoria de integración, conocida como *trayectoria de Bromwich*, está a lo largo de la línea vertical $s = \sigma_1$ desde $-j\infty$ hasta $j\infty$, como se indica en la figura 7-3. En esta figura se muestra también la *abscisa de convergencia*, que es el número que se designa como a en la ecuación (7-9). Para la evaluación apropiada de la integral de inversión es necesario que $\sigma_1 > \sigma_c$ o que la trayectoria de integración de la ecuación (7-10) esté a la derecha de la abscisa de convergencia. En términos de la aplicación que se está haciendo aquí de la transformación de Laplace, ¿qué significan estos resultados? De acuerdo con la ecuación (7-9), el hecho de que se pueda escoger un valor de σ_1 mayor que $\sigma_c = a$ implica que existe la transformada $F(s)$, ya que se satisface la ecuación (7-2). Si se usa la integral de inversión para computar $f(t)$ mediante la ecuación (7-10), entonces se puede escoger un valor apropiado de σ_1 cuando se conoce σ_c . No obstante, hay otra propiedad de la transformación de Laplace que hace innecesario utilizar la integral de inversión en la mayoría de los casos. Esta propiedad es la *unicidad* de la transformación de Laplace. No puede haber dos funciones diferentes que tengan la misma transformación de Laplace, $F(s)$. Siendo éste el caso, se puede usar la tabla de los pares de transformadas para encontrar $f(t)$, a condición de que sea posible encontrar en la tabla la forma

Algunos teoremas básicos para la transformación de Laplace 207

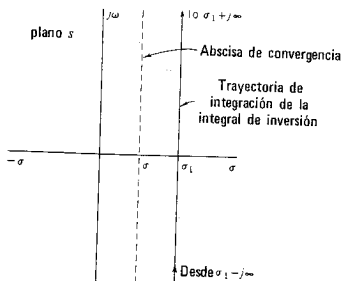


Figura 7-3. Figura que muestra la abscisa de convergencia que se relaciona con la transformación inversa de Laplace.

necesaria de $F(s)$. Se usa el símbolo \mathcal{L}^{-1} para indicar la transformación inversa de Laplace. Por tanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}[f(t)]\} = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \quad (7-10)$$

7-3. ALGUNOS TEOREMAS BASICOS PARA LA TRANSFORMACION DE LAPLACE

(1) *Las transformadas de combinaciones lineales.* Si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son dos funciones del tiempo, y a y b son constantes, entonces

$$\mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1(s) + bF_2(s) \quad (7-12)$$

Este teorema se establece con la ecuación (7-1). Se deriva de que la integral de una suma de términos es igual a la suma de las integrales de dichos términos, es decir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] &= \int_{0^-}^{\infty} [af_1(t) + bf_2(t)]e^{-st} dt \\ &= a \int_{0^-}^{\infty} f_1(t)e^{-st} dt + b \int_{0^-}^{\infty} f_2(t)e^{-st} dt \\ &= aF_1(s) + bF_2(s) \end{aligned} \quad (7-13)$$

Este teorema se utilizará para encontrar la transformación de Laplace de la suma de términos que aparecen en las ecuaciones de una red.

EJEMPLO 3

Como ejemplo del uso de este resultado, se encontrará la transformada de $\cos \omega t$ y $\sen \omega t$. De acuerdo con la identidad de Euler, la ecuación (6-37), que es

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sen \omega t \quad (7-14)$$

se observa que sumando las dos expresiones de las ecuaciones (7-14) se tiene

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \quad (7-15)$$

y restando

$$\sen \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \quad (7-16)$$

Puesto que la transformada de la función exponencial es

$$\mathcal{L}[e^{s_1 t}] = \frac{1}{s - j\omega}, \quad \sigma_1 > 0 \quad (7-17)$$

se observa que

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \sigma_1 > 0 \quad (7-18)$$

y

$$\mathcal{L}[\sen \omega t] = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad \sigma_1 > 0 \quad (7-19)$$

Estos resultados se pueden sumar al conjunto de pares de transformadas.

(2) *Transformadas de derivadas.* A partir de la ecuación de definición para la transformación de Laplace, se puede escribir

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) e^{-st} dt \quad (7-20)$$

Esta ecuación se puede integrar por partes, haciendo

$$u = e^{-st} \quad \text{y} \quad dv = df(t) \quad (7-21)$$

en la ecuación

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (7-22)$$

Entonces

$$du = -se^{-st} dt \quad \text{y} \quad v = f(t) \quad (7-23)$$

de tal modo que la transformada de una derivada se convierte en

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = e^{-st}f(t)\Big|_{0-}^{\infty} + s \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0-) \quad (7-24)$$

a condición de que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-st} = 0$, que se sigue de la regla de l'Hospital, a condición de que $f(t)$ y sus derivadas sean finitas para $t = \infty$ y $\sigma > 0$.

Para definir la transformada de la segunda derivada se sigue un procedimiento similar pero se utiliza el resultado de la ecuación (7-24). Puesto que

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t) = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt}f(t) \quad (7-25)$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] &= s\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}(t)\right] - \frac{df}{dt}(0-) \\ &= s[sF(s) - f(0-)] - \frac{df}{dt}(0-) \\ &= s^2F(s) - sf(0-) - \frac{df}{dt}(0-) \end{aligned} \quad (7-26)$$

En esa expresión la cantidad $df/dt(0-)$ es la derivada de $f(t)$ evaluada para $t = 0-$. La expresión general para la n ésima derivada es

$$\mathcal{L}\frac{d^n f(t)}{dt^n} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0-) - s^{n-2} \frac{df}{dt}(0-) - \dots - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f(0-) \quad (7-27)$$

(3) *Transformadas de integrales.* La transformada de una integral se encuentra a partir de la definición

$$\mathcal{L}\left[\int_{0-}^t f(t) dt\right] = \int_{0-}^{\infty} \left[\int_{0-}^t f(t) dt\right] e^{-st} dt \quad (7-28)$$

La integración se efectúa por partes, en donde se hace que

$$u = \int_0^t f(t) dt, \quad du = f(t) dt \quad (7-29)$$

y

$$dv = e^{-st} dt, \quad v = -\frac{1}{s} e^{-st} \quad (7-30)$$

Por tanto

$$\mathcal{L}\left[\int_{0-}^t f(t) dt\right] = -\frac{e^{-st}}{s} \int_{0-}^t f(t) dt \Big|_{0-}^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (7-31)$$

210 La transformación de Laplace

Ahora el primer término desaparece puesto que e^{-st} tiende a cero para t infinita y en el límite inferior

$$\int_{0-}^{\infty} f(t) dt \Big|_{t=0-} = 0 \quad (7-32)$$

En consecuencia, se llega a la conclusión de que

$$\mathcal{L} \left[\int_{0-}^{\infty} f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s} \quad (7-33)$$

Ahora, la formulación de las leyes de Kirchhoff para una red con frecuencia incluye una integral con límites de $-\infty$ a t . Estas integrales se pueden dividir en dos partes

$$\int_{-\infty}^t f(t) dt = \int_{-\infty}^{0-} f(t) dt + \int_{0-}^t f(t) dt \quad (7-34)$$

en donde el primer término de la derecha de esta ecuación es una constante. Cuando $f(t)$ es una corriente, esta integral es el valor inicial de la carga, $q(0-)$, y cuando $f(t)$ es un voltaje, la integral es el flujo concatenado $\psi(0-) = Li(0-)$. En cualquier caso este término se debe incluir en la formulación de la ecuación; de acuerdo con la ecuación (7-8), la transformada de una constante $q(0-)$ es

$$\mathcal{L}[q(0-)] = \frac{q(0-)}{s} \quad (7-35)$$

y se puede escribir una ecuación similar para $\psi(0-)$.

En la tabla (7-1) se resumen los resultados obtenidos hasta ahora.

TABLA 7-1. RESUMEN DE RESULTADOS*

Nombre	Propiedad	Ecuación
Definición	$\mathcal{L}f(t) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$	(7-1)
Linealidad	$\mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1(s) + bF_2(s)$	(7-12)
Tiempo Derivación	$\mathcal{L} \frac{d}{dt} f(t) = sF(s) - f(0-)$	(7-24)
Tiempo Integración	$\mathcal{L} \int_0^t f(x) dx = \frac{1}{s} F(s)$	(7-33)

* Véase la tabla 8-1 que es una ampliación de ésta.

7-4. EJEMPLOS DE LA SOLUCION DE PROBLEMAS
CON LA TRANSFORMACION DE LAPLACE

Con la breve tabla de transformadas que aparece en la página 000 y los tres teoremas básicos que se dedujeron en la sección anterior se puede resolver un problema de red (por supuesto, de tipo elemental) utilizando la transformación de Laplace,

EJEMPLO 4

Para este ejemplo, se escribirá la ley de voltajes de Kirchhoff para la red RC en serie que aparece en la figura 7-4. Se supondrá que el interruptor K se cierra para $t = 0$. Esta información se incluirá en la formación de las ecuaciones de red, escribiendo la expresión del voltaje como $Vu(t)$. Por tanto,

$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt + Ri = Vu(t) \quad (7-36)$$

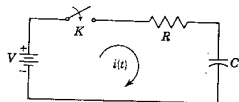


Figura 7-4. Red RC en serie del ejemplo 4.

Esta es la ecuación integral que se desea resolver. Las transformadas de la combinación lineal de los términos es

$$\frac{1}{C} \left[\frac{I(s)}{s} + \frac{q(0^-)}{s} \right] + RI(s) = V \cdot \frac{1}{s} \quad (7-37)$$

De acuerdo con el diagrama de flujo de la figura (7-1), se encontró la transformación de Laplace de la ecuación integral y se obtuvo una expresión de la transformada. Las condiciones iniciales requeridas se especifican automáticamente y se pueden insertar como segundo paso (en vez del paso final, como en las ecuaciones diferenciales que se resuelven por los métodos clásicos). Ahora $q(0^-)$ es la carga del capacitor para $t = 0$. Si el capacitor está inicialmente descargado, $q(0^-) = 0$, la última ecuación se reduce a la forma

$$I(s) \left(\frac{1}{Cs} + R \right) = \frac{V}{s} \quad (7-38)$$

El siguiente paso, también de acuerdo con el diagrama de flujo, consiste en efectuar las operaciones algebraicas. El objetivo de este procedimiento es el de resolver en función de $I(s)$. Esto se logra multiplicando por s y dividiendo entre R , para obtener

$$I(s) = \frac{V/R}{s + (1/RC)} \quad (7-39)$$

que es una expresión de una "transformada revisada". El siguiente paso del diagrama de flujo consiste en efectuar la transformación inversa de Laplace, para obtener la solución. En otras palabras,

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{V/R}{s + (1/RC)}\right] = i(t) \quad (7-40)$$

Si se aplica el segundo par de transformadas de la pequeña tabla, la solución es

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{V}{R} e^{-t/RC}, & t \geq 0 \\ &= 0, & t < 0 \end{aligned} \quad (7-41)$$

Esta es la solución completa. La constante arbitraria aparece evaluada (y tiene la magnitud V/R).

EJEMPLO 5

Como segundo ejemplo, sea el circuito RL , que se muestra en la figura 7-5, cerrando el interruptor para $t = 0$. De acuerdo con la ley de Kirchhoff, la ecuación diferencial del circuito es

$$L \frac{di}{dt} + Ri = Vu(t) \quad (7-42)$$

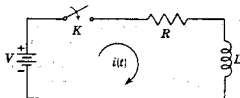


Figura 7-5. Red RL en serie del ejemplo 5.

La ecuación correspondiente de transformada es

$$L[sI(s) - i(0^-)] + RI(s) = \frac{V}{s} \quad (7-43)$$

La condición inicial especificada por la última ecuación es $i(0^-)$. Puesto que la inductancia no tiene flujo, $i(0^-) = 0$. Ahora se puede manejar la ecuación para resolver en función de $I(s)$; por consiguiente,

$$I(s) = \frac{V}{L} \frac{1}{s[s + (R/L)]} \quad (7-44)$$

Sin embargo, esta transformada no aparece en la pequeña tabla que se dio y se necesita algo nuevo (o una tabla más grande). Obsérvese que este término se compone del producto del término $1/s$ y el término $1/[s + (R/L)]$. Se conoce la transformación inversa de Laplace de cada uno de estos términos individuales, lo cual sugiere que se podría efectuar la operación inversa si existiera algún modo de dividir los términos en varias partes. Para intentar la realización de esta operación se tratará de hacer el siguiente desarrollo

$$\frac{V/L}{s[s + (R/L)]} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s + (R/L)} \quad (7-45)$$

En esta ecuación, K_0 y K_1 son coeficientes desconocidos. Como primer paso, se simplificará la ecuación, poniendo todos los términos con un denominador común. Entonces,

$$\frac{V}{L} = K_0 \left(s + \frac{R}{L} \right) + K_1 s \quad (7-46)$$

Al igualar los coeficientes de las funciones iguales, se obtiene un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales:

$$K_0 \cdot \frac{R}{L} = \frac{V}{L}, \quad K_0 + K_1 = 0 \quad (7-47)$$

De acuerdo con esas dos ecuaciones, se encuentra que los valores requeridos para K_0 y K_1 son

$$K_0 = \frac{V}{R} \quad \text{y} \quad K_1 = -\frac{V}{R} \quad (7-48)$$

Esta transformación algebraica ha permitido que la ecuación (7-44) se escriba como sigue

$$I(s) = \frac{V}{L} \frac{1}{s[s + (R/L)]} = \frac{V}{R} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + (R/L)} \right] \quad (7-49)$$

Se tienen pares de transformadas que corresponden a cada una de estas expresiones. La corriente en función del tiempo se determina tomando la transformación inversa de Laplace de las expresiones individuales; en consecuencia,

$$i(t) = \frac{V}{R} \left[\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s} - \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s + (R/L)} \right] \quad (7-50)$$

o bien

$$i(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L}), \quad t \geq 0 \quad (7-51)$$

Esta es la solución final (dominio de tiempo). El método que se usó para expresar la transformada como la suma de varias partes separadas se conoce con el nombre de *desarrollo en fracciones parciales*. Este es el tema de la siguiente sección.

7.5. DESARROLLO EN FRACCIONES PARCIALES

Los ejemplos de la sección anterior sugieren el procedimiento general para aplicar la transformación de Laplace a la resolución de las ecuaciones integrodiferenciales. Una ecuación diferencial de la forma general

$$a_0 \frac{d^n i}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{di}{dt} + a_n i = v(t) \quad (7-52)$$

se convierte, como resultado de la transformación de Laplace, en una ecuación algebraica donde se puede despejar la incógnita como

$$I(s) = \frac{\mathcal{L}[v(t)] + \text{términos de condiciones iniciales}}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (7-53)$$

La forma general de esta ecuación es un cociente de polinomios en s . Ahora se designarán los polinomios del numerador y el denominador como $P(s)$ y $Q(s)$, respectivamente, como sigue

$$I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (7-54)$$

Obsérvese que $Q(s) = 0$ es la ecuación característica del capítulo 6. Si ahora es posible encontrar el término de transformada $P(s)/Q(s)$ en la tabla de pares de transformadas, la solución $i(t)$ se puede escribir directamente. Sin embargo, en general la expresión de la transformada de $I(s)$ se debe subdividir en términos más sencillos antes de que se pueda utilizar cualquier tabla práctica de transformadas.

Como primer paso en el desarrollo del cociente $P(s)/Q(s)$, es ver si el orden¹ del polinomio P es menor que el de Q . Si esta condición no se satisface, se divide el numerador entre el denominador en un desarrollo de la forma

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = B_0 + B_1 s + B_2 s^2 + \dots + B_{m-n} s^{m-n} + \frac{P_1(s)}{Q(s)} \quad (7-55)$$

¹ A partir del capítulo 9 se empleará el término *grado* en vez de *orden*. Véase la nota 3 de pie de página del capítulo 6.

en donde m es el orden del numerador y n el orden del denominador. La nueva función $P_1(s)/Q(s)$ está ya "preparada" y se satisface la regla del orden.²

EJEMPLO 6

Sea el cociente

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s^2 + 2s + 2}{s + 1} \quad (7-56)$$

Por división directa,

$$\begin{array}{r} s + 1 \overline{) s^2 + 2s + 2} \\ \underline{s^2 + s} \\ s + 2 \\ \underline{s + 1} \\ 1 \end{array}$$

o bien

$$\frac{s^2 + 2s + 2}{s + 1} = 1 + s + \frac{1}{s + 1} \quad (7-57)$$

de tal modo que en la ecuación (7-55) $B_0 = 1$, $B_1 = 1$ y $P_1(s)/Q(s) = 1/(s + 1)$.

A continuación se factoriza el polinomio del denominador, $Q(s)$,

$$Q(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = a_0 (s - s_1) \dots (s - s_n) \quad (7-58)$$

o bien, en su forma muy abreviada,

$$Q(s) = a_0 \prod_{j=1}^n (s - s_j) \quad (7-59)$$

en donde Π indica un producto de factores y s_1, s_2, \dots, s_n son las n raíces de la ecuación $Q(s) = 0$. Ahora, la forma posible de las raíces ya se dio en el capítulo 6: (1) reales y simples (o distintas), (2) conjugadas y complejas y (3) raíces múltiples. En seguida se verán estas tres posibilidades, por separado.

(1) Si todas las raíces de $Q(s) = 0$ son simples, entonces el desarrollo por fracciones parciales es

$$\begin{aligned} \frac{P_1(s)}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)} \\ = \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{s - s_2} + \dots + \frac{K_n}{s - s_n} \end{aligned} \quad (7-60)$$

² Las transformadas inversas de Laplace de términos semejantes a B_0 y $B_1 s$ se verán en el capítulo 9, ya que constituyen funciones singulares del tipo de la función de impulso.

en donde los valores de K son constantes reales denominadas *residuos*.

- (2) Si una raíz de $Q(s) = 0$ es de multiplicidad r , el desarrollo por fracciones parciales para la raíz repetida es

$$\frac{P_1(s)}{(s-s_1)^r} = \frac{K_{11}}{s-s_1} + \frac{K_{12}}{(s-s_1)^2} + \dots + \frac{K_{1r}}{(s-s_1)^r} \quad (7-61)$$

y se tendrán términos similares para las demás raíces repetidas.

- (3) Se puede formular una regla especial importante para dos raíces que forman un par conjugado complejo. Para este caso, el desarrollo en fracciones parciales es

$$\begin{aligned} \frac{P_1(s)}{Q_1(s)(s+\alpha+j\omega)(s+\alpha-j\omega)} \\ = \frac{K_1}{(s+\alpha+j\omega)} + \frac{K_1^*}{(s+\alpha-j\omega)} + \dots \end{aligned} \quad (7-62)$$

en donde K_1^* es el conjugado complejo de K_1 . En otras palabras, cuando las raíces son conjugadas, también lo son los coeficientes del desarrollo en fracciones parciales. Se requiere un desarrollo del tipo que aparece arriba para cada par de raíces conjugadas complejas.

En el desarrollo de un cociente de polinomios en fracciones parciales puede ser necesario utilizar una combinación de las tres reglas anteriores. A continuación se dan varios ejemplos que ilustrarán dicho desarrollo y la determinación de los valores de K .

EJEMPLO 7

Sea el cociente de polinomios

$$I(s) = \frac{2s+3}{s^2+3s+2} \quad (7-63)$$

El primer paso consiste en factorizar el polinomio del denominador y luego desarrollarlo mediante la regla apropiada. Para este ejemplo, el desarrollo es

$$\frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)} \quad (7-64)$$

puesto que las raíces son reales y simples. Como primer paso, multiplíquese la ecuación por $(s+1)$ como sigue

$$\frac{(2s+3)(s+1)}{(s+1)(s+2)} = K_1 \frac{s+1}{s+1} + K_2 \frac{s+1}{s+2} \quad (7-65)$$

y, cancelando factores comunes,

$$\frac{2s+3}{s+2} = K_1 + K_2 \frac{s+1}{s+2} \quad (7-66)$$

En esa ecuación, el coeficiente K_1 no está multiplicado por ninguna función de s . Ahora, s es sencillamente un factor algebraico que puede tener cualquier valor. Si $s = -1$, el coeficiente de K_2 se reduce a cero y se puede resolver para K_1 como

$$K_1 = \left. \frac{2s+3}{s+2} \right|_{s=-1} = \frac{-2+3}{-1+2} = 1 \quad (7-67)$$

Para evaluar K_2 y seguir el mismo modelo la ecuación (7-64) se multiplica por $(s+2)$, para obtener

$$\frac{2s+3}{s+1} = K_1 \frac{s+2}{s+1} + K_2 \quad (7-68)$$

Para evaluar K_2 , se hace $s = -2$, con el fin de reducir el coeficiente de K_1 a cero. Entonces,

$$K_2 = \left. \frac{2s+3}{s+1} \right|_{s=-2} = \frac{-4+3}{-2+1} = 1 \quad (7-69)$$

Por tanto, el resultado del desarrollo en fracciones parciales es

$$\frac{2s+3}{s_2+3s+2} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \quad (7-70)$$

El desarrollo se debe comprobar siempre combinando los dos términos.

EJEMPLO 8

Para este ejemplo, sea el cociente de polinomios con raíces repetidas en el denominador

$$\frac{s+2}{(s+1)^2} = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} \quad (7-71)$$

Al multiplicar por $(s+1)^2$ se obtiene

$$s+2 = (s+1)K_{11} + K_{12} \quad (7-72)$$

y cuando $s = -1$, K_{12} se evalúa fácilmente como $K_{12} = 1$. Si se intenta seguir el mismo modelo para evaluar K_{11} , surgirán dificultades. En otras palabras,

$$\frac{s+2}{s+1} = K_{11} + \frac{K_{12}}{s+1} \quad (7-73)$$

218 La transformación de Laplace

Si en esta ecuación, $s = -1$, un término se hace infinito y no se puede evaluar K_{11} . No obstante, el problema se puede resolver si se vuelve a la ecuación (7-72) y se deriva con respecto a s :

$$1 + 0 = K_{11} + 0 \quad \text{o} \quad K_{11} = 1$$

Ahora están evaluadas las constantes y el desarrollo en fracciones parciales es

$$\frac{s+2}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} \quad (7-74)$$

También este desarrollo se puede comprobar, y en este caso el primer término del desarrollo se multiplica por $(s+1)/(s+1)$.

EJEMPLO 9

Este ejemplo ilustrará el desarrollo de un cociente de polinomios cuando las raíces del denominador son un par conjugado complejo. Sea el cociente

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 5} = \frac{K_1}{(s+1-j2)} + \frac{K_1^*}{(s+1+j2)} \quad (7-75)$$

Multiplicando la ecuación por $s+1-j2$, y haciendo que $s = -1+j2$, se obtiene $K_1 = +j1/4$; del mismo modo, $K_1^* = -j1/4$ y el desarrollo es

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 5} = \frac{-j\frac{1}{4}}{(s+1-j2)} + \frac{j\frac{1}{4}}{(s+1+j2)} \quad (7-76)$$

Para usar algunas tablas de transformadas, estos términos se deben revisar completando el cuadrado. En este ejemplo

$$(s^2 + 2s + 5) = (s^2 + 2s + 1) + 4 = (s+1)^2 + 2^2$$

de tal manera que

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{(s+1)^2 + 2^2} \quad (7-77)$$

En la forma general, $[(s+a)^2 + b^2]$, a es la parte real de la raíz y b es la imaginaria.

7-6. TEOREMA DEL DESARROLLO DE HEAVISIDE

El método del desarrollo en fracciones parciales que se ilustra con los tres últimos ejemplos, se conoce como método del desarrollo en

fracciones parciales de Heaviside. Para generalizar el método, considérese de nuevo el caso en que $Q(s)$ tiene sólo raíces distintas. Sea

$$\frac{P_1(s)}{Q(s)} = \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \frac{K_3}{s-s_3} + \dots + \frac{K_n}{s-s_n} \quad (7-78)$$

Entonces, cualquiera de los coeficientes, $K_1, K_2, K_3, \dots, K_n$, se puede evaluar multiplicando por el denominador de dicho coeficiente e igualando s al valor de la raíz del denominador. En otras palabras, para encontrar el coeficiente K_j

$$K_j = \left[(s-s_j) \frac{P_1(s)}{Q(s)} \right]_{s=s_j} \quad (7-79)$$

Para el caso general de raíces repetidas r , veces sea

$$\begin{aligned} \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{R(s)}{(s-s_j)^r} = \frac{K_{j1}}{s-s_j} + \frac{K_{j2}}{(s-s_j)^2} \\ + \dots + \frac{K_{jn}}{(s-s_j)^n} + \dots + \frac{K_{jr}}{(s-s_j)^r} \end{aligned} \quad (7-80)$$

en donde n es cualquier término del desarrollo en fracciones parciales y $R(s)$ se define como

$$R(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} (s-s_j)^r \quad (7-81)$$

Multiplicando la ecuación (7-80) por $(s-s_j)^r$, se obtiene

$$R(s) = K_{j1}(s-s_j)^{r-1} + K_{j2}(s-s_j)^{r-2} + \dots + K_{jr} \quad (7-82)$$

De acuerdo con esta ecuación, se puede visualizar el método que se va a usar para evaluar cada coeficiente. Si se hace $s = s_j$, desaparecen todos los términos de la ecuación excepto K_{jr} , que sí se puede evaluar. A continuación se deriva la ecuación una vez con respecto a s . El término K_{jr} desaparecerá, pero permanecerá $K_{j,r-1}$ sin que multiplique una función de s . Una vez más se puede evaluar $K_{j,r-1}$ haciendo $s = s_j$. Para encontrar el término general K_{jn} se deriva la ecuación (7-82) $(r-n)$ veces y se hace $s = s_j$; en este caso

$$K_{jn} = \frac{1}{(r-n)!} \left. \frac{d^{r-n} R(s)}{ds^{r-n}} \right|_{s=s_j} \quad (7-83)$$

o bien

$$K_{jn} = \frac{1}{(r-n)!} \left. \frac{d^{r-n}}{ds^{r-n}} \left[\frac{P(s)}{Q(s)} (s-s_j)^r \right] \right|_{s=s_j} \quad (7-84)$$

EJEMPLO 10

La aplicación verdadera de esta idea es más fácil de lo que parece debido a la complejidad de esta ecuación general. Por ejemplo, véase

$$\frac{2s^2 + 3s + 2}{(s+1)^3} = \frac{K_{11}}{(s+1)} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{13}}{(s+1)^3} \quad (7-85)$$

Al multiplicar la ecuación por $(s+1)^3$, se tiene que

$$2s^2 + 3s + 2 = K_{11}(s+1)^2 + K_{12}(s+1) + K_{13} \quad (7-86)$$

Para esta ecuación

$$K_{13} = 2s^2 + 3s + 2 \Big|_{s=-1} = 2 - 3 + 2 = 1 \quad (7-87)$$

A continuación se deriva con respecto a s para obtener

$$4s + 3 = 2K_{11}(s+1) + K_{12} \quad (7-88)$$

de tal modo que

$$K_{12} = 4s + 3 \Big|_{s=-1} = -1 \quad (7-89)$$

Una vez más se deriva la última ecuación para dar

$$4 = 2K_{11} \quad \text{o,} \quad K_{11} = 2 \quad (7-90)$$

El desarrollo en fracciones parciales es

$$\frac{2s^2 + 3s + 2}{(s+1)^3} = \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3} \quad (7-91)$$

EJEMPLO 11

Si $Q(s)$ contiene tanto raíces simples como repetidas, se debe aplicar una combinación de las dos reglas. Como ejemplo, sea

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)} \quad (7-92)$$

La forma del desarrollo en fracciones parciales es

$$\frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)} = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_2}{s+3} \quad (7-93)$$

En este desarrollo se puede evaluar K_2 mediante la ecuación (7-79) y K_{11} y K_{12} se pueden determinar a partir de la ecuación (7-84); por tanto,

$$K_2 = \frac{s+2}{(s+1)^2} \Big|_{s=-3} = -\frac{1}{4} \quad (7-94)$$

Multiplicando la ecuación (7-93) por $(s+1)^2$ se tiene

$$\frac{s+2}{s+3} = K_{11}(s+1) + K_{12} + \frac{(s+1)^2}{s+3} K_2 \quad (7-95)$$

La constante K_{12} se evalúa directamente, haciendo que $s = -1$; de donde

$$K_{12} = \left. \frac{s+2}{s+3} \right|_{s=-1} = \frac{1}{2} \quad (7-96)$$

y K_{11} se determinará derivando la ecuación (7-95), antes de permitir que $s = -1$:

$$\frac{(s+3) \cdot 1 - (s+2) \cdot 1}{(s+3)^2} = K_{11} + K_2 \frac{d}{ds} \left[\frac{(s+1)^2}{s+3} \right] \quad (7-97)$$

El coeficiente de K_2 desaparece cuando $s = -1$ debido a que un término $(s+1)$ sigue siendo común a todos los términos del numerador. En el ejemplo,

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{(s+1)^2}{s+3} \right] = \frac{(s+3)2(s+1) - (s+1)^2 \cdot 1}{(s+3)^2} \quad (7-98)$$

y este término desaparece cuando $s = -1$ porque cada término de la derivada contiene $(s+1)$. Este es siempre el caso, ya que el orden del factor de multiplicación $(s-s_j)^r$ es mayor que el número de veces que se requiere la derivación.

Al utilizar estos métodos, todos los coeficientes del desarrollo en fracciones parciales se pueden determinar y la ecuación de transformada se puede expresar como

$$F(s) = \sum_{j=1}^n \frac{K_j}{s-s_j} \quad (7-99)$$

para raíces simples de $Q(s) = 0$ y como

$$F(s) = \sum_{k=1}^r \frac{K_{jk}}{(s-s_j)^k} \quad (7-100)$$

para una sola raíz s_j repetida r veces. La $f(t)$ correspondiente se puede determinar ahora, para el caso general, tomando la transformación inversa de Laplace de $F(s)$ como sigue

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{P(s)}{Q(s)} \right] = \sum_{j=1}^n (s-s_j) \frac{P(s)}{Q(s)} e^{st} \Big|_{s=s_j} \quad (7-101)$$

como la solución en el dominio de tiempo para raíces simples. De igual manera, para el caso de raíces repetidas

$$f(t) = e^{st} \sum_{n=1}^r \frac{1}{(r-n)!} \frac{d^{r-n} R(s_j)}{ds^{r-n}} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (7-102)$$

en esta ecuación s_j es la raíz que se repite r veces. Utilizando las dos ecuaciones para el caso de raíces simples y repetidas se obtiene una solución general en la forma que originalmente se presenta como *teorema del desarrollo de Heaviside*.

El método de la expansión de fracción parcial de Heaviside se puede utilizar para dar un procedimiento simplificado para determinar la transformada inversa de los términos para un par de raíces complejas y conjugadas. Supóngase que estas raíces tienen una parte real α y una parte imaginaria $\pm j\omega$. El primer coeficiente se evalúa mediante el procedimiento

$$K_1 = \frac{P(s)}{Q(s)}(s + \alpha - j\omega) \Big|_{s = -\alpha + j\omega} = Re^{j\theta} \quad (7-103)$$

y el segundo como

$$K_1^* = \frac{P(s)}{Q(s)}(s + \alpha + j\omega) \Big|_{s = -\alpha - j\omega} = Re^{-j\theta} \quad (7-104)$$

La transformación inversa de estos dos términos da

$$f_1(t) = Re^{j\theta} e^{(-\alpha + j\omega)t} + Re^{-j\theta} e^{(-\alpha - j\omega)t} \quad (7-105)$$

Esta ecuación se puede reordenar en la forma

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 2Re^{-\alpha t} \left[\frac{e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)}}{2} \right] \\ &= 2Re^{-\alpha t} \cos(\omega t + \theta) \end{aligned} \quad (7-106)$$

Los factores R y θ son la magnitud y el ángulo de fase de K_1 en la ecuación (7-103). K_1 es el residuo asociado con la raíz de parte imaginaria positiva.

7-7. EJEMPLOS DE SOLUCION MEDIANTE LA TRANSFORMACION DE LAPLACE

EJEMPLO 12

Como ejemplo de la solución total, ya que se han repasado los métodos de desarrollo en fracciones parciales, véase la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 4 \frac{di}{dt} + 5i = 5u(t) \quad (7-107)$$

La transformación de Laplace de esta ecuación diferencial es

$$\left[s^2 I(s) - si(0^-) - \frac{di}{dt}(0^-) \right] + 4[sI(s) - i(0^-)] + 5I(s) = \frac{5}{s} \quad (7-108)$$

Se observará que las condiciones iniciales requeridas quedan especificadas automáticamente en esta ecuación. Es necesario conocer $i(0^-)$ y $di/dt(0^-)$ a partir del sistema físico. Supóngase que se encuentran los siguientes valores:

$$i(0^-) = 1 \quad \text{y} \quad \frac{di}{dt}(0^-) = 2 \quad (7-109)$$

Al incluir estas condiciones iniciales se simplifica la ecuación de la transformada a la forma

$$I(s)(s^2 + 4s + 5) = \frac{5}{s} + s + 6 \quad (7-110)$$

o bien

$$I(s) = \frac{s^2 + 6s + 5}{s(s^2 + 4s + 5)} \quad (7-111)$$

Esta ecuación se puede desarrollar mediante fracciones parciales como sigue

$$I(s) = \frac{s^2 + 6s + 5}{s(s + 2 + j1)(s + 2 - j1)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 2 - j1} + \frac{K_2^*}{s + 2 + j1} \quad (7-112)$$

Para evaluar K_1 se multiplica la ecuación por s y se hace $s = 0$. Entonces

$$K_1 = \frac{s^2 + 6s + 5}{s^2 + 4s + 5} \Big|_{s=0} = 1 \quad (7-113)$$

Para evaluar K_2 se multiplica la ecuación por $(s + 2 - j1)$ y se hace $s = -2 + j1$,

$$K_2 = \frac{s^2 + 6s + 5}{s(s + 2 + j1)} \Big|_{s=-2+j1} = \frac{-4 + j2}{(-2 + j1)(j2)} = \frac{2}{j2} = -j = e^{-j90^\circ} \quad (7-114)$$

El desarrollo en fracciones parciales completo se convierte en

$$I(s) = \frac{1}{s} + \frac{-j}{s + 2 - j1} + \frac{j}{s + 2 + j1} \quad (7-115)$$

Para obtener $i(t)$ de esa ecuación de transformada se toma la transformación inversa de Laplace del primer término y se usa la ecuación (7-106), siendo $R = 1$ y $\theta = -90^\circ$, para el segundo y el tercer término lo que da la solución

$$i(t) = 1 + 2e^{-2t} \sin t, \quad t \geq 0 \quad (7-116)$$

EJEMPLO 13

Para este ejemplo sea el circuito RLC en serie, en donde el capacitor está inicialmente cargado al voltaje V_0 , como se indica en la figura 7-6. La ecuación diferencial para la corriente $i(t)$ es

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt = 0 \quad (7-117)$$

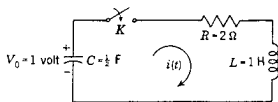


Figura 7-6. Red RCL en serie del ejemplo 13.

y la ecuación de transformada correspondiente es

$$L[sI(s) - i(0-)] + RI(s) + \frac{1}{Cs} [I(s) + q(0-)] = 0 \quad (7-118)$$

Los parámetros se han especificado como sigue: $C = 1/2$ F, $R = 2$ ohms y $L = 1$ H. La corriente inicial $i(0-) = 0$, debido al inductor, y si C está cargado inicialmente al voltaje V_0 (con la polaridad indicada),

$$\frac{q(0-)}{Cs} = -\frac{V_0}{s} \quad (7-119)$$

o bien, $-1/s$, si $V_0 = 1$ V. La ecuación de transformada para $I(s)$ se convierte entonces en

$$I(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \quad (7-120)$$

o bien, completando el cuadrado,

$$I(s) = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \quad (7-121)$$

Usando el par de transformadas 15 de la página 000, es obvio que

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}I(s) = e^{-t} \text{sen } t \cdot u(t) \quad (7-122)$$

EJEMPLO 14

En la red que aparece en la figura 7-7 el interruptor se cierra para $t = 0$. Con los valores de parámetros de red que se indican, las ecuaciones de voltajes de Kirchhoff son

$$\frac{di_1}{dt} + 20i_1 - 10i_2 = 100u(t), \quad (7-123)$$

$$\frac{di_2}{dt} + 20i_2 - 10i_1 = 0 \quad (7-124)$$

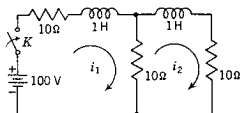


Figura 7-7. Red del ejemplo 14. El interruptor se cierra para $t = 0$ con corriente de inductor nula para $t = 0$.

Si la red no está energizada antes de cerrar el interruptor, tanto i_1 como i_2 serán cero inicialmente y las ecuaciones de transformada se pueden escribir como

$$(s + 20)I_1(s) - 10I_2(s) = \frac{100}{s}, \quad -10I_1(s) + (s + 20)I_2(s) = 0 \quad (7-125)$$

Supóngase que se debe encontrar la corriente i_2 en función del tiempo. La corriente de transformada $I_2(s)$ se puede determinar a partir de las dos últimas ecuaciones algebraicas, por medio de determinantes, como sigue:

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s + 20 & 100/s \\ -10 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s + 20 & -10 \\ -10 & s + 20 \end{vmatrix}} = \frac{1000}{s(s^2 + 40s + 300)} \quad (7-126)$$

El desarrollo en fracciones parciales de esa ecuación es

$$\frac{1000}{s(s + 10)(s + 30)} = \frac{3.33}{s} - \frac{5}{s + 10} + \frac{1.67}{s + 30} \quad (7-127)$$

La transformación inversa de Laplace da lo siguiente para $i_2(t)$

$$i_2(t) = 3.33 - 5e^{-10t} + 1.67e^{-30t}, \quad t \geq 0 \quad (7-128)$$

que es la solución requerida.

TABLA 7-2. TABLA DE TRANSFORMADAS

$f(t)^*$	$F(s)$
1. $u(t)$	$\frac{1}{s}$
2. t	$\frac{1}{s^2}$
3. $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ $n = \text{entero}$	$\frac{1}{s^n}$
4. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
5. te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
6. $\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$
7. $\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
8. $\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}$ + $\frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}$ + $\frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
9. $1 - e^{+at}$	$\frac{-a}{s(s-a)}$
10. $\frac{1}{\omega} \text{sen } \omega t$	$\frac{1}{s^2 + \omega^2}$
11. $\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
12. $1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$
13. $\text{sen}(\omega t + \theta)$	$\frac{s \text{sen } \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$
14. $\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s \cos \theta - \omega \text{sen } \theta}{s^2 + \omega^2}$
15. $e^{-at} \text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
16. $e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
17. $\text{senh } at$	$\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$
18. $\text{cosh } at$	$\frac{s}{s^2 - \alpha^2}$

* Se debe considerar que todas las $f(t)$ están multiplicadas por $u(t)$, es decir, $f(t) = 0$ para $t < 0$.

Las propiedades de las transformadas de Laplace derivadas en este capítulo se resumen en el siguiente, en la tabla 8-1 (junto con propiedades adicionales que se derivan en dicho capítulo). En la tabla 7-2 se presenta una breve relación de las transformadas de Laplace, y se incluye una tabla más extensa en el apéndice D.

BIBLIOGRAFIA

- CHIRLIAN, PAUL M., *Basic Network Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969. Capítulo 5.
- CLOSE, CHARLES M., *The Analysis of Linear Circuits*, Harcourt, Brace & World, Inc., Nueva York, 1966. Capítulo 10.
- COOPER, GEORGE R. y CLARE D. MCGILLEM, *Methods of Signal and System Analysis*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., Nueva York, 1967. Capítulo 6.
- DESOER, CHARLES A. y ERNEST S. KUH, *Basic Circuit Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969. Véase el Capítulo 6.
- KUO, FRANKLIN F., *Network Analysis and Synthesis*, 2.ª edición, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1966. Capítulo 6.
- STRUM, ROBERT D. y JOHN R. WARD, *Laplace Transform Solution of Differential Equations* (texto programado), Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968. Este es un excelente manual para el estudio individual de los temas de este capítulo.

Para una lectura interesante de los aspectos históricos del tema, convendría que el lector consultara el resumen titulado "The Work of Oliver Heaviside", de Behrend, que se incluye en el apéndice de E. J. Berg, *Heaviside's Operational Calculus* (2.ª edición) (McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1936), páginas 173-208. Los escritos originales de Heaviside se reimprimieron con el título de *Electromagnetic Theory* (Dover Publications, Inc., Nueva York, 1950) que contiene una presentación amplia del método. Véanse también las notas históricas del apéndice C de M. F. Gardner y J. L. Barnes, *Transient in Linear System* (John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1942).

EJERCICIOS PARA COMPUTADORA DIGITAL

En el estudio de la transformación de Laplace, dos operaciones que se efectúan rutinariamente con la ayuda de la computadora son la determinación de las raíces de un polinomio y el cálculo de los residuos. Las referencias relacionadas con esas dos operaciones se dan en los apéndices E-1 y E-5.1. En particular se recomienda la referencia 7 del capítulo 8 por Huelsman, en el apéndice E-10, en relación con el manejo de polinomios y la determinación de residuos. Véase también el caso de estudio 23, dado por McCracken, referencia 12, que se cita en el apéndice E-10.

PROBLEMAS

- 7-1. Compruebe que la transformada de Laplace de $\cos \omega t$ determinada a partir de la ecuación (7-1) es

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

En cada uno de los problemas siguientes repita el procedimiento del problema 7-1 para los diferentes pares de transformadas de la siguiente tabla.

	$f(t)$ para $t \geq 0$	$F(s)$
7-2.	t^2	$\frac{2}{s^3}$
7-3.	$\sinh \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$
7-4.	$\cosh \alpha t$	$\frac{s}{s^2 - \alpha^2}$
7-5.	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
7-6.	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
7-7.	$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{s \sin \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$
7-8.	$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$

Para las siguientes $f(t)$ determine el otro miembro del par de transformadas, $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = P(s)/Q(s)$ en donde $P(s)$ y $Q(s)$ son polinomios en s .

- 7-9. $f_1(t) = \sin^2 t$
 7-10. $f_2(t) = t \cos at$
 7-11. $f_3(t) = [1/(2a)] \sin at$
 7-12. $f_4(t) = \cos^2 t$
 7-13. $f_5(t) = [1/(2a^2)](\sinh at - \sin at)$
 7-14. $f_6(t) = [1/(2a^2)] \sin at \sinh at$
 7-15. $f_7(t) = [1/(2a^2)](\cosh at - \cos at)$
 7-16. $f_8(t) = [1/(2a)](\sin at + at \cos at)$
 7-17. $f_9(t) = t^2 e^{-at} \cos \omega t$
 7-18. $f_{10}(t) = (1/t) \sin^2 \omega t$
 7-19. $f_{11}(t) = t^{1/2}$
 7-20. $f_{12}(t) = e^{-at}$

- 7-21. En la red que se muestra a continuación C está cargado a un voltaje V_0 y el interruptor K se cierra para $t=0$. Resuelva para la corriente $i(t)$ utilizando el método de transformación de Laplace.

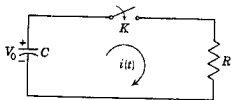


Fig. P7-21.

- 7-22. En la red que se muestra en la figura siguiente el interruptor K se mueve de la posición a a la b , para $t=0$, habiéndose alcanzado previamente el estado permanente en la posición a . Determine la corriente $i(t)$ aplicando el método de transformación de Laplace.

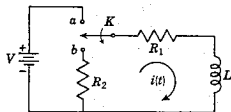


Fig. P7-22.

- 7-23. En la red que se muestra a continuación C está cargado inicialmente al voltaje V_0 . El interruptor K se cierra para $t=0$. Encuentre la corriente $i(t)$ utilizando el método de transformación de Laplace.

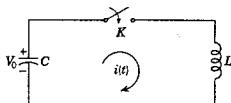


Fig. P7-23.

- 7-24. En la siguiente red el interruptor K se desplaza de la posición a a la posición b , para $t=0$ (habiendo existido un estado permanente en la posición a antes de que $t=0$). Resuelva para la corriente $i(t)$ utilizando el método de transformación de Laplace.

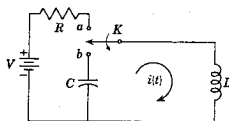


Fig. P7-24.

- 7-25. Desarrolle el problema 4-2 utilizando el método de transformación de Laplace.
 7-26. Resuelva el problema 4-3 aplicando el método de transformación de Laplace de este capítulo.
 7-27. Resuelva el problema 4-4 con el empleo del método de transformación de Laplace.
 7-28. Resuelva el problema 4-5 utilizando el método de transformación de Laplace en vez del método clásico del capítulo 4.
 7-29. Revise las siguientes ecuaciones desarrollándolas en fracciones parciales. Determine cuáles son las dos expresiones del conjunto que están equivocadas.

$$(a) \frac{2s}{s^2-1} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1}$$

$$(b) \frac{7s+2}{s^3+3s^2+2s} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s+2} + \frac{-3}{s+1}$$

230 *La transformación de Laplace*

$$(c) \frac{5s + 13}{s^2 + 5s + 6} = \frac{2}{s + 3} + \frac{3}{s + 2}$$

$$(d) \frac{s^2}{s-1} = \frac{1}{s-1} + s + 1$$

$$(e) \frac{2(s+1)}{s^2+1} = \frac{1+j1}{s+j1} + \frac{1-j1}{s-j1}$$

$$(f) \frac{s^2 + 4s + 1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{s}$$

$$(g) \frac{3s^3 - s^2 - 3s + 2}{s^2(s-1)^2} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$(h) \frac{s^3 - 5s^2 + 9s + 9}{s^2(s^2 + 9)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{-j}{s+j3} + \frac{+j}{s-j3}$$

7-30. Efectúe el desarrollo de las siguientes funciones como fracciones parciales:

$$(a) F_1(s) = \frac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)}$$

$$(b) F_2(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+3)}{s(s^2+2)(s^2+4)}$$

$$(c) F_3(s) = \frac{s}{s^2(s+1)^2(s+2)}$$

$$(d) F_4(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

$$(e) F_5(s) = \frac{s+4}{(s+1)^2(s+3)^2}$$

$$(f) F_6(s) = \frac{s^2(s+3)}{(s+1)(s+2)^4}$$

7-31. Haga el desarrollo de las siguientes funciones como fracciones parciales:

$$(a) F_a(s) = \frac{s^2 + 7s + 8}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$(b) F_b(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$(c) F_c(s) = \frac{s+4}{s(s+1)(s+3)^2(s+2)^3}$$

7-32. Verifique las siguientes transformaciones inversas de Laplace $\mathcal{L}^{-1}F(s) = f(t)$:

$$(a) \mathcal{L}^{-1} \frac{3s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \cos t - \cos 2t$$

$$(b) \mathcal{L}^{-1} \frac{s+1}{s^2+2s} = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})$$

$$(c) \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s(s^2-2s+5)} = \frac{1}{2}[1 + \frac{1}{2}e^{(-2 \cos 2t + \text{sen } 2t)}]$$

$$(d) \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} = e^{-t} - e^{-2t}(1+t)$$

$$(e) \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^3(s^2-1)} = -1 - \frac{t^2}{2} + \cosh t$$

$$(f) \mathcal{L}^{-1} \frac{s^2 + 2s + 1}{(s+2)(s^2+4)} = \frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{7}{8} \cos 2t + \frac{1}{8} \sin 2t$$

$$(g) \mathcal{L}^{-1} \frac{s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{2} t \cos t + \frac{1}{2} \sin t$$

7-33. Resuelva las ecuaciones diferenciales que se dan en el problema 6-5 utilizando el método de transformación de Laplace.

7-34. Resuelva las ecuaciones diferenciales del problema 6-6. Emplee el método de transformación de Laplace.

Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando el método de transformación de Laplace:

$$7-35. \frac{d^2 i}{dt^2} - i = 25 + e^{2t}$$

$$7-36. \frac{d^2 i}{dt^2} + 4i = \sin t - \cos 2t$$

$$7-37. \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{di}{dt} = t^2 + 2t, \quad i(0^-) = 4 \quad \frac{di}{dt}(0^-) = -2$$

7-38. Resuelva la ecuación diferencial del problema 6-21 utilizando el método de transformación de Laplace.

7-39. En el circuito RLC en serie que se ilustra a continuación, el voltaje que se aplica es $v(t) = 58 \sin t$ para $t > 0$. Para los valores de elementos especificados encuentre $i(t)$ si el interruptor K se cierra para $t = 0$.

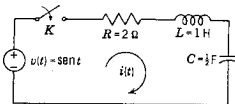


Fig. P7-39.

7-40. Un interruptor se cierra para $t = 0$, conectando una fuente de voltaje $v = V \sin \omega t$ a un circuito RL en serie. Aplicando el método de transformación de Laplace, demuestre que la corriente está dada por la ecuación

$$i = \frac{V}{Z} \sin(\omega t - \phi) + \frac{\omega L V}{Z^2} e^{-Rt/L}$$

en donde

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad \text{y} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

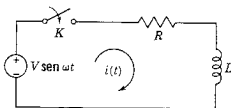


Fig. P7-40.

7-41. El Dr. L. A. Woodbury de la Escuela de Medicina de la Universidad de Utah utilizó una analogía eléctrica en los estudios de las convulsiones. En

la red de la figura que se muestra a continuación, las siguientes cantidades son duales: C_1 representa el volumen del fluido que contiene drogas, R_1 es la "resistencia" al paso de la droga del estómago al torrente sanguíneo, C_2 representa el volumen de dicho torrente y R_2 es equivalente al mecanismo de excreción del cuerpo (el riñón, etc.). La concentración de la dosis de droga se representa como V_0 y el voltaje $v_0(t)$ en el nodo a es análogo a la cantidad de droga en el torrente sanguíneo. La red análoga tiene la ventaja de que los elementos se pueden cambiar con facilidad y estudiar los efectos (sin mencionar el ahorro de vidas de gatos). Encuentre la ecuación de transformada para $V_0(s)$ con el coeficiente del término de más alto orden, normalizado a la unidad.

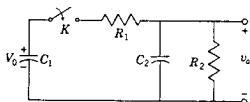


Fig. P7-41.

- 7-42. Este problema es una continuación del problema 7-41 relacionado con la analogía del Dr. Woodbury. Se seleccionan las siguientes constantes para la red: $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $C_2 = 8 \mu\text{F}$, $R_1 = 9 \text{ M}\Omega$ y $R_2 = 5 \text{ M}\Omega$. Si $V_0 = 100 \text{ V}$ y el interruptor se cierra para $t = 0$, resuelva para $v_A(t)$ el equivalente de la concentración de drogas en el torrente sanguíneo en función del tiempo.
- 7-43. Considerando los datos del problema 7-42 encuentre el tiempo t_m cuando la concentración de droga en el torrente sanguíneo es un máximo. (Se busca esta información para que se pueda aplicar una segunda dosis en ese momento, a fin de aumentar la concentración hasta el punto de inducir una convulsión.)
- 7-44. Si se inyecta una segunda dosis (el equivalente de voltaje con magnitud de 100 volts) en $t = t_m$, como se determinó en el problema 7-43, ¿cuál será v_A en función del tiempo y cuál será el valor máximo de v_A que se pueda obtener? (Nota: Al aplicar la segunda dosis se supondrá que el voltaje total es, en este momento, 100 V más el voltaje de las placas en el instante en que se hace la adición.)
- 7-45. En la red que se muestra a continuación el interruptor K se cierra para $t = 0$, sin que la red se haya energizado previamente. Para los valores de elementos que se señalan en el diagrama: (a) encuentre $i_1(t)$, (b) determine $i_2(t)$.

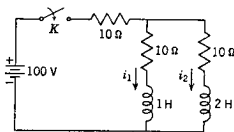


Fig. P7-45.

- 7-46. La red de la siguiente figura llega al equilibrio estando el interruptor K en la posición a . En el instante $t = 0$, el interruptor pasa a la posición b . Encuentre el voltaje a través de R_2 en función del tiempo.

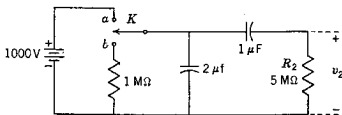


Fig. P7-46.

- 7-47. (a) Encuentre $i_1(t)$ que se obtiene al cerrar el interruptor para $t=0$, cuando el circuito no ha sido energizado previamente. Las constantes del circuito son: $L_1 = 1$ H, $L_2 = 4$ H, $M = 2$ H, $R_1 = R_2 = 1$ ohm, $V = 1$ volt. (b) Repita la parte (a) para encontrar $i_2(t)$.

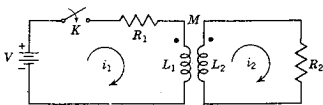


Fig. P7-47.

- 7-48. En la red de la siguiente figura la fuente de corriente se describe por la expresión $i_1 = 10^{-3}e^{-t}\mu(t)$ amp. Para los valores de elementos que se dan determine $v_2(t)$, suponiendo que todos los elementos están desenergizados inicialmente. Grafique $v_2(t)$ utilizando una escala de tiempo ampliada para valores pequeños de t .

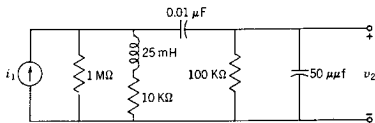


Fig. P7-48.

- 7-49. La red que se muestra en seguida contiene una fuente de voltaje controlada por corriente. Para los valores de elemento que se dan y con $v_1(t) = 5u(t)$, determine $v_o(t)$, si la red no está energizada para $t=0$. Sea $K_1 = -3$.

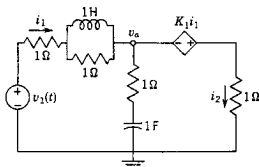


Fig. P7-49.

234 La transformación de Laplace

- 7-50. Utilice las condiciones de la red del problema 7-49 y resuelva para $i_2(t)$ si $K_1 = +3$.
- 7-51. (a) Determine $\mathcal{L} \{bf(t/a)\}$ en función de $\mathcal{L} \{f(t)\}$, si se indica que a y b son constantes.
 (b) Determine $\mathcal{L}^{-1} F(s/c)$ en función de $\mathcal{L}^{-1} F(s)$, si se indica que c es una constante.
- 7-52. Demuestre que

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$$

Utilizando este resultado, encuentre las transformadas de Laplace de t sen αt , $t^2 e^{-at}$ y t senh βt . Donde α , a y β son constantes.

- 7-53. Demuestre que

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_s^{\infty} F(s) ds$$

Utilice este resultado para encontrar las transformadas de Laplace de $t^{-1}e^{-t}$ y $t^{-1}(1 - e^{-t})$.

- 7-54. Demuestre que

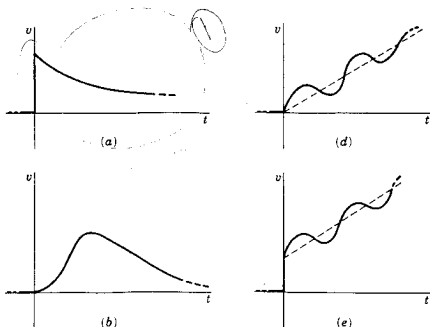
$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

- 7-55. Determine

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{n!}{s(s+1)(s+2)\dots(s+n)}$$

mediante desarrollo en fracciones parciales y demuestre que la respuesta se puede dar en la forma cerrada $(1 - e^{-t})^n$.

- 7-56. La siguiente figura presenta seis diferentes formas de onda de señales. Cada una de ellas sugiere la forma general de la señal, pero no se dan



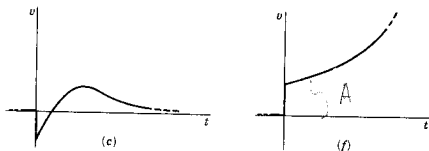


Fig. P7-56.

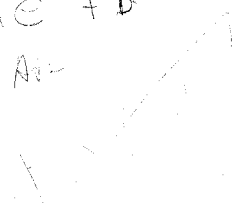
valores numéricos. Para cada forma de onda escriba una función $V(s)$. Asegúrese de indicar todos los polos en $V(s)$ que se necesiten para producir la forma de onda que se da.

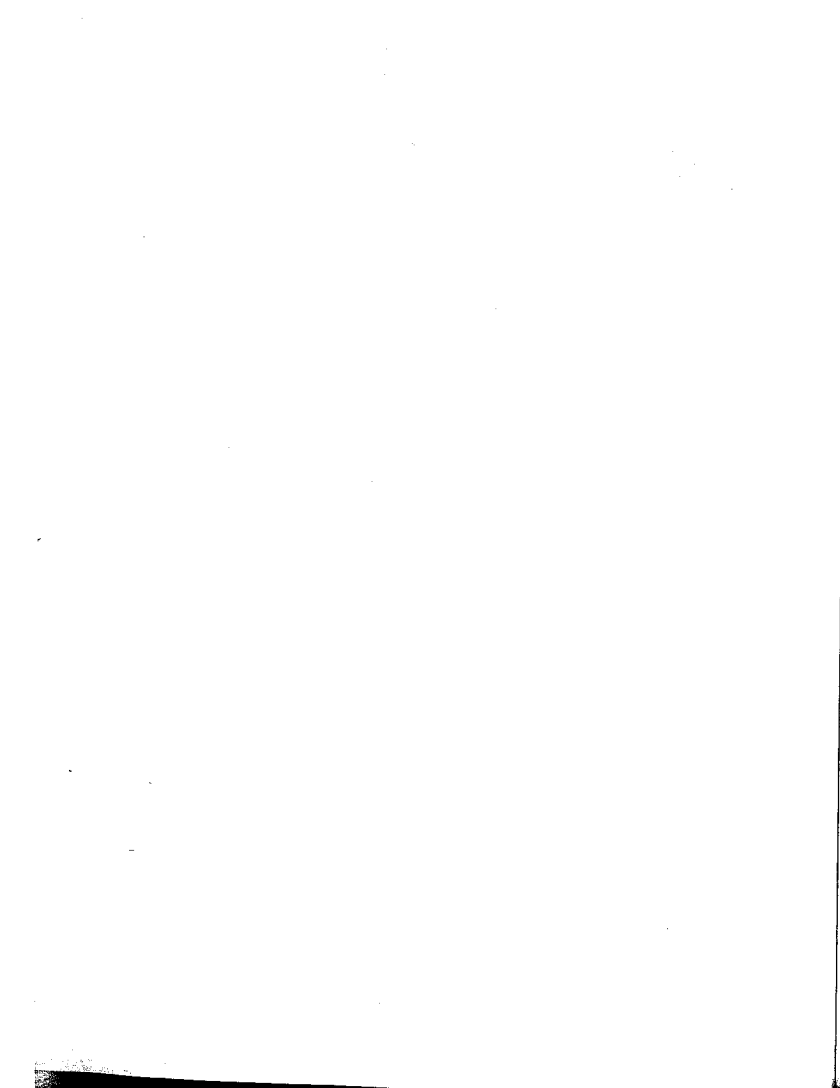
$A e^{at}$
 $\frac{A}{(s-a)}$

① $V(s) = Ae^{-t}$
 $V(s) = \frac{A}{(s-a)} + \frac{B}{(s-b)}$

$V(s) = \frac{A}{(s-a)}$

$V(s) = Ae^{-at} + Be^{-bt}$
 Ae^{-at}





CAPITULO 8

8 Transformadas de otras formas de ondas de señales

En los capítulos anteriores el estudio de las respuestas de las redes se relacionó con excitaciones o formas de ondas de señales tales como la función escalón y la onda senoidal. En este capítulo se utilizarán métodos de transformadas para determinar la respuesta de las redes a formas de onda más complicadas, determinando primero las transformadas de dichas formas de onda. En la figura 8-1 se ilustran los tipos de las formas de onda que se estudiarán. En (a) y (b) la señal tiene una variación prescrita en sólo un intervalo y es cero para todos los demás tiempos. Esta señal es *no recurrente*. La que se muestra en (c) es una onda cuadrada que continúa para cualquier tiempo después de $t = 0$ y es un ejemplo de una forma de onda *recurrente*.



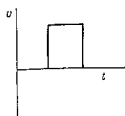
8-1. LA FUNCION ESCALON UNITARIO TRASLADADO

La función escalón unitario se presentó en el capítulo 7 y se definió por medio de la ecuación

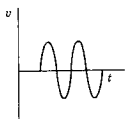
$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (8-1)$$

para una función que cambia bruscamente desde cero hasta un valor unitario para el tiempo $t = 0$. Esta expresión se puede generalizar mediante la definición

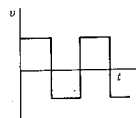
$$u(t - a) = \begin{cases} 1, & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases} \quad (8-2)$$



(a)



(b)



(c)

Figura 8-1. Ejemplos de las formas de onda que se van a estudiar: (a) pulso rectangular, (b) pulso de onda senoidal y (c) onda cuadrada.

para una función escalón que cambia bruscamente para el tiempo $t = +a$. En general, la función escalón tiene un valor unitario cuando la cantidad $(t - a)$ el argumento de la función u , es positiva y tiene un valor cero cuando $(t - a)$ es negativo. Esta definición se aplica para cualquier forma de variable; por consiguiente, la función $u(t + a)$ es la que cambia desde cero hasta el valor unitario para $t = -a$. Del mismo modo, la función $u(a - t)$ es la que cambia desde la unidad hasta el valor cero (para tiempo creciente), para el instante en que $t = a$. Estas funciones se representan en la figura 8-2.

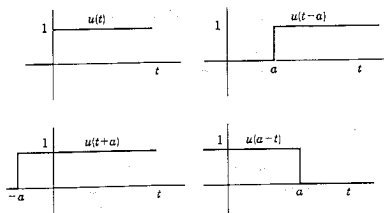


Figura 8-2. La unidad escalón unitario que se ilustra como $u(t)$, trasladada en ambos sentidos con respecto a $t = 0$ e invertida.

La transformada de Laplace de $u(t - a)$ se determina a partir de la ecuación de definición

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (8-3)$$

Cuando $f(t) = u(t - a)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(t - a) &= \int_a^{\infty} 1e^{-st} dt = \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_a^{\infty} \\ \mathcal{L}u(t - a) &= e^{-as} \left(\frac{1}{s} \right) \end{aligned} \quad (8-4)$$

Esta ecuación se compone del producto de dos factores: el factor $1/s$ es la transformada de la función escalón unitario, iniciada para el tiempo $t = 0$; el término e^{-as} es una función que influye en la transformada de una función escalón que no principia en $t = 0$, sino en $t = a$.

El ejemplo que se da para una función escalón unitario se puede generalizar para cualquier función de tiempo $f(t)$ que demore su inicia-

ción para otro tiempo $t = a$. Una función trasladada en el tiempo se representa como sigue:

$$f(t - a)u(t - a) \quad (8-5)$$

Para encontrar la transformada de esa ecuación, se escribe la ecuación de definición en función de una nueva variable, t' , es decir,

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t')e^{-st'} dt' \quad (8-6)$$

Ahora se definirá la variable t' como $t' = t - a$, de tal modo que la ecuación de definición se convierte en

$$F(s) = \int_a^{\infty} f(t - a)e^{-t's} dt \quad (8-7)$$

o bien

$$= \int_a^{\infty} f(t - a)e^{-st}(e^{as}) dt \quad (8-8)$$

El factor constante e^{as} se puede sacar de la integral y el límite inferior de la integral se puede cambiar a 0 si $f(t - a)$ se multiplica por $u(t - a)$, así,

$$F(s) = e^{as} \int_{0-}^{\infty} f(t - a)u(t - a)e^{-st} dt \quad (8-9)$$

Esta expresión integral se reconoce como la transformada de la función de tiempo $f(t - a)u(t - a)$, de tal manera que

$$\mathcal{L}f(t - a)u(t - a) = e^{-as}\mathcal{L}f(t) \quad (8-10)$$

o por el contrario,

$$\mathcal{L}^{-1}e^{-as}F(s) = f(t - a)u(t - a) \quad (8-11)$$

Estas ecuaciones indican que la transformada de cualquier función, atrasada para principiar en el tiempo $t = a$, es e^{-as} veces la transformada de la función cuando principia en $t = 0$. Este es un resultado muy útil, como se verá más adelante, y se conoce como el *teorema de translación real*, o como el *teorema de translación*.

Antes de presentar un ejemplo de la aplicación de este teorema se demostrará, mediante una ilustración, que las funciones escalón unitarias, con una translación adecuada, se pueden utilizar como base para representar otras señales. Sea la señal formada por la diferencia de dos funciones escalón

$$v(t) = u(t) - u(t - a) \quad (8-12)$$

Esas dos funciones se ilustran en la figura 8-3. Su suma es una función que tiene un valor unitario de $t = 0$ a $t = a$ y valor cero para

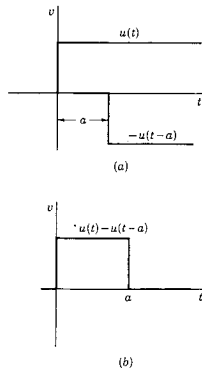


Figura 8-3. Combinación lineal de dos funciones escalón unitario para describir un pulso de amplitud 1 y con duración a .

cualquier otro tiempo. Esta función se describe como un *pulso*, de magnitud unidad y de duración a . Esta descripción se puede generalizar a la forma

$$v(t) = V_0[u(t-a) - u(t-b)] \quad (8-13)$$

que es un pulso de magnitud V_0 y una duración $b-a$, que se inicia para $t=a$.

EJEMPLO 1

Para $t=0$ se aplica un pulso de ancho a a la red RL de la figura 8-4. Se pide que se determine una expresión para la corriente $i(t)$. El pulso se describe mediante la ecuación (8-12) y de acuerdo con la ecuación (8-10) la transformada de $v(t)$ es

$$V(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-as}) \quad (8-14)$$

Al substituir este valor de $V(s)$ en la ecuación de transformada,

$$L[sI(s) - i(0+)] + RI(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-as}) \quad (8-15)$$

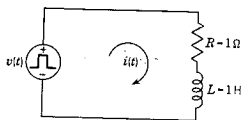


Figura 8-4. Red RL con excitación de pulso.

Se substituyen los valores de los elementos y para las condiciones iniciales $i(0+) = 0$, se obtiene

$$I(s) = \frac{(1 - e^{-as})}{s(s+1)} \quad (8-16)$$

Esta expresión se puede escribir como la suma de términos

$$I(s) = \frac{1}{s(s+1)} - \frac{e^{-as}}{s(s+1)} \quad (8-17)$$

El primer término de esta ecuación se desarrolla con facilidad mediante fracciones parciales y se obtiene

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \quad (8-18)$$

De acuerdo con este desarrollo, la ecuación (8-17) se puede expresar como sigue

$$I(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{e^{-as}}{s} + \frac{e^{-as}}{s+1} \quad (8-19)$$

La transformación inversa de Laplace se puede desarrollar término por término en esta ecuación, para dar

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}I(s) &= i(t) \\ &= (1 - e^{-t})u(t) - [1 - e^{-(t-a)}]u(t - a) \end{aligned} \quad (8-20)$$

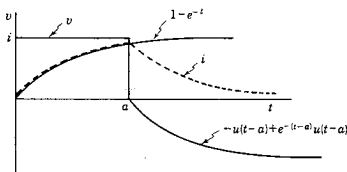


Figura 8-5. La excitación v y las dos partes de la respuesta con su suma, que está representada por la línea punteada.

El tercero y el cuarto término de esta expresión difieren del primero y el segundo sólo en que tienen un traslado en el tiempo y son de signo contrario. La forma de onda que representa esta ecuación aparece graficada en la figura 8-5.

El resultado que se obtuvo en la ecuación (8-20) es el mismo que se encontraría utilizando dos fuentes de voltaje conectadas en serie, una para $u(t)$ y la otra para $u(t - a)$ y, luego, sumando las dos respuestas para encontrar la respuesta total de la ecuación (8-20).

Otro teorema importante es el *teorema de escala* que relaciona los cambios de escala en el dominio s o de la frecuencia con los cambios correspondientes de escala en el dominio t o del tiempo. El término cambio de escala significa que ya sea s o t se multiplica por una constante positiva. Dada una función variable en el tiempo $f(t)$, se cambia la escala al formar una nueva función, $f(t/t_0)$. Su transformada se encuentra como sigue: a partir de la ecuación de definición

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{t_0}\right)\right] = \int_{0^-}^{\infty} f\left(\frac{t}{t_0}\right)e^{-st} dt \quad (8-21)$$

o bien

$$= t_0 \int_{0^-}^{\infty} f\left(\frac{t}{t_0}\right)e^{-s(t_0\tau)/t_0} d\left(\frac{t}{t_0}\right) \quad (8-22)$$

242 Transformadas de otras formas de ondas de señales

Si se hace que $t/t_0 = \tau$, entonces la última ecuación se convierte en

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{t_0}\right)\right] = t_0 \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-t_0 s \tau} d\tau \quad (8-23)$$

Por último, la integral define a $F(t_0 s)$, de tal modo que se puede escribir

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{t_0}\right)\right] = t_0 F(t_0 s) \quad (8-24)$$

La transformada inversa correspondiente es

$$f\left(\frac{t}{t_0}\right) = t_0 \mathcal{L}^{-1}F(t_0 s) \quad (8-25)$$

EJEMPLO 2

De acuerdo con la corriente de transformada

$$I(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad (8-26)$$

el valor correspondiente de $i(t)$ es

$$i(t) = 1 - e^{-t} \quad (8-27)$$

El teorema de escala indica que la nueva función

$$i_1(t) = \mathcal{L}^{-1}I(2s) = 1 - e^{-t/2} \quad (8-28)$$

está relacionada con $i(t)$ en la ecuación (8-27) por un simple cambio de la escala de tiempo. Esta escala de tiempo es importante en el uso de las computadoras analógicas.

8-2. LAS FUNCIONES RAMPA E IMPULSO

Este estudio se iniciará utilizando la ya conocida función escalón unitario. Si esta función representa el voltaje que se aplica a un inductor, entonces la corriente del inductor es

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L dt \quad (8-29)$$

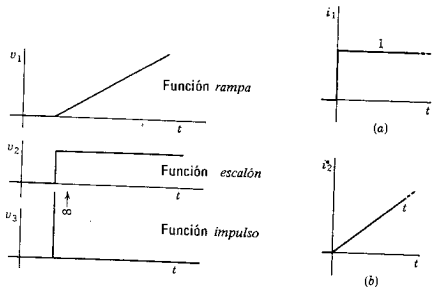
Si $v_L = u(t)$ e $i_L(0) = 0$, $i_L = t/L$ para $t > 0$ y la corriente aumentará linealmente con el tiempo mientras se aplique voltaje constante. Esta respuesta se conoce como *función rampa* (o *rampa lineal*) y es muy útil para describir varias entradas o respuestas. Por ejemplo, una rueda que gira a una velocidad angular constante tiene un desplazamiento angular que es una función rampa.

A continuación se supondrá que la función escalón unitario representa la corriente en un inductor. En este caso el voltaje del inductor está dado por la ecuación

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (8-30)$$

La derivada de $i_L = u(t)$ tiene un valor cero para todos los tiempos excepto el instante en que se produce el escalón es decir para $t = 0$. En este momento la derivada (siendo una pendiente) es infinita. Tal función, que tiene sólo un valor distinto de cero (que es infinito), se conoce como *función impulso*. En la figura 8-6 se muestran las representaciones de las funciones rampa e impulso.

Figura 8-6. Funciones que se relacionan por integración (de abajo hacia arriba) y por derivación (de arriba hacia abajo).



Este estudio se ha relacionado con el inductor, pero es evidente que se pueden obtener los mismos resultados con una base dual para el capacitor. Obviamente, en el caso del inductor y el capacitor el interés se centrará en las funciones relacionadas mediante la diferenciación y la integración. Y, dado que el escalón unitario es una forma de onda importante, también el estudio se relacionará con las rampas y los impulsos.

Dada la función escalón unitario de la figura 8-7(a), se puede integrar tres veces para obtener las tres formas de ondas que se ilustran en (b), (c) y (d) de esta figura. Principiando con la forma de onda de (d), se puede diferenciar también tres veces y volver a la función escalón unitario. En este sentido, cada una de las cuatro funciones de la figura 8-7 es una función unitaria: la diferenciación o integración de una función unitaria da otra función unitaria. Si se va a ampliar este concepto a la derivada de la función escalón unitario y más allá, es necesario definir primero un *impulso unitario*. ¿Qué es un impulso unitario?

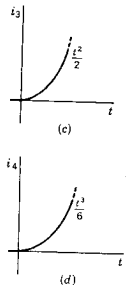


Figura 8-7. (a) Una función escalón unitario y las formas de onda resultantes de una integración (b), dos integraciones (c), y tres integraciones (d).

Sea la función rampa modificada que se muestra en la figura 8-8. La función es una rampa desde $t = b$ hasta $t = c$, y en ese momento

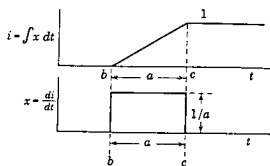


Figura 8-8. La derivada de la función rampa modificada es el pulso. La función impulso unitario queda definida cuando a tiende a cero.

asume el valor constante unitario para todo el tiempo. El intervalo $(c - b)$ se define como a . La derivada de esta función rampa modificada es un pulso con un ancho a , como se indica en la figura (inversamente, la integral de la función pulso es la rampa lineal). Si la función rampa se designa con la variable i , el pulso tiene una magnitud di/dt , que es la pendiente de la rampa. La pendiente de la rampa es la distancia 1 dividida entre la distancia a , es decir

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{a} \quad (8-31)$$

Ahora bien, el área del pulso es $a \times 1/a = 1$, para cualquier valor de a . Conforme a tiende a 0, la función rampa modificada se acerca a una función escalón unitario. Al mismo tiempo, el pulso tiende a una altura infinita y con un ancho cero, *mientras el área permanece cons-*

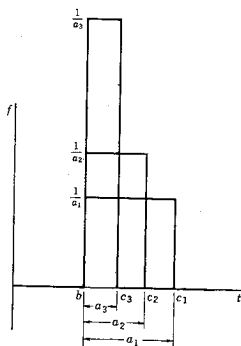


Figura 8-9. Tres pasos en la secuencia de valores más pequeños de a de la figura 8-8, siendo $a_3 < a_2 < a_1$.

tante e igual a 1. En la figura 8-9 se ilustran en secuencia los tres pasos que se acaban de describir. En el límite,¹ esta función se conoce como un impulso unitario,² y se designa como $\delta(t - b)$. Ahora se verá la forma en que el impulso unitario entra en el modelo de la figura 8-7. La integral

$$\int_{-\infty}^t \delta(t - b) dt = 1, \quad t \geq b \\ = 0, \quad t < b \quad (8-32)$$

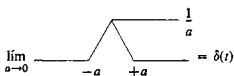
que es la función escalón unitario, $u(t - b)$. O bien, la derivada del escalón unitario es el impulso unitario. Por tanto,

$$\frac{d}{dt} u(t - b) = \delta(t - b) = \infty, \quad t = b \\ = 0, \quad t \neq b \quad (8-33)$$

La función impulso es importante en el análisis de sistemas y se utilizará con frecuencia en los estudios que siguen.³

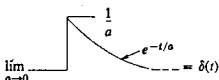
La secuencia de la figura 8-7 se puede ampliar hacia la izquierda tanto como se desee, definiendo otras funciones unitarias. En consecuencia,

¹ Por otro lado, se puede considerar que la función impulso queda definida por los siguientes límites



$$\lim_{a \rightarrow 0} \text{[triangular pulse]} = \delta(t)$$

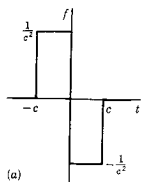
$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi} a} e^{-t^2/a^2} = \delta(t)$$



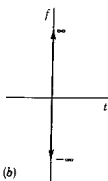
$$\lim_{a \rightarrow 0} \text{[exponential pulse]} = \delta(t)$$

² En física matemática esta función se denomina función delta de Dirac.

³ El lector que se interese en las propiedades matemáticas de las funciones impulso y en un análisis de su justificación en términos de las distribuciones de Schwartz puede consultar S. Seshu y N. Balabanian, *Linear Network Analysis* (John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1959), páginas 112-119, o bien, a un nivel más avanzado, Bernard Friedman, *Principles and Techniques of Applied Mathematics* (John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1956), páginas 136-144, o bien, A. H. Zemanian, *Distribution Theory and Transform Analysis* (McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1965).



(a)



(b)

Figura 8-10. (a) Una función cuyo límite conforme $c \rightarrow 0$ es el doblete unitario que se representa en (b).

$$\delta'(t-b) = \frac{d}{dt}\delta(t-b) = +\infty \quad \text{y} \quad -\infty, \quad t = b \quad (8-34)$$

$$= 0, \quad t \neq b$$

es un *doblete unitario* y es la función que se obtiene como límite cuando $c \rightarrow 0$ en la figura 8-10.

A continuación se volverá al inductor y el capacitor, de acuerdo con los cuales se introdujeron la rampa y el impulso. Con la fuente de voltaje que se muestra en la figura 8-11, la corriente es

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t \delta(t-a) dt = \frac{1}{L} u(t-a) \quad (8-35)$$

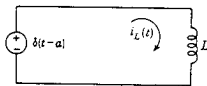


Figura 8-11. Un inductor sometido a un impulso unitario de voltaje de manera que la corriente del inductor cambie instantáneamente.

Esa ecuación indica que un impulso unitario de voltaje aplicado a un inductor hace que de inmediato se establezca una corriente $1/L$ amperios. Este comportamiento es desacomodado en un inductor pero, al mismo tiempo, el impulso de voltaje es también una fuerza impulsora poco común. Se requiere un voltaje infinito para cambiar la corriente instantáneamente en un inductor. Se puede encontrar un resultado similar para el voltaje en un capacitor. Con una fuente de corriente de impulso como la que se muestra en la figura 8-12, el voltaje del capacitor es

$$v_C = \frac{1}{C} u(t-a) \quad (8-36)$$

Por tanto, un impulso unitario de corriente hace que aparezcan instantáneamente $1/C$ volts en las placas del capacitor. Viendo esto de otro modo, la integral de la corriente es la carga, de tal manera que un impulso unitario de corriente corresponde a entregar al capacitor una unidad de carga, lo que da por resultado un cambio de voltaje de $1/C$ unidades.

Este estudio se ha hecho con funciones unitarias; pero los resultados se pueden ampliar con suma facilidad al caso en que las funciones estén multiplicadas por una constante K . En este caso, $K\delta(t)$

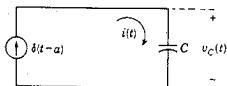


Figura 8-12. Un capacitor sometido a un impulso unitario de corriente de manera que el voltaje de capacitor cambie instantáneamente.

Las funciones rampa e impulso 247

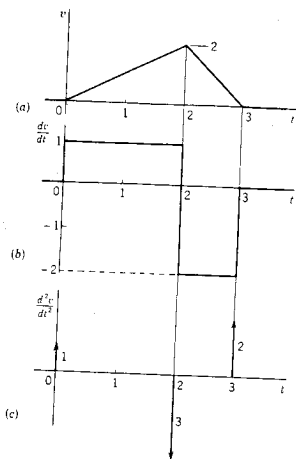


Figura 8-13. (a) Un pulso triangular, (b) su primera derivada y (c) su segunda derivada. La parte (c) de la figura ilustra dos convenciones que se usan para indicar la intensidad del impulso: un número situado a lo largo de la flecha y una longitud variable de ésta.

representa un impulso de área K . Su integral da una función escalón con una altura K y la integral de este escalón produce una rampa con una pendiente K . Una notación que se usa con frecuencia para representar las funciones de impulso se puede introducir aquí en relación con las formas de onda de la figura 8-13. En (a) de esta figura se muestra una forma de onda triangular; su derivada aparece en (b) y la segunda derivada en (c). La segunda derivada incluye tres funciones de impulso. Las funciones de impulso se representan por medio de flechas dirigidas ya sea hacia arriba o hacia abajo, dependiendo del signo del multiplicador constante. El número que aparece al lado de la flecha representa el área del impulso o, si así se desea, la *intensidad* del impulso. A veces las longitudes de las flechas se trazan en proporción al área, como sucede en la figura 8-13(c). La forma de onda consistente en un cierto número de impulsos se conoce como *tren de impulsos*.

Además de ser una función matemática útil, el impulso es una idealización o un modelo para una fuente de energía con una salida

que es muy breve en comparación con la respuesta de la red. En consecuencia, la respuesta de una red a un pulso breve más corto que cualquier constante de tiempo en la respuesta natural de la red, es aproximadamente la respuesta de impulso de la red. El impulso constituye también un modelo para otros sucesos ya conocidos. Por ejemplo, cualquiera que haya recibido un golpe en la cabeza de una veloz pelota de béisbol no pondrá objeción a que este golpe se describa como un impulso. Y con toda seguridad la pelota se había alejado mucho antes de que pudiera haber una respuesta; por ejemplo, que el cuerpo se desplomara a tierra.

La transformada de la función impulso unitario se obtiene de acuerdo con las cantidades que se identifican en la figura 8-14 a partir de la ecuación

$$\delta(t - b) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} [u(t - b) - u(t - b - a)] \quad (8-37)$$

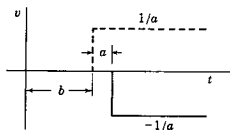


Figura 8-14. Cantidades pertinentes a la ecuación 8-37, de la que se deriva la transformada de Laplace del impulso.

La transformada de Laplace de esta ecuación de límite es

$$\mathcal{L}\delta(t - b) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{e^{-bs} - e^{-(b+a)s}}{as} \quad (8-38)$$

Dicho límite se puede determinar aplicando la regla de l'Hospital, y el resultado es

$$\mathcal{L}\delta(t - b) = e^{-bs} \quad (8-39)$$

en donde b es el tiempo en que aparece la unidad de impulso. Cuando $b = 0$ (es decir, el impulso se produce para $t = 0$), se tiene que

$$\mathcal{L}\delta(t) = 1 \quad (8-40)$$

Este resultado se puede obtener en otra forma, utilizando la ecuación (7-24):

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}u(t)\right] = s\mathcal{L}[u(t)] = 1 \quad (8-41)$$

La transformada de la función rampa $r(t)$ se determina aplicando la ecuación (7-33):

$$\mathcal{L}[r(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t u(t) dt\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s^2} \quad (8-42)$$

De acuerdo con estos ejemplos, se ve claramente el patrón de las ecuaciones de las transformadas de las funciones unitarias. Todas tienen la forma $1/s^k$ y cuando se determina una función a partir de otra, por medio de una derivación, se encuentra una nueva transformada a partir de la otra mediante multiplicación por $1/s$. La tabla siguiente ilustra este resultado.

<i>Función</i>	<i>Transformada de Laplace</i>
Función parabólica unitaria	$1/s^3$
Función rampa unitaria	$1/s^2$
Función escalón unitario	$1/s$
Función impulso unitario	1
Función doblete unitario	s
Función triplete unitario	s^2

EJEMPLO 3

Supóngase que la red de la figura 8-4 se activa mediante una fuente de impulsos en vez de una fuente de pulsos. En este caso $V(s) = 1$ y, con $i(0^-) = 0$, la transformada de la ecuación de voltaje es

$$LsI(s) + RI(s) = 1 \quad (8-43)$$

Substituyendo los valores $L = 1$ y $R = 1$ y resolviendo en función de $I(s)$, se obtiene

$$I(s) = \frac{1}{s+1} \quad (8-44)$$

y

$$i(t) = e^{-t} \quad (8-45)$$

Este ejemplo sencillo ilustra un resultado importante. La respuesta a un impulso queda determinada sólo por las constantes de la red. De ahí que la respuesta al impulso caracterice a la red y se pueda usar con fines de identificación.

8-3. SINTESIS DE LA FORMA DE ONDA

La función escalón y otras funciones derivadas de ella son útiles como unidades fundamentales para construir otras formas de onda. En esta sección se ilustrará esta afirmación con varios ejemplos y también se determinarán las expresiones de transformada para tales formas de onda. En la figura 8-15 se muestran tres métodos por medio de los cuales se puede describir una función pulso con base en funciones escalón. En la sección 8-1 se mostró que sacando la diferencia entre dos funciones escalón,

$$v(t) = u(t - a) - u(t - b) \quad (8-46)$$

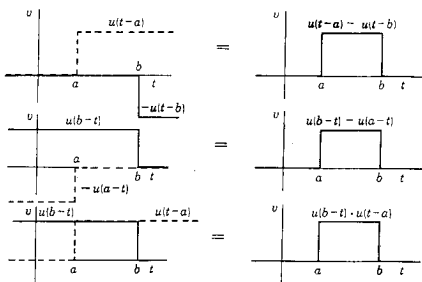


Figura 8-15. Síntesis de un pulso rectangular a partir de varias funciones escalón unitario.

se formaba un *pulso* con una unidad de amplitud de $t = a$ a $t = b$. Se puede formar la misma unidad de pulso mediante la función escalón unitario construyendo unidades estructurales tales como

$$v(t) = u(b - t) - u(a - t) \quad (8-47)$$

o bien

$$v(t) = u(b - t) \cdot u(t - a) \quad (8-48)$$

según se ilustra en la figura 8-15.

Si se usa el mismo razonamiento que en el desarrollo de una función de pulso, supóngase que se desea representar medio ciclo de una onda senoidal, como se indica en la figura 8-16(a). En (b) de esta figura se presenta una onda senoidal definida sólo para el tiempo

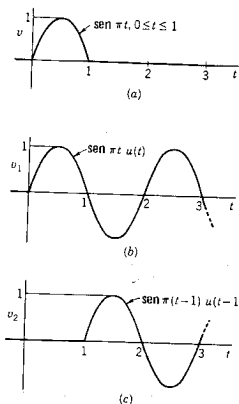


Figura 8-16. (a) Medio ciclo de la onda senoidal o un pulso senoidal que se describe en función de la suma de la onda senoidal de (b) y la onda trasladada de (c).

positivo y cero para todos los tiempos negativos. Esta forma de onda se describe como $\text{sen } \pi t u(t)$. Utilizando el teorema de traslado de la sección 8-1, se observa que la onda senoidal de (c) es la misma que la de (b), sólo que se ha trasladado una unidad a la derecha, de modo que sea $\text{sen } \pi(t-1)u(t-1)$. Puesto que la suma de estas dos formas de onda da el medio ciclo de la onda senoidal que se busca, la representación que se requiere es

$$v(t) = \text{sen } \pi t u(t) + \text{sen } \pi(t-1) u(t-1) \quad (8-49)$$

Al utilizar la transformada de la función seno del capítulo 7 y el teorema del traslado, es evidente que la transformada de medio ciclo de la onda senoidal es

$$V(s) = \frac{\pi}{s^2 + \pi^2} (1 + e^{-s}) \quad (8-50)$$

Como ejemplo más complejo de la síntesis de señales, supóngase que se desea representar la forma de onda de la figura 8-17. Esta forma de onda es senoidal desde $t=1$ hasta $t=3$ y desde $t=5$ hasta $t=7$. Tiene un valor cero para todos los demás tiempos, a partir de $t=-\infty$ hasta $t=+\infty$. Una onda senoidal con un período T se expresa como $\text{sen}(2\pi/T)t$. En este ejemplo en particular $T=2$ y el origen del tiempo se traslada en una unidad de tiempo para la primera onda y en cinco unidades de tiempo para la segunda. A continuación se da

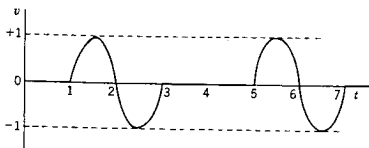


Figura 8-17. Forma de onda sintetizada en función de senoides por medio de la ecuación 8-53.

una secuencia del procedimiento para construir una función que represente esta forma de onda.

- (1) La función $\sin \pi(t - 1)$ tiene la forma de onda que se muestra en el intervalo $t = 1$ a $t = 3$; pero esta forma de onda existe también para todos los demás tiempos.
- (2) Al multiplicar $\sin \pi(t - 1)$ por $u(t - 1)$ se eliminan todas las formas de onda para los tiempos *anteriores* a $t = 1$. Al restar de este producto otro de similar trasladado al tiempo $t = 3$ se cancela la función para todos los tiempos *posteriores* a $t = 3$. Dicho producto es $u(t - 3) \sin \pi(t - 3)$. En consecuencia, el primer ciclo de la onda senoidal se representa por completo mediante la expresión

$$u(t - 1) \sin \pi(t - 1) - u(t - 3) \sin \pi(t - 3) \quad (8-51)$$

- (3) Mediante el mismo razonamiento, el segundo ciclo de la onda senoidal se representa como

$$u(t - 5) \sin \pi(t - 5) - u(t - 7) \sin \pi(t - 7) \quad (8-52)$$

- (4) La forma de onda total es la suma de las dos expresiones. Esto se infiere porque cada función se define sólo para su intervalo (1 a 3 y 5 a 7, respectivamente) y es cero para todos los demás tiempos. En consecuencia, la forma de onda de la figura 8-17 se puede representar mediante la ecuación

$$v(t) = u(t - 1) \sin \pi(t - 1) - u(t - 3) \sin \pi(t - 3) + u(t - 5) \sin \pi(t - 5) - u(t - 7) \sin \pi(t - 7) \quad (8-53)$$

Otra manera de representar esta función se ilustra con la ayuda de la figura 8-18. Por supuesto, el producto de las dos formas de onda es el que aparece en la figura 8-17. Se puede representar el tren de pulsos como *compuertas* que están abiertas cuando tienen el valor 1 y están cerradas cuando son 0. A continuación se representará una com-

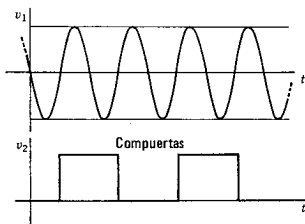


Figura 8-18. Una onda senoidal trasladada medio ciclo y dos funciones compuerta. El producto de v_1 y v_2 da v en la figura 8-17.

puerta que se inicia en el tiempo t_0 y tiene una duración T , como sigue:

$$\square_{t_0, T}(t) = u(t - t_0) - u(t - t_0 - T) \quad (8-54)$$

En este caso, la forma de onda de la figura 8-17 es sencillamente

$$v(t) = -\text{sen } \pi t [\square_{1,2}(t) + \square_{s,2}(t)] \quad (8-55)$$

Asimismo, la forma de onda de la figura 8-16(a) se puede describir como

$$v(t) = \text{sen } \pi t \square_{0,1}(t) \quad (8-56)$$

La función rampa sirve también para construir formas de onda útiles. De acuerdo con la figura 8-19, se ve que una forma de onda

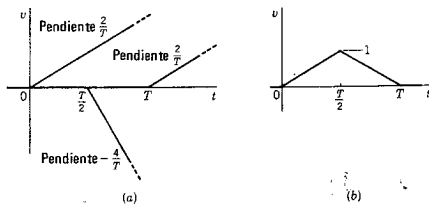


Figura 8-19. Síntesis de un pulso triangular isósceles con funciones rampa.

triangular de altura unitaria y duración de T segs se puede construir a partir de tres funciones rampa. De acuerdo con la figura, es obvio que

$$\Lambda_{0,T}(t) = \frac{2}{T}r(t) - \frac{4}{T}r\left(t - \frac{T}{2}\right) + \frac{2}{T}r(t - T) \quad (8-57)$$

en donde la letra griega *lambda* representa la función triangular y en $\Lambda_{t_0, T}$, t_0 es el tiempo en que principia la forma de onda y T es su duración. Esta notación compacta permite que una forma de onda en diente de sierra se represente mediante la serie infinita

$$v(t) = \Lambda_{0,T} + \Lambda_{T,T} + \Lambda_{2T,T} + \dots \quad (8-58)$$

La transformada de la forma de onda triangular descrita por la ecuación (8-57) se puede determinar a partir de la suma de las transformadas

$$V(s) = \frac{2}{Ts^2} - \frac{4}{Ts^2}e^{-Ts/2} + \frac{2}{Ts^2}e^{-Ts} \quad (8-59)$$

$$= \frac{2(1 - e^{-Ts/2})^2}{s^2} \quad (8-60)$$

A continuación se verá el problema de determinar la transformada de Laplace de una función periódica con un período T . Este tipo de función es el denominado *onda cuadrada*, que se muestra en la figura 8-20. Tal forma de onda se puede representar de acuerdo con una suma infinita de funciones escalón como

$$v(t) = u(t) - 2u(t - a) + 2u(t - 2a) - 2u(t - 3a) + \dots \quad (8-61)$$

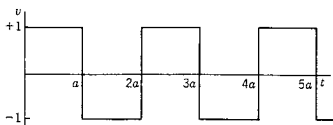


Figura 8-20. Onda rectangular, llamada también onda cuadrada.

La transformación de Laplace se puede aplicar a esta expresión, término a término, para dar

$$V(s) = \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-as}}{s} + 2\frac{e^{-2as}}{s} - 2\frac{e^{-3as}}{s} + \dots \quad (8-62)$$

Al factorizar los términos comunes, la ecuación se convierte en

$$V(s) = \frac{1}{s} [1 - 2e^{-as}(1 - e^{-as} + e^{-2as} - e^{-3as} + \dots)] \quad (8-63)$$

La serie infinita que aparece en esa ecuación se puede identificar con el desarrollo siguiente, de acuerdo con el teorema del binomio;

$$\frac{1}{1 + e^{-as}} = 1 - e^{-as} + e^{-2as} - e^{-3as} + \dots \quad (8-64)$$

de tal modo que $V(s)$ se convierte en

$$V(s) = \frac{1}{s} \left(1 - \frac{2e^{-as}}{1 + e^{-as}} \right) = \frac{1}{s} \left(\frac{1 - e^{-as}}{1 + e^{-as}} \right) \quad (8-65)$$

finalmente,

$$V(s) = \frac{1}{s} \tanh \frac{as}{2} \quad (8-66)$$

El procedimiento delineado en el ejemplo se puede aplicar a cualquier función periódica con un período T que satisfaga a $f(t + nT) = f(t)$, en donde n es un entero positivo o negativo. La transformada de cualquier función de esta índole es

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^T f(t)e^{-st} dt + \int_T^{2T} f(t)e^{-st} dt + \dots \quad (8-67)$$

Trasladando sucesivamente cada término de la transformada por e^{-nsT} , en donde n es el número de traslados necesarios para hacer que los límites de la expresión integral sean de 0 a T , se tiene que

$$F(s) = (1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots) \int_0^T e^{-st} f(t) dt \quad (8-68)$$

Si se utiliza el teorema binomial para identificar la serie,

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt \quad (8-69)$$

Ahora la integral de esta ecuación representa la transformada de $f(t)$, si ésta existiera sólo de 0 a T . Haciendo que esa transformada sea $F_1(s)$, se tiene

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} F_1(s) \quad (8-70)$$

Esta ecuación relaciona a la transformada de una función periódica con la transformada del primer ciclo.

EJEMPLO 4

Se supondrá que se requiere determinar la transformada de un tren de pulsos de un período T , donde cada pulso tiene un ancho a . La transformada de este pulso está dada por la ecuación (8-14). Haciendo las substituciones necesarias en la ecuación (8-70), se obtiene el resultado final

$$F(s) = \frac{1}{s} \frac{1 - e^{-as}}{1 - e^{-Ts}} \quad (8-71)$$

Evidentemente, la ecuación (8-70) es un resultado útil.

Ya se hizo referencia al *tren de impulsos* como una forma de onda que se obtiene al derivar una forma de onda representada a base de funciones escalón. Ahora se necesitará una representación de un tren de impulsos, unitarios espaciados a unidades de tiempo. Un símbolo apropiado para representar este tipo de tren de unidades de impulso es la letra cirílica III, que se pronuncia *shah*. Entonces,

$$\text{III}_a(t) = \delta(t) + \delta(t - a) + \delta(t - 2a) + \dots \quad (8-72)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - na) \quad (8-73)$$

Cuando $\text{III}_a(t)$ se multiplica por una función de tiempo, $f_1(t)$, el producto

$$v^*(t) = f_1(t)\text{III}_a(t) \quad (8-74)$$

se conoce como una *función discreta muestreada*, indicada por el asterisco superior, indicando que $v^*(t)$ tiene un valor sólo para los tiempos en que $t = na$ y, en este caso, $f_1(na)$ representa el área del impulso, (denominado a veces el peso de la función). Por ejemplo, la derivada de la ecuación (8-61), la forma de onda de la figura (8-20), es

$$v_1^*(t) = \delta(t) - 2\delta(t - a) + 2\delta(t - 2a) - \dots \quad (8-75)$$

como se indica en la figura 8-21(b). La función $f_1(t)$ que multiplica a $\text{III}_a(t)$ para representar esta función discreta muestreada es aquella para la que $f_1(0) = 1$ y $f_1(na) = 2(-1)^n$ para $n \neq 0$. La función

$$v_1^*(t) = t\text{III}_a(t) \quad (8-76)$$

es el tren de impulsos que se muestra en la figura 8-21(c). Estos trenes de impulsos se utilizan con mucha frecuencia en el análisis de sistemas de datos muestreados; por ejemplo, los que incluyen una computadora digital en el sistema. También se emplean, haciendo que t represente la distancia espacial, al simbolizar fuentes en la teoría de disposición de antenas

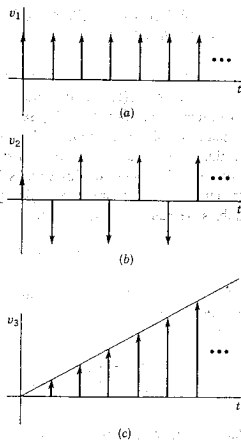


Figura 8-21. Tres diferentes trenes de impulsos.

La transformada de $\mathbf{III}_a(t)$ se calcula con facilidad a partir de la representación en serie de la ecuación (8-73) y

$$\mathbf{III}_a(s) = \mathcal{L}[\mathbf{III}_a(t)] = 1 + e^{-as} + e^{-2as} + \dots \quad (8-77)$$

Esta es la serie de la ecuación (8-68) y se puede escribir en forma abreviada como sigue

$$\mathcal{L}[\mathbf{III}_a(t)] = \frac{1}{1 - e^{-as}} \quad (8-78)$$

Dicho resultado se puede obtener a partir de la ecuación (8-70), observando que, para la función impulso del primer período, $F_1(s) = 1$. Para el tren de impulsos pesado,

$$v_3^*(t) = f_1(t)\mathbf{III}_a(t) = f_1(0) + f_1(a)\delta(t - a) + f_1(2a)\delta(t - 2a) + \dots \quad (8-79)$$

la transformada se convierte en

$$\mathcal{L}[f_1(t)\mathbf{III}_a(t)] = f_1(0) + f_1(a)e^{-as} + f_1(2a)e^{-2as} + \dots \quad (8-80)$$

Como se verá en la sección 8-5, éste es un caso especial de la transformada de un producto de dos funciones del tiempo.

8.4. VALOR INICIAL Y FINAL DE $f(t)$ A PARTIR DE $F(s)$

Con frecuencia es útil determinar el valor inicial y final de una función respuesta $f(t)$ de un modo directo, a partir de la función transformada $F(s)$. Por ejemplo, se puede tener interés en comprobar $F(s)$, para ver si corresponde a determinada condición inicial antes de determinar $f(t)$ a partir de $F(s)$. Esto se logra aplicando dos teoremas que se relacionan con los valores inicial y final de $f(t)$.

Primero se demostrará que si $f(t)$ y su primera derivada son transformables de acuerdo con el método de Laplace, entonces

$$f(0-) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (8-81)$$

Para corroborar esta proposición se hace que s tienda a infinito en la ecuación transformada de Laplace, correspondiente a la derivada de $f(t)$; por tanto,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0-}^{\infty} \left[\frac{df(t)}{dt} \right] e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0-)] \quad (8-82)$$

Puesto que s no es una función de t , se hace que s tienda a infinito antes de integrar. En estas condiciones, la integral tiene un valor cero, de modo que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0-)] = 0 \quad (8-83)$$

o bien

$$f(0-) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (8-84)$$

como se requería.

EJEMPLO 5

Sea la función de transformada

$$I_1(s) = \frac{2s + 5}{(s + 1)(s + 2)} \quad (8-85)$$

Al aplicar la ecuación (8-84) se tiene que

$$i_1(0-) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s^2 + 5s}{s^2 + 3s + 2} = 2 \quad (8-86)$$

Se demostrará que éste es el valor correcto basándose en la transformada inversa de la ecuación (8-85), que es

$$i_1(t) = 3e^{-t} - e^{-2t} \quad (8-87)$$

A continuación se demuestra que si $f(t)$ y su primera derivada se pueden transformar por el método de Laplace, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (8-88)$$

El punto de partida es la ecuación (8-82) evaluada para $s \rightarrow 0$. Puesto que s no es una función de t , se hace que s tienda a cero, de tal modo que $e^{-st} = 1$, y se integra para obtener

$$\int_{0^-}^{\infty} \left[\frac{df(t)}{dt} \right] dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{0^-}^t \left[\frac{df(t)}{dt} \right] dt \quad (8-89)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - f(0^-)] \quad (8-90)$$

Igualando este resultado a la ecuación (8-82), escrita para el límite $s \rightarrow 0$, se llega a la conclusión de que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (8-91)$$

como se requería. Con este resultado se requiere que todas las raíces del denominador de $sF(s)$ tengan partes reales negativas, ya que de otra manera no existe el límite de $f(t)$ cuando t tiende a infinito. Por ejemplo, $\sin \infty$ no tiene un valor definido y e^{∞} es infinita. Por esta razón, la ecuación (8-91) no se aplica en el caso de la excitación senoidal.

EJEMPLO 6

Para la corriente

$$i_2(t) = 5u(t) - 3e^{-2t} \quad (8-92)$$

es evidente que el valor final es 5. Se determinará este mismo resultado aplicando el teorema del valor final. Para el valor dado de $i_2(t)$,

$$I_2(s) = \frac{2s + 10}{s(s + 2)} \quad (8-93)$$

y, de acuerdo con la ecuación (8-91),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i_2(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s + 10}{s + 2} = 5 \quad (8-94)$$

8-5. LA INTEGRAL DE CONVOLUCION

La integral de convolución, que data por lo menos de los días de Duhamel, en 1833,⁴ encuentra aplicaciones en muchos campos, incluyendo teoría de circuitos y control automático. Una aplicación sobresaliente que se estudiará permite evaluar la respuesta de una red a una entrada arbitraria, de acuerdo con la respuesta de impulso de la red. Sean las dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$, que se pueden transformar por el método de Laplace y que tienen las transformadas $F_1(s)$ y $F_2(s)$. El producto de $F_1(s)$ y $F_2(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$, que se obtiene de la *convolución* de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, como lo establece la ecuación

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau) d\tau \quad (8-95)$$

$$= \int_0^t f_2(\tau)f_1(t-\tau) d\tau \quad (8-96)$$

en donde τ es una variable ficticia de t . Las integrales de estas ecuaciones se conocen como *integrales de convolución*. La convolución de $f_1(t)$ y $f_2(t)$ se designa mediante la notación especial

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) \quad (8-97)$$

De acuerdo con esta notación, se observa que

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{L}[f_2(t) * f_1(t)] \\ &= F_1(s)F_2(s) \end{aligned} \quad (8-98)$$

Así, la transformada inversa de Laplace del producto de $F_1(s)$ y $F_2(s)$ se encuentra mediante la *convolución* de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, por la ecuación (8-95), o bien la (8-96).

Al deducir estas ecuaciones se observa que $F(s) = F_1(s)F_2(s)$ se puede expresar como un producto de las integrales de transformadas de Laplace, que incluyen las variables ficticias x y y como sigue

$$F(s) = \left[\int_0^{\infty} f_1(y)e^{-sy} dy \right] \left[\int_0^{\infty} f_2(x)e^{-sx} dx \right] \quad (8-99)$$

Puesto que cada una de las integrales es constante con respecto a la otra variable de integración, la ecuación (8-99) se puede reordenar para tener la siguiente forma:

$$F(s) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_1(y)f_2(x)e^{-s(x+y)} dy dx \quad (8-100)$$

⁴ Para un relato breve del desarrollo de la integral de convolución véase, de M. F. Gardner y J. L. Barnes, *Transients in Linear Systems* (John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1942), páginas 364-365.

En este punto se introducen las nuevas variables t y τ , que se relacionan con x y y por medio de $t = x + y$ y $\tau = x$. Para volver a expresar la ecuación (8-100), de acuerdo con t y τ , es necesario investigar la relación del producto $dy dx$ a $d\tau dt$, y determinar también los nuevos límites de integración. Las áreas diferenciales $dy dx$ y $d\tau dt$ se relacionan, por el Jacobiano⁵ según la siguiente ecuación

$$dy dx = \left| \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial y}{\partial t} \right| d\tau dt \quad (8-101)$$

Al calcular las derivadas parciales requeridas se descubre que $dy dx = d\tau dt$, lo cual significa que las áreas diferenciales son las mismas para los dos sistemas de variables. En las coordenadas x - y los límites de integración se extienden desde 0 hasta infinito tanto para x como para y . Ahora, $t = x + y = \tau + y$. Puesto que el valor más pequeño de y es cero, se infiere que sólo se necesitaría tomar en cuenta $t \geq \tau$. La ecuación $t = \tau$ define una recta en el plano t - τ , a 45 grados con respecto al eje τ , para integrar el área entre la línea $t = \tau$ y $\tau = 0$, se observa que se integra desde $t = 0$ hasta $t = \infty$ y, luego, desde $\tau = 0$ hasta $\tau = t$.

Ahora se puede escribir la ecuación (8-100), con las variables t y τ , como sigue:

$$F(s) = \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt \quad (8-102)$$

Por tanto, a partir de la ecuación de definición de la transformación de Laplace se tiene la identificación,

$$f(t) = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau = f_1(t) * f_2(t) \quad (8-103)$$

que demuestra la validez de la ecuación (8-96). Si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ se intercambian, se puede efectuar la misma derivación para la ecuación (8-95).

Aunque los datos de esta derivación estén bien claros, es importante conocer a fondo las operaciones que se describen en la integral de convolución. A continuación se mostrará, por medio de ejemplos, que la convolución se puede interpretar de acuerdo con cuatro pasos: (1) doblamiento, (2) traslación, (3) multiplicación, (4) integración. Estos cuatro pasos describen el equivalente inglés del vocablo alemán *Faltung*; la integral de convolución se conoce también con el nombre de *integral Faltung*.

⁵ A. E. Taylor, *Advanced Calculus* (Ginn & Company, Boston, 1955), página 428.

EJEMPLO 7

Para este ejemplo, sea $F_1(s) = 1/s$ y $F_2(s) = 1/s + 1$, de tal modo que $f_1(t) = u(t)$ y $f_2(t) = e^{-t}u(t)$. Por convolución, se desea determinar

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t u(t - \tau)e^{-\tau} d\tau \quad (8-104)$$

Los pasos para aplicar la convolución a estas dos funciones se ilustran en la figura 8-22, en donde $f_1(t)$ y $f_2(t)$ se muestran en (a), y $f_1(\tau)$ y $f_2(\tau)$ en (b), lo que es un paso elemental una vez que se sabe lo que se busca. En (c) se han "doblado" las funciones alrededor de la línea $t = 0$ y en (d) se ha trasladado algún valor típico de t , como se describe en la sección 8-1. En (e) de la figura 8-22 se ha efectuado la multiplicación indicada dentro de la integral de las ecuaciones (8-95) y (8-96). La integración del área sombreada da un punto

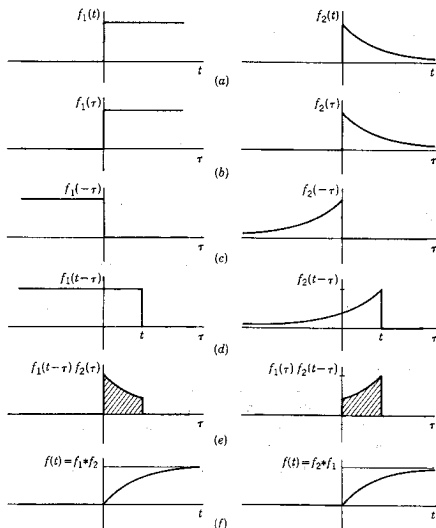


Figura 8-22. Pasos de la convolución de f_1 con f_2 en (a) para obtener $f = f_1 * f_2$ en el paso (f) de la figura.

de la curva $f(t)$ para el valor de t seleccionado en el paso (d). Al efectuar los pasos de multiplicación e integración para diferentes valores de t , como se muestra en la figura 8-23, se obtiene la respuesta $f(t)$, tal como se señala en (d) de la misma figura. Para este ejemplo sencillo, la integración de la ecuación (8-104) es fácil y da

$$f(t) = \int_0^t e^{-\tau} d\tau = 1 - e^{-t} \quad (8-105)$$

que es, por supuesto, la transformada inversa de Laplace del producto de $F_1(s)$ y $F_2(s)$.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s+1)} \right] \quad (8-106)$$

como lo establece la ecuación (8-95).

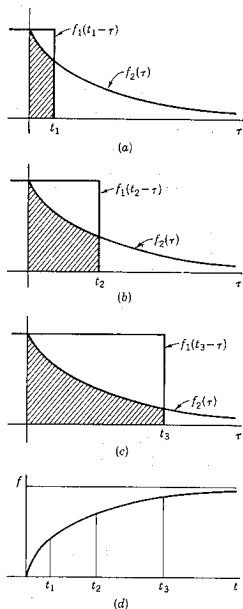


Figura 8-23. El paso (e) de la figura 8-22 repetido para tres valores de y . El área sombreada representa el valor de $f(t)$ que se muestra en (d) de la figura para tres valores de tiempo.

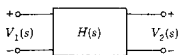


Figura 8-24. Red de dos puertos descrita por la ecuación 8-107.

Sea la siguiente red con los pares de terminales que se ilustra en la figura 8-24. En el capítulo 10 se demostrará que si todas las condiciones iniciales de la red son cero, entonces las transformadas del voltaje de entrada y salida se relacionan mediante una ecuación de la forma

$$V_2(s) = H(s)V_1(s) \quad (8-107)$$

en donde $H(s)$ se conoce como *función de transferencia*, que relaciona a los dos voltajes: $V_1(s)$, la transformada del voltaje de entrada, y $V_2(s)$, la transformada del voltaje de salida. Puesto que $V_2(s)$ de la ecuación (8-107) se expresa como un producto de las transformadas, se tiene una aplicación evidente de la integral de convolución. Por tanto,

$$v_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)V_1(s)] = \int_0^t v_1(\tau)h(t-\tau) d\tau \quad (8-108)$$

$$= \int_0^t v_1(t-\tau)h(\tau) d\tau \quad (8-109)$$

en donde las dos formas corresponden a las ecuaciones (8-95) y (8-96). Ahora, si $v_1(t) = \delta(t)$, entonces la transformada de la unidad de impulso es $V_1(s) = 1$. En estas circunstancias, $V_2(s) = H(s)$, o bien $v_2(t) = h(t)$ es la *respuesta al impulso* de la red, al mismo tiempo que es la transformada inversa de la función de transferencia $H(s)$. Al igual que se encontrará que la función de transferencia caracteriza a la red, también la respuesta de impulso es característica de la red.

Las ecuaciones (8-108) y (8-109), indican que, si se conoce $h(t)$, la respuesta al impulso, sólo se necesita especificar el voltaje de entrada $v_1(t)$ para poder determinar el voltaje de salida por convolución. En otras palabras, cualquier entrada en convolución con la respuesta al impulso unitario dará la salida.

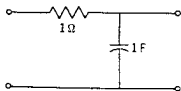


Figura 8-25. Forma específica de la red general de la figura 8-24, que se considera en el ejemplo 8.

EJEMPLO 8

Para ilustrar el uso de la ecuación (8-108) ó (8-109), véase la red que aparece en la figura 8-25. Para esta red se observa que $V_1(s) = I + (1/s)I$, y $V_2(s) = (1/s)I$, de tal manera que

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = H(s) = \frac{1}{s+1} \quad (8-110)$$

De acuerdo con la tabla de las transformadas, se encuentra que

$$h(t) = e^{-t} \quad (8-111)$$

es la respuesta al impulso unitario de la red. Entonces, según la integral de convolución, la salida para el voltaje de entrada $v_1(t) = e^{-2t}$ es

$$v_2(t) = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} e^{-\tau} d\tau \quad (8-112)$$

o bien

$$v_2(t) = e^{-2t}(e^t - 1) = e^{-t} - e^{-2t} \quad (8-113)$$

Para este ejemplo en particular, el desarrollo por medio de fracciones parciales es más directo. Para formas más complicadas de entrada se puede utilizar con ventaja la integral de convolución.

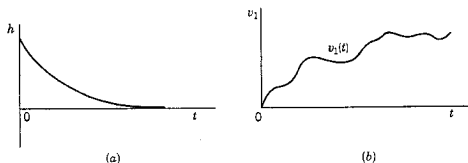


Figura 8-26. La respuesta al impulso de la red de la figura 8-25 y (b) una entrada arbitraria para la que se encuentra la respuesta aplicando convolución.

Supóngase que se desea determinar la respuesta de una red cuya respuesta al impulso se ilustra en la figura 8-26(a) para la entrada arbitraria que se muestra en la figura 8-26(b). Es evidente que esto se puede lograr efectuando la convolución de las dos funciones del tiempo de la figura. Los pasos que permiten lograr ello se muestran en la figura 8-27, con las mismas operaciones que se presentaron antes en la figura 8-22. De acuerdo con esta figura, se pueden hacer dos observaciones: (1) para esta entrada arbitraria, los pasos de multiplicación e integración se deben efectuar gráficamente o por medio de operaciones gráficas equivalentes, utilizando computadora digital o analógica. (2) La operación de multiplicar la entrada $v_1(\tau)$ por la respuesta al impulso trasladada $h(t - \tau)$ y luego integrar de 0 a t se puede considerar el equivalente de *pesar* todos los valores pasados de la entrada con la respuesta al impulso. Esto se ilustra en la figura 8-28, donde aparecen superpuestas las formas de onda de la figura 8-27(a) y (c). Al aumentar t , $h(t - \tau)$ se traslada hacia la derecha, ilustrándose esto para los tiempos crecientes t_1 , t_2 y t_3 . Cuando esto sucede, el producto de las dos funciones que se muestra como el área sombreada de la figura 8-27(d) cambia y también varía la salida $v_2(t)$. Esto se puede visuali-

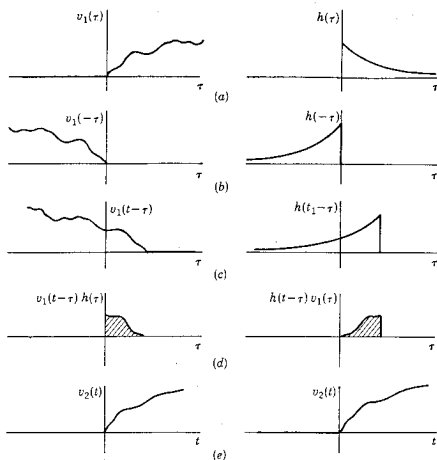


Figura 8-27. Los pasos de convolución para una entrada arbitraria v_1 con la respuesta al impulso, para obtener la salida v_2 .

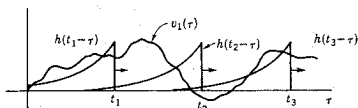


Figura 8-28. La respuesta al impulso como una función de barrido o exploración.

lizar como si $h(t-\tau)$ se deslizara o *barriera* $v_1(\tau)$, dando origen al nombre de $h(t-\tau)$ que se conoce como *función de barrido*. Conforme se hace el barrido de la figura 8-28, la salida en cualquier momento se determina principalmente con valores recientes de la entrada. Los valores "muy viejos" de entrada tienen muy poco efecto en la salida actual, aunque, hablando en forma estricta, se puede ver que la salida actual se determina gracias a toda la historia anterior de la entrada pesada con la respuesta al impulso. Este resulta un modo útil de visualizar la forma de la respuesta que se obtiene al excitar una red o un sistema.

La integral de la convolución 267

TABLA 8-1. RESUMEN DE LAS OPERACIONES DE TRANSFORMADAS

Nombre de la operación	$f(t)$	$F(s)$
Definición	$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$
Operaciones lineales		
Suma	$f_1(t) \pm f_2(t)$	$F_1(s) \pm F_2(s)$
Multiplicación por una constante	$Kf(t)$	$KF(s)$
Ambas operaciones	$a_1 f_1(t) \pm a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) \pm a_2 F_2(s)$
Derivación		
Primera derivada	$\frac{d}{dt} f(t)$	$sF(s) - f(0-)$
Segunda derivada	$\frac{d^2}{dt^2} f(t)$	$s^2 F(s) - sf(0-) - \frac{df}{dt}(0-)$
Tercera derivada	$\frac{d^3}{dt^3} f(t)$	$s^3 F(s) - s^2 f(0-) - s \frac{df}{dt}(0-) - \frac{d^2 f}{dt^2}(0-)$
Integración		
Primera integral	$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{F(s)}{s}$
Primera integral	$\int_{-\infty}^t f(t) dt = f^{(-1)}(t)$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0-)}{s}$
Segunda integral	$\int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t f(t) dt dt = f^{(-2)}(t)$	$\frac{F(s)}{s^2} + \frac{f^{(-1)}(0-)}{s^2} + \frac{f^{(-2)}(0-)}{s}$
Traslación	$f(t-a)u(t-a)$ $e^{at}f(t)$	$e^{-as}F(s)$ $F(s-a)$
Escala		
Escala de tiempo	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Escala de magnitud	$af(t)$	$aF(s)$
Funciones periódicas	$f(t) = f(t+nT)$ n es un entero	$\frac{1}{1 - e^{-nTs}} F_1(s)$ en donde $F_1(s) = \int_0^T f(t)e^{-st} dt$
Convolución	$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau) d\tau$ $\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau) d\tau$	$F_1(s)F_2(s)$ $F_1(s)F_2(s)$
Multiplicación por t	$tf(t)$ $t^n f(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$ $(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
Multiplicación por e	$e^{-\alpha t} f(t)$	$F(s+\alpha)$
Valor inicial	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) =$	$= \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
Valor final	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) =$	$= \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ siempre que los polos de $sF(s)$ queden en el semiplano izquierdo

Otra forma de visualizar la función de barrido se basa en la observación de que, puesto que $F(s) \cdot 1 = F(s)$ y $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$, entonces, de acuerdo con la ecuación (8-95),

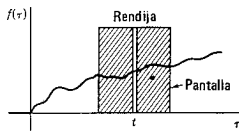
$$\int_0^t f(\tau)\delta(t - \tau) d\tau = f(t) \quad (8-114)$$

lo cual significa que la convolución de $f(t)$ con $\delta(t)$, $f(t) * \delta(t)$ da sencillamente $f(t)$. Conforme la t de $\delta(t - \tau)$ varía desde 0 hasta ∞ , se reproduce $f(t)$. Aunque ésa es una operación inútil, permite identificar a $\delta(t - \tau)$ como la función de barrido. En la figura 8-29 el impulso para $\tau = t$ se ha substituido por una pantalla con una rendija vertical angosta, que es más ilustrativa de la operación de barrido o exploración. Conforme la rendija barre de cero a infinito, se produce a $f(t)$. Dado que la integral de la ecuación (8-114) tiene un valor diferente a cero sólo cuando $\tau = t$, se pueden substituir los límites con $-\infty$ y ∞ sin perder la generalidad, y la operación de barrido se puede extender sobre los nuevos límites para reproducir $f(t)$ en cualquier tiempo. En otras palabras,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau) d\tau = f(t) \quad (8-115)$$

Algunos de los resultados de esta sección se resumen en la tabla 8-1.

Figura 8-29. La función impulso, representada por una rendija, que se usa como función de barrido.



8-6. CONVOLUCION COMO UNA SUMA

En la evaluación de la integral de convolución mediante una computadora digital y en muchas aplicaciones de ingeniería es necesario reemplazar la integral con una suma finita. Los pasos para lograr esto se ilustran para la ecuación

$$v_2(t) = \int_0^t v_1(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad (8-116)$$

En primer lugar, se substituye el término infinitesimal $d\tau$ por un intervalo T de ancho finito y se hace que $nT = \tau$. A continuación, se escribe la ecuación (8-116) como la suma

$$v_2(t) = T \sum_{n=0}^K v_1(nT)h(t - nT) \quad (8-117)$$

para

$$KT \leq t < (K + 1)T \quad (8-118)$$

en donde K es uno de los valores del entero n . En forma desarrollada la ecuación (8-117) es

$$v_2(t) = T[v_1(0)h(t) + v_1(T)h(t - T) + v_1(2T)h(t - 2T) + \dots] \quad (8-119)$$

Este resultado se puede interpretar con la ayuda de la figura 8-30, en donde se presentan las formas de onda correspondientes a los términos individuales de esta ecuación. Cada término es la respuesta al impulso por la magnitud $v_1(nT)$, que se multiplica más tarde por T , y trasladada a una distancia apropiada a lo largo del eje t . La suma de los términos de la ecuación (8-119) se aproxima a la función $v_2(t)$. Por supuesto, la exactitud de la aproximación dependerá del tamaño de T ; ya que mientras más pequeña sea T , tanto mejor será la aproximación. En el límite, T se convierte en $d\tau$ y el resultado es exacto.

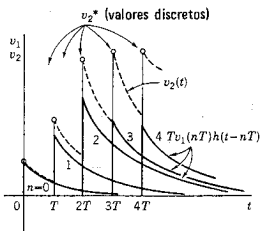


Figura 8-30. Valores discretos de la respuesta v_2 obtenidos al considerar la convolución como suma. La $v_2(t)$ que se ilustra mediante líneas punteadas se encuentra a partir de la ecuación (8-119).

Si los valores de $v_2(t)$ se calculan sólo para puntos escogidos del tiempo, KT , entonces la ecuación (8-117) se convierte en

$$v_2^*(t) = v^2(KT) = \sum_{n=0}^K v_1(nT)h(K-n)T \quad (8-120)$$

en donde el asterisco indica una función discreta muestreada, como en la ecuación (8-74). Este postulado significa que la ecuación (8-120) no es una función continua, sino que se representa por medio de números reales para cada valor entero de K . Si se usa la ecuación (8-117), se puede calcular v_2 para todos los valores de t , como se muestra en la figura 8-30, con una ecuación diferente para cada intervalo que señala la ecuación (8-118).

Si se usa la alternativa de la integral de convolución correspondiente a la ecuación (8-116), es decir,

$$v_2(t) = \int_0^t h(\tau)v_1(t-\tau) d\tau \quad (8-121)$$

entonces la forma de la ecuación de aproximación es

$$v_2(t) = T \sum_{n=0}^K h(nT)v_1(t-nT) \quad (8-122)$$

Los pasos para determinar $v_2(t)$ se ilustran en la representación de esta ecuación, que aparece en la figura 8-31. Las operaciones básicas son demora en el tiempo, multiplicación por una constante y suma. Estos pasos se pueden efectuar utilizando una línea de transmisión con derivaciones para obtener los diferentes valores de las demoras de tiempo, un amplificador de ganancia ajustable puesto a los valores de $Th(nT)$ y un amplificador sumador o totalizador, como el que se usa en las computadoras analógicas para efectuar la suma.

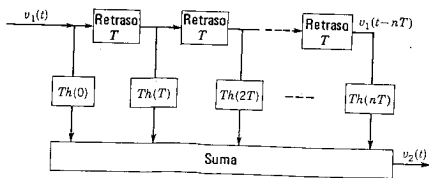


Figura 8-31. Diagrama de flujo que ilustra los pasos comprendidos en la determinación de la respuesta usando la ecuación (8-122).

EJEMPLO 9

Para ilustrar el uso de las ecuaciones de esta sección para calcular $v_2(t)$, considérense las dos formas de onda de la figura 8-32, la (a)

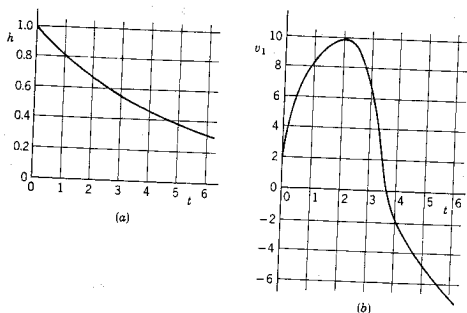


Figura 8-32. (a) Respuesta al impulso y (b) entrada para la cual se determina la salida por convolución.

para $h(t)$ y la (b) para $v_1(t)$. Se utilizarán los valores de estas formas de onda para calcular $v_2(5)$ mediante la ecuación (8-120). De acuerdo

	0	1	2	$\frac{n}{3}$	4	5	6
$h(nT)$	1.00	.819	.670	.549	.449	.368	.301
$v_1(nT)$	2.0	8.3	9.8	6.8	-1.8	-4.8	-7.2
$v_1[(5-n)T]$	-4.8	-1.8	6.8	9.8	8.3	2.0	0
$v_1[(5-n)T]h(nT)$	-4.8	-1.47	4.56	5.38	3.73	.74	0

con las figuras, se prepara la siguiente gráfica, observando que, para este ejemplo, $T=1$.

Las dos primeras líneas se toman de las gráficas de la figura 8-32 y la tercera se obtiene copiando la línea 2 en sentido inverso, en el rango de n desde 0 hasta 5. La cuarta línea es el producto de la línea 1 y la 3. Cuando se suman los números de la línea 4, se obtiene 8.14; en consecuencia,

$$v_2(5) = 8.14$$

(8-123)

Si se hace una computación similar para cada valor de n , se obtendrá $v_2^*(t)$. En este ejemplo se incluyó la sexta columna para demostrar que, puesto que $v_1[(5-n)T]$ es cero para n mayor que 5, la serie termina en $n=5$ y es pequeño el número de cálculos necesarios para un valor pequeño de n . Esta aproximación particular es deficiente, debido a que el intervalo T es demasiado grande para la rapidez a la que varía $v_1(t)$. Para realizar un estudio posterior más detallado de este ejemplo, véanse los problemas 8-77 y 8-78.

BIBLIOGRAFIA

- ASELTINE, JOHN A., *Transform Method in Linear System Analysis*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1958. En el capítulo 8 se presenta un excelente estudio del tema.
- CHIRLIAN, PAUL M., *Basic Network Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969, capítulo 5.
- COOPER, GEORGE R. y CLARE D. MCGILLEM, *Methods of Signal and System Analysis*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., Nueva York, 1967. Capítulos 6 y 7.
- HAYT, WILLIAM H., Jr. y JACK E. KEMMERLY, *Engineering Circuit Analysis*. 2.^a edición, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1971, capítulo 19.
- KUO, FRANKLIN F., *Network Analysis and Synthesis*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1962, capítulo 2.
- MANNING, L. A., *Electric Circuits*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1966, capítulos 11, 17, 18 y 19.
- STRUM, ROBERT D. y JOHN R. WARD, *Laplace Transform Solution of Differential Equations* (texto programado), Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1968.

EJERCICIOS PARA COMPUTADORA DIGITAL

Puesto que los temas de este capítulo son una continuación de los del capítulo 7, los ejercicios que se sugieren en el final de este último son también apropiados para el presente. Además es de interés la integración numérica de funciones por medio de computadora, aplicadas a la convolución, y se pueden encontrar ejercicios correspondientes en las referencias del apéndice E-2.4. Por ejemplo, véase la referencia 7 de Huelsman, citada en el apéndice E-10, capítulos 2 y 3, la referencia 12 de McCracken en el apéndice E-10, especialmente el caso de estudio 22.

PROBLEMAS

- 8-1. Escriba una ecuación para la forma de onda no recurrente de la siguiente figura, como combinación lineal de funciones escalón.

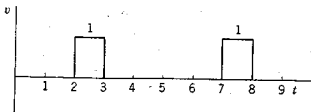


Fig. P8-1.

- 8-2. Escriba la ecuación para la forma de onda que se ilustra en la siguiente figura, de acuerdo con una combinación lineal de funciones escalón.

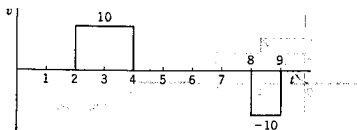


Fig. P8-2.

- 8-3. La forma de onda que se muestra en la figura que sigue es de tipo senoidal en el intervalo de $t=0$ a $t=1$ y es un triángulo isósceles en el intervalo de $t=2$ a $t=3$. Para todos los demás valores de t , v es cero. Escriba una ecuación para $v(t)$, utilizando funciones escalón, rampa y senoideas.

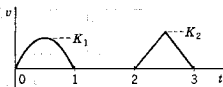


Fig. P8-3.

- 8-4. La forma de onda que sigue es del tipo no recurrente. Escriba una ecuación para $v(t)$, en términos de funciones escalón y rampa, así como de las funciones afines, conforme sea necesario.

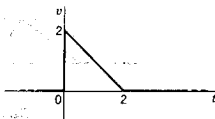


Fig. P8-4.

- 8-5. La forma de onda que se ilustra en la figura siguiente es no recurrente. Escriba una ecuación para $v(t)$ en términos de función escalón y las funciones afines, según sea necesario.

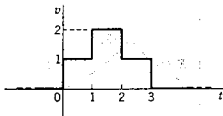


Fig. P8-5.

274 *Transformadas de otras formas de ondas de señales*

- 8-6. La forma de onda que se muestra en la siguiente figura es de tipo no recurrente. Escriba una ecuación para esta forma de onda, $v(t)$.

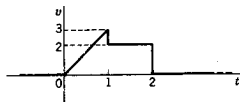


Fig. P8-6.

- 8-7. La figura que sigue ilustra una forma de onda compuesta de segmentos rectos. Para esa forma de onda escriba una ecuación de $v(t)$ en términos de funciones escalón, rampa y forma de onda que se requieran.

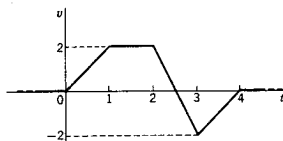


Fig. P8-7.

- 8-8. Repita el problema 8-7 para la forma de onda que se muestra a continuación.

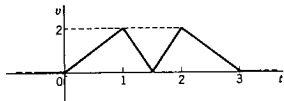


Fig. P8-8.

- 8-9. El pulso parabólico que se muestra en la figura siguiente se produce una sola vez. Escriba una ecuación para $v(t)$, utilizando funciones multiplicadas por las funciones escalón trasladadas que sean apropiadas.

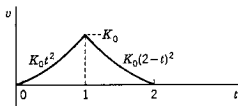


Fig. P8-9.

- 8-10. En la forma de onda de esta figura, v salta al valor b para $t=0$ y, a continuación, se reduce exponencialmente al valor a para $t=c$, y entonces, cae a cero. Después, el ciclo se repite con magnitudes negativas. Escriba una expresión para esta forma de onda, utilizando funciones escalón.

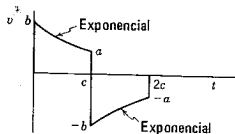


Fig. P8-10.

- 8-11. A la red RL de la figura que sigue se aplica un pulso de voltaje de 10 V y 5 μ seg de duración. (a) Si $R=2$ ohms y $L=10$ μ H, encuentre $i(t)$ y grafique esta forma de onda. (b) Repita la parte (a) si $R=2$ ohms y $L=2$ μ H. (c) Repita la parte (a), cuando $R=2$ ohms y $L=5$ μ H.

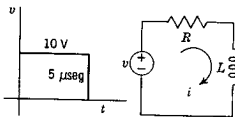


Fig. P8-11.

- 8-12. A la red RC que se muestra a continuación se aplica un pulso de 10 V de magnitud y con una duración de 5 μ seg. Determine la corriente y grafique la forma de onda de ésta, si: (a) $R=100$ ohms y $C=0.05$ μ F. (b) $R=100$ ohms y $C=0.02$ μ F.

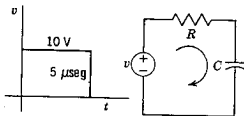


Fig. P8-12.

- 8-13. Repita el problema 8-12, determinando el voltaje a través del capacitor, $v_C(t)$.
- 8-14. La forma de onda que se muestra a continuación se conoce como *rampa truncada* y se utiliza para representar una función escalón unitario que tiene un tiempo de iniciación diferente de cero. Utilice esta forma de onda en vez del pulso rectangular que se aplicó en el problema 8-11. Encuentre y grafique $i(t)$, si $t_0=1$ μ seg.

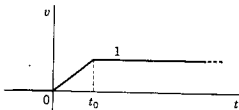


Fig. P8-14.

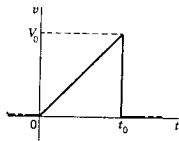


Fig. P8-22.

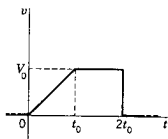


Fig. P8-23.

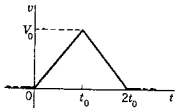


Fig. P8-24.

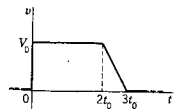


Fig. P8-25.

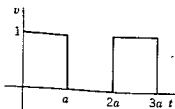


Fig. P8-27.

- 8-15. Utilice la forma de onda del problema 8-14 para $v(t)$ y resuelva el problema 8-12.
- 8-16. Use la forma de onda del problema 8-14 para $v(t)$ y resuelva el problema 8-13.
- 8-17. La forma de onda que se ilustra en la figura que sigue se denomina *escalera*. (a) Suponiendo que la escalera que se muestra no se repite, escriba una ecuación para la misma con funciones escalón unitario. (b) Si

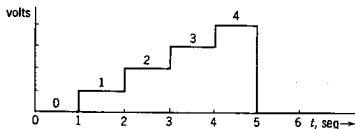


Fig. P8-17.

este voltaje se aplicara a un circuito RL , en serie, con $R = 1$ ohm y $L = 1$ H, encuentre la corriente $i(t)$ y grafique su forma de onda, utilizando las mismas coordenadas que la escalera.

- 8-18. Determine la transformada $V(s)$ para $v(t)$ del problema 8-1.
- 8-19. Se tiene una función rampa que ha sido trasladada hacia arriba y que se describe mediante la ecuación

$$f_1 = K(t + t_0)u(t), \quad t_0 > 0$$

(a) Grafique $f_1(t)$. (b) Determine $F_1(s)$.

- 8-20. Una función rampa que ha sido trasladada hacia abajo está dada por

$$f_2 = K(t - t_0)u(t), \quad t_0 > 0$$

(a) Grafique $f_2(t)$. (b) Determine $F_2(s)$.

- 8-21. Encuentre la transformada de la forma de onda que se da en el problema 8-3.
- 8-22. Determine la transformada $V(s)$ para $v(t)$, que se indica en la siguiente figura.
- 8-23. La forma de onda que se muestra en la figura que sigue es una rampa truncada terminada. Para esta $v(t)$, determine la transformada $V(s)$.
- 8-24. La forma de onda que se ilustra en la figura se compone de un solo pulso triangular. Para esta, $v(t)$, determine la transformada correspondiente $V(s)$.
- 8-25. Determine la transformada $V(s)$ para $v(t)$, tal como se describe en la figura. Compare el resultado con el que se encontró en el problema 8-22.
- 8-26. Determine la transformada de la forma de onda de escalera del problema 8-17.
- 8-27. Demuestre que la transformada de la onda cuadrada es

$$F(s) = \frac{1}{s(1 + e^{-as})}$$

- 8-28. La forma de onda que se muestra en la figura corresponde a un voltaje rectificado de onda completa. La ecuación de la forma de onda es sen t

desde 0 hasta π , -sen t desde π hasta 2π , etc. Demuestre que la transformada de esta función es

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \coth \frac{\pi s}{2}$$

- 8-29. La forma de onda que se muestra es un voltaje de barrido que se utiliza para desviar el haz de un osciloscopio de rayos catódicos. Demuestre que la transformada de esta función es

$$F(s) = \frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}$$

- 8-30. Determine la transformada de la forma de onda de voltaje que se muestra en la figura.

- 8-31. La forma de onda de escalera del problema 8-17 termina para $t=5$. Considere una escalera que se extienda hasta el infinito y que para $t = n\tau_0$ salte al valor $n+1$, como una superposición de funciones escalon unitario. Determine la transformada de Laplace de esta forma de onda.

- 8-32. Una escalera que aumenta geoméricamente es semejante a la que se describe en el problema 8-31, pero con una amplitud que aumenta para $t = n\tau_0$ al valor $(n+1)^2$. Encuentre la transformada de Laplace de esta forma de onda.

- 8-33. La forma de onda que se muestra a continuación se compone de un tren de pulsos cuya magnitud disminuye exponencialmente. Para los valores numéricos que se dan en esta figura, encuentre la transformada de Laplace de la forma de onda $F(s)$.

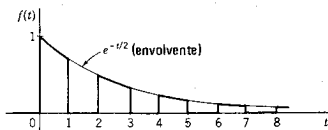


Fig. P8-33.

- 8-34. Encuentre $\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)]$ utilizando la convolución para las siguientes funciones:

- (a) $F_1 = 1/(s - a)$, $F_2 = 1/(s - a)$
- (b) $F_1 = 1/(s + 1)$, $F_2 = s/(s + 2)$
- (c) $F_1 = 1/(s^2 + 1)$, $F_2 = 1/(s^2 + 1)$
- (d) $F_1 = s/(s + 1)$, $F_2 = 1/(s^2 + 1)$
- (e) $F_1 = 1/(s + a)$, $F_2 = 1/(s + b)(s + c)$

- 8-35. Determine $\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)]$ mediante la integral de convolución para las siguientes funciones

- (a) $F_1 = 1/s$, $F_2 = 1/(s + 1)$
- (b) $F_1 = 1/s(s + 1)$, $F_2 = 1/(s + 2)$
- (c) $F_1 = 1/s^2$, $F_2 = s/(s^2 + 4)$
- (d) $F_1 = s/(s + 1)$, $F_2 = 1/[(s + 1)^2 + 1]$

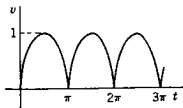


Fig. P8-28.

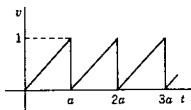


Fig. P8-29.

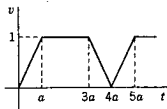


Fig. P8-30.

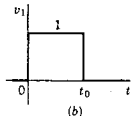
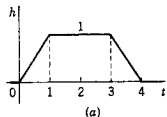


Fig. P8-36.

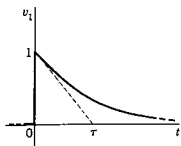


Fig. P8-37.

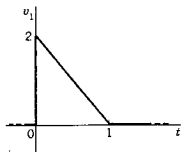


Fig. P8-38.

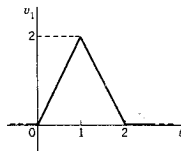


Fig. P8-39.

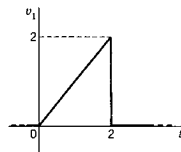


Fig. P8-40.

8-36. Sea una red cuya respuesta al impulso se puede aproximar por medio de las rectas que se muestran en la figura. Suponga que todas las condiciones iniciales de la red con cero para $t = 0^-$. Por convolución, determine la respuesta de la red al voltaje de entrada que se indica en la parte (b) de la figura, si (a) $t_0 = 3$, (b) $t_0 = 4$ y (c) $t_0 = 1$. Para cada caso, grafique $v_2(t)$, dando valores numéricos para las pendientes, las magnitudes importantes, etc.

8-37. Sea la respuesta al impulso que se muestra en (a) de la figura del problema 8-36. Sin embargo, para este problema la entrada de la red se muestra en la figura adjunta. Mediante convolución, determine la respuesta de la red cuando la entrada tiene (a) $\tau = 1$ y (b) $\tau = 3$.

8-38. Véase la respuesta al impulso que aparece en (a) de la figura del problema 8-36. Haga la convolución de dicha respuesta con la función de entrada que se muestra en la figura.

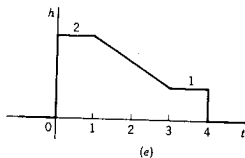
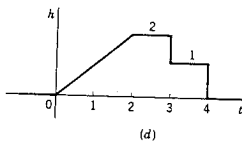
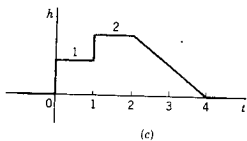
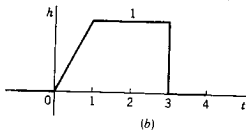
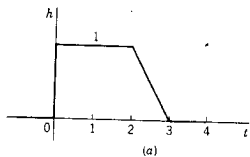
8-39. Para este problema, la respuesta al impulso es la que se ilustra en la figura del problema 8-36, que aparece como (a), y la entrada es la que se muestra en la figura. Haga la convolución de $h(t)$ y $v_1(t)$ para determinar la respuesta $v_2(t)$.

8-40. Considere la respuesta al impulso que se muestra en (a) de la figura del problema 8-36. Haga la convolución de dicha respuesta al impulso con la función de entrada que se indica en la siguiente figura, para obtener la respuesta de la red.

Sea una red que tiene una respuesta específica al impulso $h(t)$ y también una entrada específica $v_1(t)$. Suponga que todas las condiciones iniciales de la red son cero para $t = 0^-$. Usando convolución gráfica, debe encontrar la función de respuesta $v_2(t)$. En la siguiente gráfica se tabulan varias combinaciones de las figuras, para funciones compuestas de segmentos rectos.

	Forma de onda $h(t)$	$v_1(t)$ (dado en la figura:)
8-41.	(a)	P8-36(b) con $t_0 = 1$
8-42.	(a)	P8-37 con $\tau = 1$
8-43.	(a)	P8-38
8-44.	(a)	P8-39
8-45.	(a)	P8-40
8-46.	(b)	P8-36(b) con $t_0 = 1$
8-47.	(b)	P8-37 con $\tau = 1$
8-48.	(b)	P8-38
8-49.	(b)	P8-39
8-50.	(b)	P8-40
8-51.	(c)	P8-36(b) con $t_0 = 1$
8-52.	(c)	P8-37 con $\tau = 1$
8-53.	(c)	P8-38
8-54.	(c)	P8-39

8-55.	(c)	P8-40
8-56.	(d)	P8-36(b) con $t_0 = 1$
8-57.	(d)	P8-37 con $\tau = 1$
8-58.	(d)	P8-38
8-59.	(d)	P8-39
8-60.	(d)	P8-40
8-61.	(e)	P8-36(b) con $t_0 = 1$
8-62.	(e)	P8-37 con $\tau = 1$
8-63.	(e)	P8-38
8-64.	(e)	P8-39
8-65.	(e)	P8-40



Figs. P8-41 to P8-65.

8-66. Haga la convolución de la función

$$h(t) = \sqrt{t}, \quad 0 < t \leq 1$$

0, todos los demás valores de t

con la función

$$v_1(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 2$$

0, todos los demás valores de t

para dar $v_2(t) = h(t) * v_1(t)$. Muestre el método que se ha aplicado.

8-67. La respuesta al impulso de una red está dada por la ecuación $h(t) = H_0 e^{-t/\tau}$. La entrada de esta red es una onda que es un pulso continuamente diferenciable, formado de líneas rectas y segmentos parabólicos, como se indica en la figura que sigue. El pulso requiere $2 \mu\text{seg}$ para crecer parabólicamente y luego se hace perfectamente recto durante $3 \mu\text{seg}$ y luego su pendiente decrece de tal manera que la forma de onda es simétrica. Se sabe que la constante de tiempo τ está dentro del rango de la mitad al doble de la duración del pulso de entrada.

- (a) Grafique la salida de la red con toda la precisión posible, haciendo alguna suposición en lo que respecta al valor de τ
 (b) Describa un método que permita determinar la constante de tiempo τ a partir de un gráfico de la salida para la entrada que se especifica.

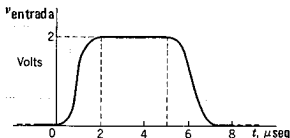


Fig. P8-67.

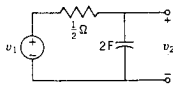


Fig. P8-70.

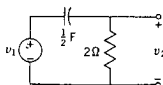


Fig. P8-71.

8-68. Las pruebas realizadas en una red mostraron que la corriente de salida era $i(t) = -2e^{-t} + 4e^{-3t}$, cuando se aplicó repentinamente la unidad de voltaje a las terminales de entrada, para $t=0$. ¿Qué voltaje se debe aplicar para obtener una corriente de salida de $i(t) = 2e^{-t}$ si la red permanece igual que para la prueba anterior?

8-69. Una red tiene una función de transferencia $H_1(s)$ y la respuesta al impulso del sistema se aproxima en la forma de onda que se muestra en la figura del problema 8-36, parte (b), en donde h substituye a v_1 y $t_0 = 1$. Tres de estas redes se conectan entre sí, de tal modo que la función general de transferencia del nuevo sistema es $H_3(s) = [H_1(s)]^3$. Mediante el método de convolución, encuentre la respuesta al impulso del nuevo sistema, $h_3(t)$.

8-70. Sea la red RC de la figura, en donde v_1 se toma con la forma de onda del problema 8-4, con $K_0 = 1$. Utilice la integral de convolución para determinar $v_2(t)$.

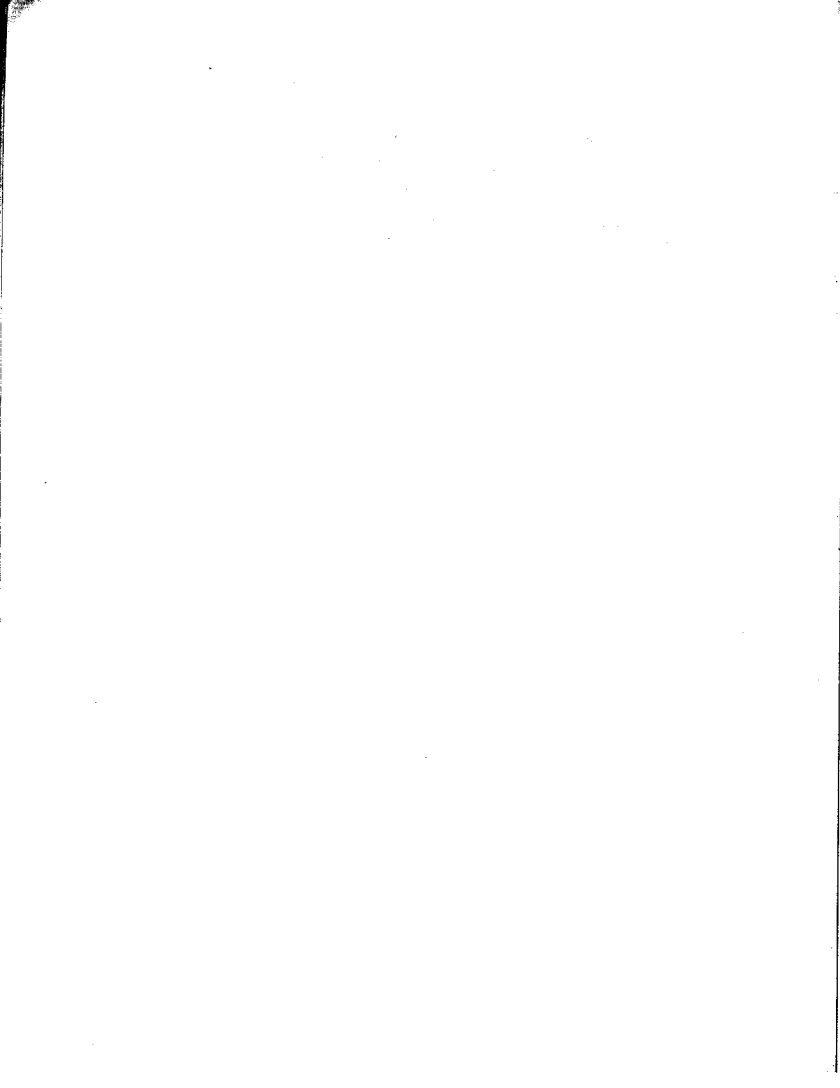
8-71. Repita el problema 8-70 para la red de la figura pero con la misma forma de onda v_1 .

8-72. Usando la integral de convolución, demuestre el teorema de traslación de la ecuación (8-11).

8-73. Haga la convolución de $f(t)$ con $u(t)$ para demostrar que

$$\mathcal{L} \int_0^t f(t) dt = \frac{1}{s} F(s)$$

- 8-74. Demuestre la validez de las entradas de la tabla 8-1 que se describen como "multiplicación por t " y "multiplicación por e^{-at} ".
- 8-75. En el ejemplo 9 de la sección 8-6 se proporciona el primer paso en la determinación de la respuesta de una red que utiliza una convolución aproximada. Efectúe la suma para suficientes valores de K , de modo que se pueda graficar la respuesta $y_2(t)$.
- 8-76. Vuelva a desarrollar el ejemplo 9 de la sección 8-6 y su continuación, como se describe en el problema 8-75, utilizando un intervalo que sea la mitad del intervalo que se emplea en la sección 8-6.



CAPITULO 9

9 Funciones de impedancia y teoremas de red

El método operacional que se estudió por medio de la transformación de Laplace se utiliza en este capítulo para introducir los conceptos de impedancia y admitancia. También se presentan varios teoremas de red con representación operacional de las fuentes y elementos de una red.

9-1. CONCEPTO DE FRECUENCIA COMPLEJA

La solución de las ecuaciones diferenciales de redes ha dado origen a funciones en el dominio del tiempo de la forma

$$K_n e^{s_n t} \quad (9-1)$$

en donde s_n es un número complejo, una raíz de la ecuación característica, expresado como

$$s_n = \sigma_n + j\omega_n \quad (9-2)$$

En este caso, ω_n , que es la parte imaginaria de s_n , se interpreta como *frecuencia angular* y aparece en las ecuaciones en el dominio del tiempo en las formas

$$\text{sen } \omega_n t \quad \text{o} \quad \text{cos } \omega_n t \quad (9-3)$$

La frecuencia angular tiene dimensiones de radianes por segundo y se puede expresar en función de la frecuencia f_n en hertz, o del período T en segundos, por medio de la ecuación

$$\omega_n = 2\pi f_n = \frac{2\pi}{T} \quad (9-4)$$

De acuerdo con la ecuación (9-2) se observa que σ_n y ω_n deben tener dimensiones idénticas. La dimensión de ω_n es (tiempo)⁻¹, ya que el radián es una cantidad sin dimensión (puesto que es *longitud* de arco entre *longitud* de radio). La dimensión de σ_n debe ser "algo" por unidad de tiempo. Como σ_n aparece como un factor exponencial,

$$I = I_0 e^{\sigma_n t} \quad (9-5)$$

de tal modo que

$$\sigma_n = \frac{1}{t} \ln \frac{I}{I_0} \quad (9-6)$$

es evidente que el "algo" por unidad de tiempo debe ser una unidad logarítmica sin dimensión. La unidad que se acostumbra para el logaritmo natural es el neper,¹ por lo que la dimensión de σ es el *neper por segundo*.

La suma compleja

$$s_n = \sigma_n + j\omega_n \quad (9-7)$$

se define como *frecuencia compleja*. La parte imaginaria de la frecuencia compleja es la *frecuencia angular* (o frecuencia real), y la parte real de la frecuencia compleja es la de frecuencia *neper*² (en vez de utilizar el término confuso "frecuencia imaginaria"). La interpretación física de la frecuencia compleja que aparece en la exponencial $e^{s_n t}$ se estudiará tomando en cuenta diversos casos especiales del valor de s_n .

- (1) Sea $s_n = \sigma_n + j0$ y sea σ_n con valores positivos, cero y negativos. La función exponencial de la ecuación (9-1) se convierte en $K_n e^{\sigma_n t}$, una función exponencial que aumenta exponencialmente para $\sigma_n > 0$ y disminuye (o decrece) exponencialmente para $\sigma_n < 0$. Cuando $\sigma_n = 0$, o sea que $s_n = 0 + j0$, la exponencial se convierte en

$$K_n e^{s_n t} = K_n e^{0t} = K_n \quad (9-8)$$

¹ La palabra se deriva del vocablo *Neperus*, que es la forma latina del nombre de Napier, matemático del siglo XVI.

² Los primeros en utilizar los términos *frecuencia angular* y *frecuencia neper* fueron H. A. Wheeler y W. H. Higgins. El término *frecuencia compleja* fue usado por los pioneros de la teoría de circuitos, como Heaviside (alrededor de 1900), Kennelly (1915) y Vannevar Bush (1917).

una cantidad que no varía con el tiempo y que, en términos de la corriente y del voltaje, se describe como "corriente directa". La variación en función del tiempo para las tres posibilidades del valor real de s_n se ilustra en la figura 9-1.

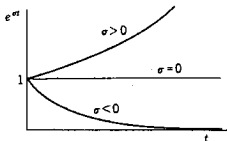


Figura 9-1. Gráficas de e^{at} para a positiva, cero y negativa. En este caso a es la frecuencia neper.

- (2) Sea $s_n = 0 \pm j\omega_n$ (sólo frecuencia angular). En este caso el factor exponencial se convierte en

$$K_n e^{\pm j\omega_n t} = K_n (\cos \omega_n t \pm j \operatorname{sen} \omega_n t) \quad (9-9)$$

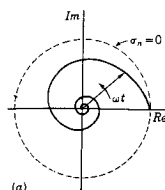
de acuerdo con la identidad de Euler. La exponencial $e^{\pm j\omega_n t}$ se interpreta casi siempre en función del modelo físico (que no tiene un significado físico real, de un *fasor* giratorio unitario,³ cuyo sentido de rotación queda determinado por el signo. El signo positivo $e^{+j\omega_n t}$ implica una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj (o positivo), en tanto que el signo negativo, $e^{-j\omega_n t}$, implica una rotación en el sentido de las manecillas del reloj (o negativo). Para rotaciones positivas, la parte real de $e^{j\omega_n t}$ (o la proyección sobre el eje real) varía en función del coseno de $\omega_n t$, en tanto que la parte imaginaria (o la proyección sobre el eje imaginario) varía con el seno de $\omega_n t$. Este concepto se ilustra en la figura 9-2. La variación de la función exponencial con el tiempo es senoidal y corresponde al caso del estado senoidal permanente.

- (3) Sea $s_n = \sigma_n + j\omega_n$ (éste es el caso general y la frecuencia es compleja). Para este caso,

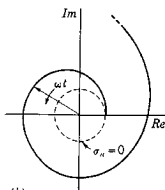
$$K_n e^{s_n t} = K_n e^{(\sigma_n + j\omega_n)t} = K_n e^{\sigma_n t} e^{j\omega_n t} \quad (9-10)$$

Dicha expresión muestra que una exponencial de esta índole tiene una variación en el tiempo que es el producto del resultado de $s_n = \sigma_n$ y de $s_n = \pm j\omega_n$. Un término se representa por medio del modelo giratorio de fasor, y el otro término median-

³ Es probable que el lector esté más familiarizado con el término *vector* que con el de *fasor*. El fasor se estudiará más detalladamente en el capítulo 11. Por ahora, el fasor es una representación en el plano complejo que se caracteriza por su magnitud y su fase o ángulo con respecto a una referencia.



(a)



(b)

Figura 9-3. (a) Fasor giratorio que decrece exponencialmente, y (b) fasor giratorio que crece exponencialmente

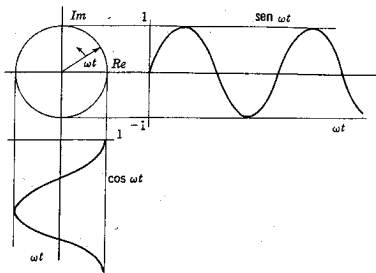


Figura 9-2. Un fasor giratorio unitario con su proyección imaginaria que es el seno, y su proyección real, el coseno.

te una función que aumenta o disminuye exponencialmente. Se puede considerar que el resultado es un fasor giratorio cuya magnitud varía con el tiempo. En la figura 9-3 se ilustra este tipo de fasores. Las proyecciones real e imaginaria de este fasor son

$$\text{Re}(e^{st}) = e^{\sigma_n t} \cos \omega_n t \quad (9-11)$$

y

$$\text{Im}(e^{st}) = e^{\sigma_n t} \text{sen } \omega_n t \quad (9-12)$$

Estas proyecciones para σ_n positivo y negativo se muestra en la figura 9-4. Para $\sigma_n < 0$, la forma de onda se conoce como *senoide amortiguada*; para $\sigma_n > 0$ las oscilaciones crecen exponencialmente.

En esta exposición se observa que no hay realmente nada nuevo en el concepto de la frecuencia compleja. Su parte imaginaria, la frecuencia angular (o real), corresponde a oscilaciones. La parte real de la frecuencia compleja —frecuencia neper— corresponde a un decrecimiento exponencial o a un crecimiento exponencial (dependiendo del signo) o bien a ninguna variación para una frecuencia neper igual a cero. Se ha hablado de funciones exponenciales que varían con el tiempo. Puesto que el papel de los dos “tipos” de frecuencia es el mismo, a pesar de que las consecuencias son diferentes, se unifican estos dos conceptos en un solo nombre: frecuencia compleja.

Se debe tener un cuidado constante en lo que respecta a las dificultades semánticas en el uso de la palabra “imaginario” como una parte

Impedancia transformada y circuitos transformados 287

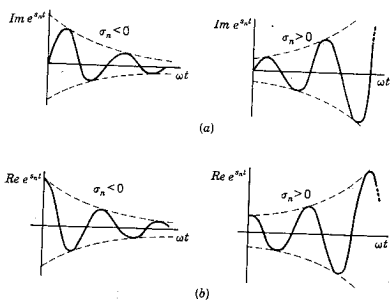


Figura 9-4. Proyecciones imaginaria y real de los fasores giratorios de la figura 9-3. Cada forma de onda queda descrita mediante la frecuencia compleja $s = \sigma + j\omega$.

de una cantidad compleja. La parte imaginaria de una cantidad *no* es físicamente imaginaria (es decir, invisible o fantástica) en el sentido de que no es físicamente real. Se han tomado los vocablos "real" e "imaginario" que utilizan los matemáticos para designar dos partes distintas de una cantidad o función (que con frecuencia se reinterpreta de acuerdo con la magnitud y la fase). Lo "imaginario" de que hablan los matemáticos no tiene ningún significado respecto al universo físico que nos rodea.

9-2. IMPEDANCIA TRANSFORMADA Y CIRCUITOS TRANSFORMADOS

A continuación se determina la representación de una red para cada uno de sus elementos en función de la *impedancia transformada* (o *admitancia*) y de *fuentes para las condiciones iniciales*.

Resistencia. La expresión en el dominio de tiempo que relaciona al voltaje con la corriente para el resistor está dada por la ley de Ohm en las formas

$$v_R(t) = R i_R(t) \quad \text{o} \quad i_R(t) = G v_R(t), \quad G = \frac{1}{R} \quad (9-13)$$

Las ecuaciones de transformada correspondiente son

$$V_R(s) = R I_R(s) \quad \text{o} \quad I_R(s) = G V_R(s) \quad (9-14)$$

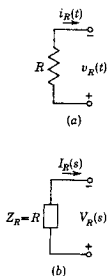


Figura 9-5. El resistor y la representación de su impedancia transformada.

Ahora, el cociente de $V_R(s)$ e $I_R(s)$ se define como la impedancia transformada del resistor; por consiguiente,

$$\frac{V_R(s)}{I_R(s)} = Z_R(s) = R \quad (9-15)$$

La recíproca de esta relación es la admitancia transformada para el resistor, que es

$$\frac{I_R(s)}{V_R(s)} = Y_R(s) = G \quad (9-16)$$

Tal resultado indica que el resistor no es sensible a la frecuencia, incluso a la frecuencia compleja. Como se verá a continuación, éste no es el caso de otros elementos.

La ya conocida representación de red para el voltaje y la corriente hacia el resistor se ilustra en la figura 9-5(a). La representación para la transformada correspondiente es la de la figura 9-5(b), en la que se indican los sentidos de referencia para la transformada del voltaje y la transformada de la corriente.

Inductancia. La relación en el dominio del tiempo entre el voltaje y la corriente en un inductor se expresa mediante las siguientes ecuaciones.

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

y

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L(t) dt \quad (9-17)$$

La ecuación equivalente de transformada para la expresión del voltaje es

$$V_L(s) = L[sI_L(s) - i_L(0-)] \quad (9-18a)$$

Y reagrupando los términos se tiene que

$$SLsI_L(s) = V_L(s) + Li_L(0-) \quad (9-18b)$$

En esta expresión $V_L(s)$ es la transformada del voltaje aplicado y $Li_L(0-)$ es la transformada del voltaje que se produce debido a la corriente inicial en el inductor. Al designar como $V_1(s)$ la transformada del voltaje, que es la suma de la transformada del voltaje aplicado y del voltaje debido a la corriente inicial, se observa que la impedancia transformada para el inductor se convierte en

$$\frac{V_1(s)}{I_L(s)} = Z_L(s) = Ls \quad (9-19)$$

La representación de la transformada de una red con inductor con corriente inicial se encuentra a partir de la ecuación (9-18b) y se ilustra en la figura 9-6(a). Obsérvese que $V_L(s)$ es la transformada del voltaje del inductor de impedancia transformada Ls .

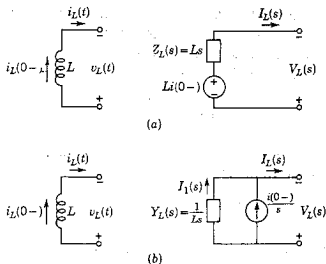


Figura 9-6. El inductor con corriente inicial y su representación de transformada en función de (a) la impedancia y (b) la admitancia.

La ecuación de transformada para la expresión de la corriente de la ecuación (9-17) es

$$I_L(s) = \frac{1}{L} \left[\frac{V_L(s)}{s} + \frac{v_L^{-1}(0-)}{s} \right] \quad (9-20)$$

La integral del valor inicial $v_L^{-1}(0+)$ se puede evaluar de acuerdo con el flujo concatenado Li como

$$v_L^{-1}(0-) = \int_{-\infty}^0 v_L(t) dt \Big|_{t=0-} = Li_L(0-) \quad (9-21)$$

La ecuación para $I_L(s)$ se puede volver a expresar como sigue

$$I_L(s) = \frac{1}{L} \frac{V_L(s)}{s} + \frac{i_L(0-)}{s} \quad (9-22)$$

o bien

$$\frac{1}{Ls} V_L(s) = I_L(s) - \frac{i_L(0-)}{s} \quad (9-23)$$

En esta ecuación $i_L(0-)/s$ es la transformada de una fuente equivalente de corriente que resulta de la corriente inicial en el inductor. Al

designar la transformada de la corriente en $Y_L(s)$ como $I_1(s) = I_L(s) - i_L(0-)/s$ la admitancia transformada se convierte en

$$\frac{I_1(s)}{V_L(s)} = Y_L(s) = \frac{1}{Ls} \quad (9-24)$$

Por tanto, el diagrama equivalente de la transformada contiene una admitancia con un valor de $1/Ls$ y la transformada de una fuente equivalente de corriente que se define por la ecuación (9-23). Esta representación esquemática equivalente del diagrama en el dominio de tiempo se muestra en la figura 9-6(b). Se observa que

$$Z_L(s) = \frac{1}{Y_L(s)} = Ls \quad (9-25)$$

Capacitancia. La relación en el dominio del tiempo entre el voltaje y la corriente para un capacitor está dada como

$$i_c(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} \quad \text{y} \quad v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(t) dt \quad (9-26)$$

La ecuación equivalente de transformada para la expresión del voltaje es

$$V_c(s) = \frac{1}{C} \left[\frac{I_c(s)}{s} + \frac{q(0-)}{s} \right] \quad (9-27)$$

en donde $q(0-)/C$ es el voltaje inicial del capacitor, que es $-V_0$ debido al sentido de referencia del voltaje. Esta ecuación se puede escribir como sigue:

$$\frac{1}{Cs} I_c(s) = V_c(s) + \frac{V_0}{s} \quad (9-28)$$

Al designar la transformada del voltaje de $Z_C(s)$ como $V_1(s) = V_c(s) + (V_0/s)$, la relación de la transformada del voltaje a la transformada de la corriente es

$$\frac{V_1(s)}{I_c(s)} = Z_C(s) = \frac{1}{Cs} \quad (9-29)$$

En consecuencia, el capacitor con una carga inicial tiene un diagrama equivalente transformado con una impedancia $1/Cs$ en serie con una fuente de voltaje cuya transformada es $-v_c(0-)/s$. En la figura 9-7(a) se ilustra el diagrama de esta combinación.

La ecuación de transformada para la expresión de la corriente en la ecuación (9-26) es

$$I_c(s) = C[sV_c(s) - v_c(0-)] \quad (9-30)$$

o bien

$$C_s V_c(s) = I_c(s) - CV_0 \quad (9-31)$$

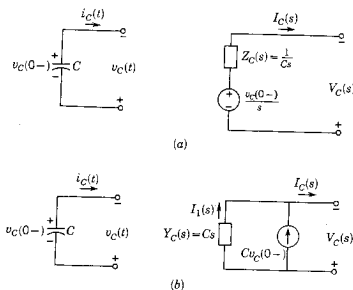


Figura 9-7. El capacitor con voltaje inicial y su representación de transformada en función de (a) la impedancia y (b) la admitancia.

Si se designa la transformada de la corriente en $Y_C(s)$ como $I_1(s) = I_C(s) - CV_0$, la relación entre la transformada de la corriente a la transformada del voltaje se convierte en

$$\frac{I_1(s)}{V_C(s)} = Y_C(s) = Cs \quad (9-32)$$

El capacitor con una carga inicial tiene una representación esquemática equivalente de transformada con una admitancia Cs en paralelo con una fuente de corriente cuya transformada tiene un valor igual a CV_0 . Este diagrama esquemático aparece en la figura 9-7(b). Para el capacitor,

$$Z_C(s) = \frac{1}{Y_C(s)} = \frac{1}{Cs} \quad (9-33)$$

El modelo que representa una red por medio de redes transformadas que se han ilustrado para los tres elementos pasivos se puede ampliar para redes más complicadas. Por ejemplo, la fuente controlada que se vio en el capítulo 2 se describe por medio de la ecuación

$$v_2(t) = \mu v_1(t) \quad (9-34)$$

La ecuación correspondiente de transformada es

$$V_2(s) = \mu V_1(s) \quad (9-35)$$

Las dos redes correspondientes a estas ecuaciones, la (9-34) y la (9-35), se ilustran en la figura 9-8.

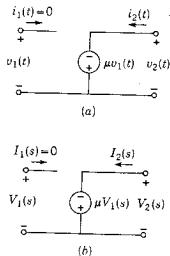


Figura 9-8. (a) Una fuente de voltaje controlado y (b) su representación de transformada.

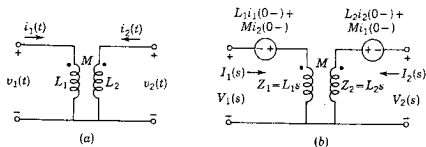


Figura 9-9. (a) Un transformador y (b) su representación de transformada con generadores de voltaje para sus condiciones iniciales.

Se tiene otro ejemplo en el transformador, que se vio primeramente en el capítulo 2, con las marcas de referencia de polaridad tal como se indican en la figura 9-9(a). Los voltajes y las corrientes del transformador están relacionadas por medio de las ecuaciones de la ley de voltajes de Kirchoff

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \quad (9-36)$$

$$v_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \quad (9-37)$$

Las ecuaciones correspondientes de transformadas son

$$V_1(s) = L_1 s I_1(s) - L_1 i_1(0^-) + M s I_2(s) - M i_2(0^-) \quad (9-38)$$

$$V_2(s) = M s I_1(s) - M i_1(0^-) + L_2 s I_2(s) - L_2 i_2(0^-) \quad (9-39)$$

y la representación de red transformada es la que aparece en la figura 9-9(b), en la que las condiciones iniciales de la red se representan por medio de dos fuentes de voltaje.

De acuerdo con los ejemplos de esta sección, se pueden sacar las siguientes conclusiones:

- (1) Para elementos individuales, la *impedancia transformada* se define como la relación de la transformada del voltaje del elemento a la transformada de la corriente en el elemento, $V(s)/I(s)$, para una corriente inicial cero en un inductor y un voltaje inicial cero en un capacitor.
- (2) La relación recíproca, con las mismas restricciones de la condición inicial, es la *admitancia transformada*.
- (3) En las redes transformadas, las condiciones iniciales se representan por medio de fuentes de voltaje o corriente.

A continuación se ampliará esta exposición de elementos individuales a redes más complejas.

9-3. COMBINACIONES DE ELEMENTOS EN SERIE Y EN PARALELO

Véase la combinación en serie de los elementos que se muestran en la figura 9-10(a). Se supondrá que en todos los conductores la corriente inicial es cero y que es cero también el voltaje inicial de todos los capacitores. De acuerdo con la ley de voltajes de Kirchoff, la suma

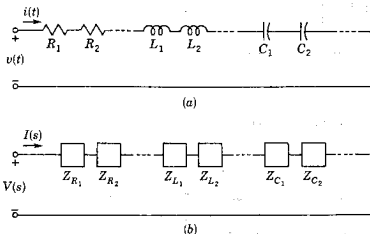


Figura 9-10. (a) Resistores, inductores y capacitores conectados en serie, y (b) su representación de transformada correspondiente.

de los voltajes de los elementos es igual al voltaje aplicado, $v(t)$. La ecuación de transformada que indica este resultado es

$$V(s) = V_{R_1}(s) + \dots + V_{L_1}(s) + \dots + V_{C_1}(s) + \dots \quad (9-40)$$

Al dividir esta ecuación entre $I(s)$ y reconociendo que la relación del voltaje de cada elemento dividido entre la corriente de dicho elemento es la impedancia, se tiene que

$$Z(s) = Z_{R_1}(s) + \dots + Z_{L_1}(s) + \dots + Z_{C_1}(s) + \dots \quad (9-41)$$

o bien

$$Z(s) = \sum_{k=1}^n Z_k(s) \quad (9-42)$$

para la combinación en serie de los elementos, en donde n es el número total de los elementos en serie de todos los tipos.

La red con impedancias transformadas de la figura 9-10(b) representa a las ecuaciones (9-41) ó (9-42) y confirma para la red serie la esperanza intuitiva de que cada elemento de la red se pueda substituir por medio de su impedancia transformada para determinar la red transformada.

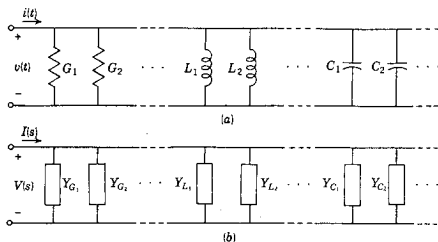


Figura 9-11. (a) Resistores, inductores y capacitores conectados en paralelo, y (b) su representación correspondiente por admitancias.

Por supuesto, se debe reconocer que al efectuar esta suma *no* se están combinando los elementos. Por el contrario, sólo se está sumando una característica típica del elemento (su impedancia) y se agrega a la característica de otro elemento.

A continuación se verá la combinación en paralelo de los elementos que se ilustran en la figura 9-11(a). Al igual que antes, se supondrá que todas las condiciones iniciales son cero. Para la red en paralelo, el voltaje $v(t)$ es común a todos los elementos. De acuerdo con la ley de las corrientes de Kirchhoff, la suma de las corrientes en los elementos es igual al total de corriente que se suministra a la red; en otras palabras,

$$i(t) = i_{G_1}(t) + \dots + i_{L_1}(t) + \dots + i_{C_1}(t) + \dots \quad (9-43)$$

y la ecuación correspondiente de transformada es

$$I(s) = I_{G_1}(s) + \dots + I_{L_1}(s) + \dots + I_{C_1}(s) + \dots \quad (9-44)$$

Si esta ecuación se divide entre $V(s)$ y si se reconoce que la relación de la transformada de la corriente a la transformada del voltaje es la admitancia transformada, se obtiene como resultado

$$Y(s) = Y_{G_1}(s) + \dots + Y_{L_1}(s) + \dots + Y_{C_1}(s) + \dots \quad (9-45)$$

o bien

$$Y(s) = \sum_{k=1}^n Y_k(s) \quad (9-46)$$

para una combinación de elementos en paralelo, en donde n es el número total de todos los tipos de elementos en paralelo.

Para una red serie-paralelo se pueden utilizar sucesivamente las reglas para la combinación de impedancia y admitancia para reducir una red a una sola impedancia o admitancia equivalente. Este procedimiento se ilustrará con varios ejemplos.

EJEMPLO 1

En el circuito serie que aparece en la figura 9-12 el interruptor K se mantiene en la posición a hasta el momento en que fluye una

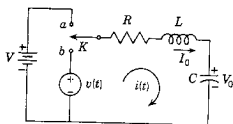


Figura 9-12. La red RLC que se ve en el ejemplo 1.

corriente I_0 en el inductor y el capacitor se carga al voltaje V_0 . En ese instante el interruptor se cambia a la posición b , conectando al circuito con una fuente de voltaje $v(t)$. El problema consiste en encontrar $I(s)$ e $i(t)$. En la figura 9-13 se ilustra un diagrama del circuito equivalente en que se marcan las impedancias transformadas. En esta

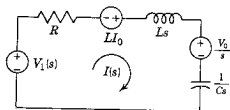


Figura 9-13. La red transformada derivada de la red de la figura 9-12.

forma revisada, la corriente $I(s)$, que es una transformada de corriente, se puede encontrar por medio de la ley de Ohm, para redes transformadas. La corriente $I(s)$ está dada como la transformada total del voltaje de la red, dividida entre la impedancia transformada total. En este caso,

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{V_1(s) + LI_0 - V_0/s}{R + Ls + 1/Cs} = \frac{sV_1(s) + LI_0s - V_0}{Ls^2 + Rs + 1/C} \quad (9-47)$$

Esta ecuación de transformada se puede desarrollar por medio de fracciones parciales para determinar la $i(t)$ correspondiente por medio de la transformación inversa de Laplace. Tal solución se ha encontrado sin escribir la ecuación diferencial del sistema y las condiciones iniciales requeridas se incorporan automáticamente.

EJEMPLO 2

En la figura 9-14 se ilustra el dual de la red del ejemplo 1. En esta red el interruptor K_1 se abre en el instante en que la corriente en el inductor es I_0 y el capacitor está cargado con V_0 . En el mismo instante, $t = 0$, se cierra el interruptor K_2 . Se desea determinar la

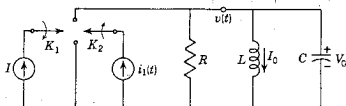


Figura 9-14. Red del ejemplo 2.

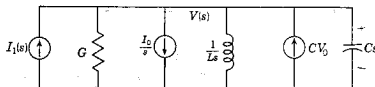


Figura 9-15. Red transformada derivada de la red de la figura 9-14.

transformada del voltaje de nodo $V(s)$ de tal modo que se pueda determinar $v(t)$. De acuerdo con el diagrama equivalente de admitancias que aparece en la figura 9-15, la transformada del voltaje $V(s)$ es

$$V(s) = \frac{I(s)}{Y(s)} = \frac{I_1(s) + CV_0 - I_0/s}{Cs + G + 1/Ls} = \frac{sI_1(s) + CV_0s - I_0}{Cs^2 + Gs + 1/L} \quad (9-48)$$

Esta transformada es la dual de la transformada de la ecuación (9-47) (y , por tanto, se pudo haber escrito por simple observación). El voltaje correspondiente en el dominio del tiempo, $v(t)$ se puede encontrar a partir de la transformación inversa de Laplace una vez que se desarrolle en fracciones parciales la transformada anterior.

EJEMPLO 3

En este ejemplo se utilizan las leyes para la combinación en serie de impedancias y la combinación en paralelo de admitancias, con el fin de determinar la corriente. Se supondrá que inicialmente la red que se ilustra en la figura 9-16 está desenergizada (sin carga ni corriente) y que el interruptor se cerró para $t = 0$. Se pide encontrar la corriente del generador $i(t)$, determinando la transformada de esta co-

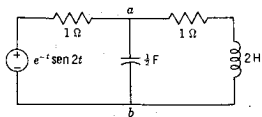


Figura 9-16. Red del ejemplo 3

riente $I(s)$. La impedancia de la rama que contiene la resistencia de 1 ohm y el inductor 2-H es, de acuerdo con la figura 9-17,

$$Z(s) = 1 + 2s \quad (9-49)$$

Esta impedancia está en paralelo con la impedancia $2/s$ del capacitor. En este caso las admitancias se pueden sumar directamente, y en consecuencia,

$$Y_{ab}(s) = Y_C + Y_{RL} = \frac{s}{2} + \frac{1}{2s+1} = \frac{2s^2 + s + 2}{2(2s+1)} \quad (9-50)$$

La impedancia de a a b es la recíproca de la admitancia; por tanto,

$$Z_{ab}(s) = \frac{1}{Y_{ab}(s)} = \frac{2(2s+1)}{2s^2 + s + 2} \quad (9-51)$$

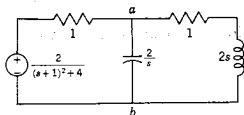


Figura 9-17. Red transformada relacionada con el ejemplo 3.

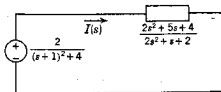
La impedancia total se determina ahora sumando a $Z_{ab}(s)$ la impedancia del resistor de 1 ohm. En consecuencia, la impedancia total es

$$Z_{\text{total}}(s) = 1 + \frac{2(2s+1)}{2s^2 + s + 2} = \frac{2s^2 + 5s + 4}{2s^2 + s + 2} \quad (9-52)$$

Esta impedancia total en serie con la transformada de la fuente de voltaje se ilustra en la figura 9-18. La corriente se puede determinar ahora y es

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{2(2s^2 + s + 2)}{[(s+1)^2 + 4](2s^2 + 5s + 4)} \quad (9-53)$$

Figura 9-18. Red transformada simplificada obtenida a partir de la figura 9-17 por la combinación de impedancias y admitancias.



Si el inductor tiene una corriente que pasa por él para $t=0$, o si el capacitor está cargado para $t=0$, el problema es algo más complejo, ya que se incluyen varias fuentes de voltaje.

9.4. SUPERPOSICION Y RECIPROCIDAD

A continuación se generalizan los resultados obtenidos en la última sección para las redes en serie-paralelo, a la red general. Este problema se formuló en el capítulo 3, de acuerdo con las ecuaciones integro-diferenciales utilizando los coeficientes a y b -, en donde, por ejemplo, el coeficiente a_{jk} era el operador,

$$a_{jk} = R_{jk} + L_{jk} \frac{d}{dt} + D_{jk} \int dt \quad (9-54)$$

En las transformadas equivalentes de Laplace de la ecuación (3-47) los coeficientes a - se convierten en $Z(s)$ más las fuentes correspondientes a las condiciones iniciales, y los coeficientes b se convierten en la misma forma en términos de admitancia $Y(s)$ y las fuentes correspondientes a las condiciones iniciales. Por tanto, la forma transformada de la ecuación (3-47) se puede escribir en forma compacta en la ecuación matricial

$$[Z][I] = [V] + [V_0] = [V'] \quad (9-55)$$

en donde la matriz de impedancia es

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11}(s) & Z_{12}(s) & \cdots & Z_{1L}(s) \\ Z_{21}(s) & Z_{22}(s) & \cdots & Z_{2L}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{L1}(s) & Z_{L2}(s) & \cdots & Z_{LL}(s) \end{bmatrix} \quad (9-56)$$

e $[I]$ y $[V']$ son matrices columna en que las entradas son I_1, I_2, \dots, I_L y $V_1 + V_{01}, V_2 + V_{02}, \dots, V_L + V_{0L}$. Las ecuaciones en base de nodos son, en la misma forma,

$$[Y][V] = [I] + [I_0] = [I'] \quad (9-57)$$

en la que las diferentes matrices tienen una interpretación dual a las proporcionadas por la ecuación (9-55). La solución de la ecuación (9-55) o la (9-57) se puede encontrar aplicando la regla de Cramer (o por inversión de matriz). Si se hace que Δ_z sea el determinante de $[Z]$, entonces, para $L=3$, la transformada de la corriente que es equivalente a la ecuación (3-73) es

$$I_1(s) = \frac{1}{\Delta_z} [\Delta_{12} V'_2(s) + \Delta_{22} V'_3(s) + \Delta_{32} V'_3(s)] \quad (9-58)$$

que, aunque se trata de un caso especial, tiene una forma representativa como cualquier otra solución. Se observará que la transformada del voltaje $V'_j(s) = V_j(s) + V_{0j}(s)$ es una suma de voltajes, en donde $V_j(s)$ es la transformada de todas las fuentes en la malla j , y $V_{0j}(s)$ es la representación de la transformada del voltaje de todas las condiciones iniciales de la malla j . Por supuesto, esta suma se debe efectuar tomando en cuenta la polaridad de las diferentes fuentes con respecto al sentido de referencia de la malla. Se ha supuesto que las fuentes de corriente de la red se transformaron en fuentes equivalentes de voltaje antes de formular las ecuaciones.

De acuerdo con la ecuación (9-58), se observa que se puede considerar cada una de las transformadas de voltaje a la vez y luego sumar todas las respuestas parciales que así se encuentren para determinar $I_2(s)$. En esencia, éste es el *principio de superposición*.

Hay dos aspectos de la superposición que son vitales en análisis de redes. Una respuesta determinada en una red, que sea el resultado de varias fuentes independientes (incluyendo las fuentes debidas a condiciones iniciales), se puede calcular sumando la respuesta de cada fuente individual mientras las demás fuentes quedan inoperantes (se reduce a cero su voltaje o su corriente). Esta afirmación describe la propiedad *aditiva* de las redes lineales. Más aún, si todas las fuentes se multiplicaran por una constante, la respuesta se multiplicaría también por la misma constante. Tal proposición describe la propiedad de *homogeneidad* de las redes lineales. En la ecuación (9-58) se observan claramente estas dos propiedades. Por tanto, la superposición es la combinación de la propiedad aditiva y la de homogeneidad de las redes lineales.

A continuación se estudiarán dos redes para ilustrar el principio de la superposición, sobre todo en redes con condiciones iniciales.

EJEMPLO 4

En la red de la figura 9-19 la fuente es $v_1(t)$ y la respuesta se considera como la corriente $i(t)$. El voltaje inicial del capacitor es $v_c(0)$. En este ejemplo se observa que la transformada de la corriente es

$$I(s) = \frac{V_1(s) - v_c(0)/s}{R + 1/Cs} \quad (9-59)$$

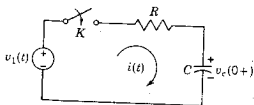


Figura 9-19. Red del ejemplo 4 usada para ilustrar la propiedad de superposición.

El numerador de esta ecuación ilustra la afirmación de que la respuesta es la superposición de las respuestas originadas por cada una de las fuentes de la red de la figura 9-19. Sea $V_1(s) = V_0(s)$ y $v_C(0) = V_0$. Este es un caso interesante para el que las respuestas debidas a las dos fuentes son iguales y opuestas, de tal modo que la respuesta superpuesta es $i(t) = 0$. Si, por el contrario, $V_1(s) = 2V_0/s$, y $v_C(0) = V_0$, entonces las respuestas superpuestas se suman y dan

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} \quad (9-60)$$

Con respecto a la homogeneidad de la superposición, obsérvese que si tanto $V_1(s)$ como $v_C(0)$ se multiplican por K , entonces, también $i(t)$ se multiplicará por K .

EJEMPLO 5

Sea la red de la figura 9-20 para la que se establece el requisito adicional de que sean idénticas las corrientes iniciales en los dos inductores y también que sean idénticas las cargas iniciales de los dos capacitores. Para esta red, la respuesta es $v_2(t)$ y la excitación se debe a la fuente de corriente $i_1(t)$ y a las condiciones iniciales de los inductores y capacitores. Al aplicar el principio de superposición a esta red, se anularán siempre las respuestas debidas a las condiciones iniciales y la respuesta dependerá sólo de la excitación debida a $i_1(t)$. Este es un ejemplo de red en que las condiciones iniciales *no son observables* en las terminales 2-2'. Por supuesto, tal conclusión no se aplica por ejemplo a la corriente en los inductores.

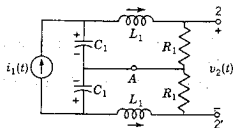


Figura 9-20. Red del ejemplo 5 en que las corrientes iniciales idénticas en los dos inductores marcados como L_1 no se observan en el puerto 2.

En el análisis de redes a veces es útil hacer afirmaciones respecto a las redes para las cuales las condiciones iniciales (corrientes en los inductores y voltajes en los capacitores) son todas cero. Este tipo de redes se describe casi siempre como *inicialmente desenergizadas* o en *estado cero*. Para estas redes la respuesta depende sólo de la excitación que se aplica. En el ejemplo 5 se indica que la condición de estado cero es suficiente para que se cumpla esta afirmación, pero no es condición necesaria.

Otra propiedad importante de las redes lineales se deriva de una generalización de la ecuación (9-58); la corriente en la malla k es

$$I_k = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} V_1 + \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} V_2 + \dots + \frac{\Delta_{Lk}}{\Delta} V_L \quad (9-61)$$

Si todos los valores de V son cero excepto V_j , esta ecuación se simplifica a la forma

$$I_k = \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} V_j \quad (9-62)$$

De la misma manera, si V_k es la única fuente de la red, la corriente en la malla j es

$$I_j = \frac{\Delta_{kj}}{\Delta} V_k \quad (9-63)$$

En la figura 9-21 se muestran las redes para las que se aplican estas ecuaciones; ahí se identifican las mallas j y k .

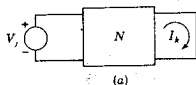
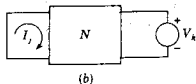


Figura 9-21. Redes que se tomaron como base para la descripción del principio de reciprocidad.



De acuerdo con estas dos redes, se pueden hacer las siguientes observaciones. En la red (a) de esta figura V_j produce la corriente I_k . Si V_j se cambia a la malla k , de tal modo que $V_k = V_j$, como sucede en (b) de la figura, ¿cuál será el valor de I_j en esta condición? Si $[Z]$ es simétrica, los cofactores de las ecuaciones (9-62) y (9-63) son iguales.

$$\Delta_{jk} = \Delta_{kj} \quad (9-64)$$

y se observa que I_j de la figura 9-21(b) será igual a I_k de la figura 9-21(a). En resumen,

$$\frac{I_k}{V_j} = \frac{I_j}{V_k} \quad (9-65)$$

El *principio de reciprocidad*, que es un enunciado que equivale a la ecuación (9-65), establece que la relación de la transformada de la respuesta a la transformada de la excitación no varía con un intercambio

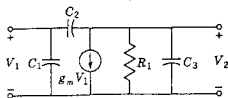


Figura 9-22. Una red no recíproca si $g_m \neq 0$.

de posición de la excitación y de la respuesta en la red. Las redes a las que se aplica esta condición se clasifican como *recíprocas*.

¿En qué condiciones se aplicará a una red el principio de reciprocidad? ¿Cómo se puede distinguir una red recíproca? Se ha supuesto que en esta red sólo existe una fuente de excitación. Para que éste sea el caso, es necesario que no existan fuentes debidas a condiciones iniciales, lo que significa que la red debe estar inicialmente desenergizada o en estado cero. La ecuación (9-61) se escribe para una red que cuenta sólo con elementos lineales. Para que $[Z]$ sea simétrica, se requiere que tenga como elementos sólo a R , L , C y transformadores. Se deben excluir las fuentes dependientes (o controladas) incluso si son lineales, para que $[Z]$ sea simétrica, en consecuencia, la red ilustrada en la figura 9-22, que es un modelo de un transistor, es *no recíproca*.

9-5. TEOREMA DE THEVENIN Y TEOREMA DE NORTON

Cuando el interés se fija en una parte de la red que se está analizando, el resto de ella se puede substituir con ventaja por medio de una red equivalente simple que se determina utilizando el teorema de Thévenin o su equivalente, el teorema de Norton.⁴ El teorema de Thévenin es particularmente útil en aplicaciones tales como la determinación de la carga de un circuito electrónico que produzca el máximo suministro de potencia media a la carga.

Las dos partes de la red en cuestión se identifican en la figura 9-23 como red A y red B. La red A se va a substituir por una red equivalente, a condición de que la corriente i y el voltaje v que se identifican en la figura permanezcan invariantes cuando se efectúe la subs-



⁴ Este teorema fue propuesto por primera vez en 1883 por el ingeniero de telégrafos francés Léon Thévenin (1857-1926) en la publicación científica francesa *Annales Télégraphiques*. Charles Suchet presenta un interesante reporte del desarrollo del teorema en *Electrical Engineering*, Vol. 68 (octubre de 1949), 843-844. Existe un enunciado previo en la forma de este teorema que se atribuye a Helmholtz, por lo que a veces recibe el nombre de teorema de Helmholtz-Thévenin. En relación con el trabajo previo de Helmholtz, véanse las cartas de H. F. Mayer y E. T. Gross en "Léon Charles Thévenin", *Electrical Engineering*, Vol. 69 (febrero de 1950), 186-187. El dual del teorema se debe a E. L. Norton (1898-) de los Bell Telephone Laboratories.

Figura 9-23. Dos redes en función de las cuales se describe el teorema de Thévenin.



titución. La red B se conoce como la *carga*, que puede ser un simple resistor o una red de mayor complejidad, posiblemente una que represente una antena o un diodo. Se harán ciertas suposiciones relacionadas con las dos redes y se resumen en la tabla 9-1.

TABLA 9-1.

Red	Características
	Elementos lineales Las fuentes de voltaje y de corriente pueden ser independientes o dependientes (controladas) Condiciones iniciales en los elementos pasivos No debe haber acoplamientos magnéticos o de fuente controlada con la red B
	Cualquier tipo de elementos: lineales, no lineales, que varían con el tiempo Puede haber cualquier clase de fuente Condiciones iniciales en los elementos pasivos No debe haber acoplamientos magnéticos o de fuente controlada con la red A

Se supondrá que la red A contiene elementos lineales que pueden tener condiciones iniciales. También contiene fuentes, que pueden ser independientes o controladas. Se supondrá asimismo que no existe acoplamiento magnético con la red B ni se cuenta en A con una fuente controlada que se acople con B. La diferencia más notable en las suposiciones para la red B es que los elementos no deben ser necesariamente lineales, es decir, pueden ser no lineales o variar con el tiempo, o bien de ambos tipos. Se pueden tener fuentes en la red B; también en este caso pueden ser independientes o de tipo controlado, pero no debe existir acoplamiento magnético o de fuente controlada con la red A. Se observa que si en la red B se tienen elementos no lineales o que varían con el tiempo se requerirán técnicas que no se han estudiado todavía para resolver las ecuaciones de red. Es muy importante reconocer que la exposición abarca estos dos casos para su aplicación en estudios posteriores.

Al describir las redes equivalentes de Thévenin y Norton se necesitará una red que se identifica como C en la figura 9-24. La red C se deriva de la red A como sigue:

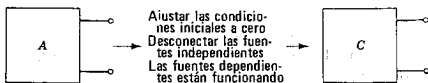
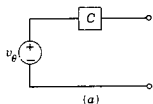
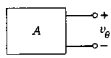


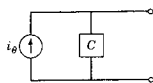
Figura 9-24. La red A se convierte en la red C en las condiciones que se especifican en la figura. Las fuentes independientes se anulan haciendo que $v = 0$ para las fuentes de voltaje e $i = 0$ para las fuentes de corriente.



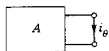
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 9-25. (a) La red equivalente general de Thévenin (b) y la condición en que se determina v_θ . (c) La red general equivalente de Norton, (d) y la condición en que se determina i_θ .

- (1) Todas las condiciones iniciales se hacen iguales a cero. Para todos los capacitores, $v_C = 0$ y para todos los inductores $i_L = 0$.
- (2) Todas las fuentes independientes se eliminan; en otras palabras, $v = 0$ (se ponen en corto circuito) para las fuentes de voltaje e $i = 0$ (se ponen en circuito abierto) para las fuentes de corriente.
- (3) Siguen funcionando las fuentes controladas, para diferenciarlas de las fuentes independientes de la proposición (2).
- (4) En estas condiciones, a veces se mide la impedancia o la admittancia de punto impulsor o de entrada, en las terminales de entrada, y se designan como Z_θ y Y_θ .

La red equivalente de Thévenin es la que aparece en la figura 9-25(a). La fuente de voltaje v_θ es el voltaje en las terminales abiertas de la red A, cuando se ha eliminado la red B, como se indica en la figura 9-25(b). La fuente de voltaje v_θ se conecta en serie con la red C.

La red equivalente de Norton es el dual de la red equivalente de Thévenin, tal como se indica en la figura 9-25(c). La fuente de corriente i_θ tiene un valor igual al de la corriente en las terminales en corto circuito de la red A, como se ilustra en (d) de la figura 9-25. La fuente de corriente se conecta en paralelo con la red C para formar la red equivalente de Norton.

A continuación se estudiarán tres situaciones distintas para ilustrar la determinación de la red equivalente de Thévenin. En cierto sentido, las situaciones representarán clases de problemas a las que se puede aplicar el teorema de Thévenin y que difieren en complejidad y en objetivo.

Caso 1. Sea el caso en que tanto la red A como la B contienen sólo resistores y fuentes, tanto independientes como controladas. En este caso sólo tendremos ecuaciones algebraicas y no diferenciales.

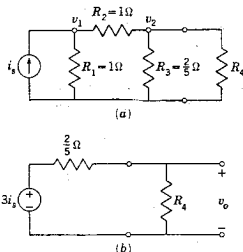


Figura 9-26. Red usada para ilustrar el caso 1.

La red que se ilustra en la figura 9-26(a) es tal que contiene sólo una fuente independiente. Primeramente se elimina R_4 a fin de encontrar el equivalente de Thévenin para el resto de la red. El voltaje en circuito abierto es v_2 y esto se puede determinar resolviendo el siguiente conjunto de ecuaciones.

$$(G_1 + G_2)v_1 - G_2v_2 = i_s \quad (9-66)$$

$$-G_2v_1 + (G_2 + G_3)v_2 = 0 \quad (9-67)$$

Substituyendo los valores numéricos que se dan en estas ecuaciones y resolviéndolas, se encuentra que $v_2 = 3i_s$. La resistencia equivalente de Thévenin se encuentra poniendo en circuito abierto la fuente de corriente, de donde resulta

$$R_\theta = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1}{3} \text{ ohm} \quad (9-68)$$

Por tanto, queda determinada la red equivalente de Thévenin, que es como se ilustra en la figura 9-26(b). De acuerdo con esta red, se puede determinar el voltaje en R_4 , $v_o(t)$, que es

$$v_o(t) = \frac{3i_s R_4}{-1/3 + R_4} V \quad (9-69)$$

Véase la siguiente red que satisfice las suposiciones del caso 1 pero que contiene una fuente de voltaje controlado. Cuando se elimina la carga R_L , se puede determinar el voltaje en circuito abierto v_θ . Puesto que no hay corriente en R_1 y R_2 , el voltaje de circuito abierto es

$$v_\theta = v_a = \beta(v_1 - v_a) \quad (9-70)$$

Despejando v_a que luego se iguala a v_θ , se tiene que

$$v_o = \frac{\beta}{1 + \beta} v_1 \quad (9-71)$$

que es el voltaje requerido. Para encontrar la forma de la red C , o en realidad una versión simplificada de ésta, primero se hace que $v_1 = 0$. El resultado es entonces la red que aparece en la figura 9-27. Para simplificar esto más todavía se conecta una fuente de voltaje v a las terminales de salida y se resuelve para la corriente i que produce esta fuente. Para la red de una malla,

$$v = iR_2 + iR_1 + \beta(0 - v_a) \quad (9-72)$$

Para eliminar v_a de esta ecuación, se observa que

$$v_a = iR_2 - \beta v_a \quad (9-73)$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} v &= i\left(R_1 + R_2 - \frac{\beta}{1+\beta}R_2\right) \\ &= i\left[R_1 + R_2\left(1 - \frac{\beta}{1+\beta}\right)\right] \end{aligned} \quad (9-74)$$

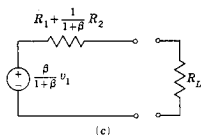
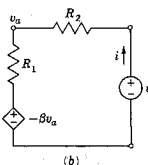
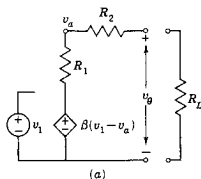


Figura 9-27. Una red que contiene una fuente controlada que se usa en segundo ejemplo en el caso 1.

Teorema de Thévenin y teorema de Norton 307

Ahora, la relación v/i es la resistencia de la red R_θ , que puede representar a la red C. Por consiguiente,

$$R_\theta = R_1 + \left(\frac{1}{1 + \beta} \right) R_2 \quad (9-75)$$

es la resistencia equivalente de la red C. Estos resultados se ilustran en la figura 9-27(c) que muestra la red equivalente de Thévenin.

Caso 2. En la figura 9-28(a) se muestra una red RLC con una fuente de voltaje $v(t) = V_0 e^{-t}$ y condiciones iniciales cero para los elementos pasivos. En primer lugar se calculará la fuente de voltaje equivalente v_θ que se estima por la red. Este es el voltaje a través de la resistencia, ya que con las terminales abiertas no existe corriente en el capacitor. Se trata de una simple red RL para la que la corriente se puede determinar aplicando las técnicas que se vieron en los capítulos 6 y 7, y v_R se encuentra multiplicando i por R . El resultado es

$$v_\theta(t) = V_0 \frac{R}{L - R} (e^{-Rt/L} - e^{-t}) \quad (9-76)$$

para $t \geq 0$. Para encontrar la red C se pone en corto circuito la fuente de voltaje, con lo cual resulta una red en la que C está en serie con la combinación en paralelo de L y R . Este resultado se muestra en la

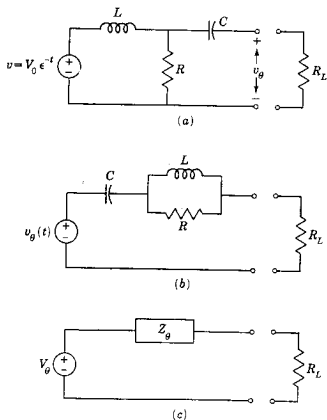


Figura 9-28. Red RLC utilizada para ilustrar el caso 2.

figura 9-28(b), en donde v_θ se define según la ecuación (9-76). El resultado no parece ser tan sencillo como la red original, pero es equivalente con respecto al voltaje y la corriente de R_L .

Caso 3. Para este caso se estudiará la red que se usó en el caso 2, pero ahora se usarán transformadas para el voltaje, la corriente y la impedancia. Para la red transformada la impedancia $Z_\theta = 1/Y_\theta$, se puede utilizar para representar la red C. Dicho uso es similar al del caso 1 en que la red se representó con su equivalente simplificado, un simple resistor. En este caso se representa la red por medio de sus impedancias transformadas. Tal aplicación se ilustra en la figura 9-29. Para calcular el voltaje $V_\theta(s)$, se reconoce que V_R de la figura 9-28(a) se puede determinar considerando a L y R en serie como un divisor de voltaje; por tanto,

$$V_\theta(s) = \frac{R}{Ls + R} V_1 = \frac{V_0 R/L}{[s + (R/L)](s + 1)} \quad (9-77)$$

es la transformada del voltaje de la red que se representa en la figura 9-28(c). Para determinar Z_θ se calcula la impedancia transformada poniendo a la fuente V_1 en corto circuito. Por tanto,

$$\begin{aligned} Z_\theta &= \frac{1}{Cs} + \frac{1}{(1/R) + (1/Ls)} \\ &= R \frac{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}{s[s + (R/L)]} \end{aligned} \quad (9-78)$$

y la red transformada equivalente de Thévenin queda así determinada.

Habiendo ilustrado el uso del teorema de Thévenin, falta sólo demostrar su validez y describir las razones para las restricciones que limitan el uso del teorema. La demostración se efectuará para una red transformada que es el más general de los tres casos que se vieron. Las etapas de la derivación del teorema se realizan en función de las descripciones que aparecen en la figura 9-30. En (a) de esta figura se ve la red de la figura 9-23 repetida con la corriente i , cuya transformada es $I(s)$. En (b) se inserta una fuente de voltaje cuya transformada es $V(s)$, con un valor tal que produzca la corriente $I_1(s) = -I(s)$, y que por tanto la corriente neta de la red A a la red B sea cero. Siendo la corriente igual a cero, las dos redes se pueden separar como se muestra en la figura 9-30(c), sin afectar las condiciones de la red A de (b). Ahora el voltaje en las terminales separadas será cero porque la corriente es cero. La red B actúa como un corto y, por tanto, puede ponerse en corto circuito sin afectar las condiciones de la red A. Sea $V_\theta(s)$ el voltaje en las terminales de la red A, con estas terminales abiertas como en (c). De acuerdo con la ley de voltajes de Kirchhoff, $V_\theta(s) - V(s) = 0$, lo cual significa que $V_\theta(s) = V(s)$. En otras palabras, $V_\theta(s)$ debe tener el valor de la transformada del voltaje en las termi-

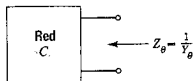


Figura 9-29. La red C se puede representar mediante la impedancia Z_θ , que es la recíproca de Y_θ .

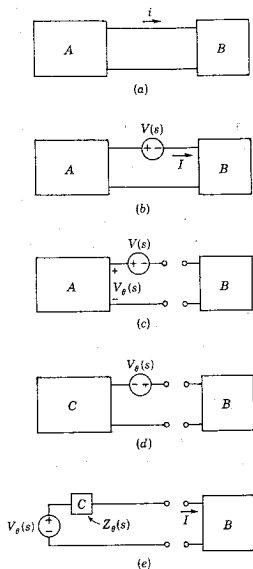


Figura 9-30. Pasos que ilustran la derivación del teorema de Thévenin.

nales en circuito abierto de la red A, para que se pueda aplicar la condición de corriente cero de (c) en la figura 9-30.

A continuación se demostrará que la red de (d) de la figura 9-30 es equivalente a la que aparece en (a). Esto se logra observando los dos cambios que se han efectuado al pasar de (c) a (d). En primer lugar, todas las fuentes *independientes* de la red A se reducen a cero abriendo las fuentes de corriente y poniendo en corto circuito las fuentes de voltaje. Sin embargo, las fuentes dependientes no variarán. Una vez que se logra esto, la red A se transforma en la red C, que posee las propiedades que se resumen en la tabla 9-1. A continuación se invierte la polaridad de la fuente de voltaje $V_{\theta}(s)$ en relación con la que se da en (c), de tal modo que ahora $I(s) = +I_1(s)$. Cuando la red B se conecta en la figura 9-30(d), la corriente es $I(s)$, como lo era en la red de (a). Por consiguiente, en lo que respecta a las operaciones en la red B, la red de (d) es equivalente a la de (a). En (e) de la misma figura la red se reacomoda con la fuente de voltaje en su posición

310 Funciones de impedancia y teoremas de red

tradicional y la impedancia de la red C se identifica como $Z_{\theta}(s)$. De acuerdo con esta red, se observa que la transformada de la corriente es

$$I(s) = \frac{V_{\theta}(s)}{Z_{\theta}(s) + Z_B(s)} \quad (9-79)$$

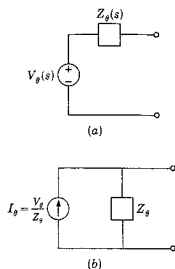


Figura 9-31. Forma general de (a) la red del teorema de Thévenin y (b) la red del teorema de Norton.

La impedancia de la red C, que se ha identificado como $Z_{\theta}(s)$, requiere un comentario adicional. Si la red A contiene sólo fuentes independientes, entonces $Z_{\theta}(s)$ es la impedancia de la red pasiva, es decir, la impedancia de la red C, calculada en las terminales abiertas. No obstante, en caso de que la red A contenga fuentes dependientes (como sucede con mucha frecuencia en modelos de dispositivos de estado sólido), entonces las fuentes dependientes no se reducen a cero y se debe determinar $Z_{\theta}(s)$ para una red activa. Esto no presenta problemas de cálculo, como se ilustra por un ejemplo que aparece al final de esta sección.

La transformación de fuentes que se vio en la sección 3-3 que se resume para elementos individuales en las figuras 3-16, 3-17 y 3-18, generalizada para la impedancia $Z_{\theta}(s)$ de una red, se usa a continuación para convertir fuentes de voltaje en fuentes de corriente. Esto se logra como se ilustra en la figura 9-31 para dar una fuente de corriente con un valor $I_{\theta}(s) = V_{\theta}(s)/Z_{\theta}(s)$ en paralelo con la impedancia $Z_{\theta}(s)$. Esta es la red equivalente de Norton. Cuando dicha red substituye a la que aparece en la figura 9-30(e), se observa que, con $Y_{\theta}(s) = 1/Z_{\theta}(s)$ y $Y_B(s) = 1/Z_B(s)$, el voltaje de la red B es

$$V_B(s) = \frac{I_{\theta}(s)}{Y_{\theta}(s) + Y_B(s)} \quad (9-80)$$

Obsérvese que la $I_{\theta}(s)$ es la transformada de la corriente entre las dos terminales de la red A cuando dichas terminales se ponen en corto circuito.

Estos resultados se pueden resumir en las siguientes proposiciones. Sean A y B dos redes conectadas por dos conductores pero sin tener un acoplamiento magnético o de fuente controlada. La red A se puede remplazar por cualquiera de las dos redes equivalentes para fines de cálculo con respecto a la red B. *La red equivalente de Thévenin* se compone de una fuente de voltaje en serie con una red de impedancia $Z_{\theta}(s)$. La fuente de voltaje $V_{\theta}(s)$ es la transformada del voltaje en las terminales abiertas de la red A. $Z_{\theta}(s)$ es la impedancia transformada en las dos terminales de A, cuando todas las fuentes independientes se reducen a cero. *La red equivalente de Norton* consiste en una fuente de corriente $I_{\theta}(s)$ en paralelo con una red de impedancia $Z_{\theta}(s)$. La impedancia es la misma que la que se encontró para la equivalente de Thévenin, e $I_{\theta}(s)$ es la transformada de la corriente entre las dos terminales de A cuando dichas terminales se ponen en corto circuito.

El estudio de los teoremas de Thévenin y Norton concluye con tres ejemplos adicionales.

EJEMPLO 6

La red de la figura 9-32 está en estado cero hasta $t = 0$ cuando se cierra el interruptor. Se pide determinar la corriente $i_1(t)$ en la resistencia R_3 . En la figura 9-33 se muestra la misma red de acuerdo con impedancias transformadas, para encontrar la red equivalente de Thévenin tal como se indicó. De acuerdo con la red, se observa que la transformada del voltaje para terminales abiertas es

$$V_{\theta}(s) = \frac{10(100/s)}{10 + s + 10} = \frac{1000}{s(s + 20)} \quad (9-81)$$

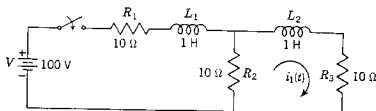


Figura 9-32. Red del ejemplo 6.

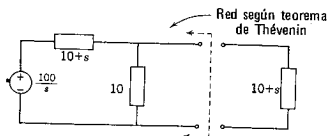


Figura 9-33. Red transformada derivada de la red de la figura 9-26. La línea punteada y las flechas señalan la porción de la red a la que se aplica el teorema de Thévenin.

La impedancia de la red con la fuente de voltaje en corto circuito es

$$Z_{\theta}(s) = \frac{10(s + 10)}{s + 20} \quad (9-82)$$

De acuerdo con la ecuación (9-75) la transformada de la corriente es

$$I_1(s) = \frac{V_{\theta}(s)}{Z_{\theta}(s) + Z_{\theta}(s)} = \frac{1000/s(s + 20)}{10(s + 10)/(s + 20) + (s + 10)} \quad (9-83)$$

que se simplifica a

$$I_1(s) = \frac{1000}{s(s^2 + 40s + 300)} \quad (9-84)$$

Esta ecuación se puede desarrollar por fracciones parciales como sigue:

$$\frac{1000}{s(s^2 + 40s + 300)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s + 10)} + \frac{K_3}{(s + 30)} \quad (9-85)$$

Quando se evalúan K_1 , K_2 , y K_3 , la transformada de la corriente se convierte en

$$I_1(s) = \frac{3.33}{s} + \frac{-5}{s + 10} + \frac{1.67}{s + 30} \quad (9-86)$$

La corriente en el dominio del tiempo $i_1(t)$ se determina mediante la transformación inversa de Laplace, como sigue:

$$i_1(t) = 3.33 - 5e^{-10t} + 1.67e^{-30t} \quad (9-87)$$

Como comprobación, se observa que esta ecuación se reduce a los valores correctos para las condiciones iniciales y finales.

EJEMPLO 7

En la red que se ilustra en la figura 9-34 se pide determinar la corriente en la resistencia R_2 . El diagrama esquemático equivalente de

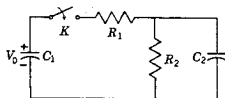


Figura 9-34. Red del ejemplo 7.

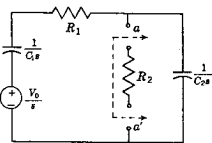


Figura 9-35. Red transformada derivada de la red de la figura 9-34. El teorema de Thévenin se aplica a la red excluyendo R_2 .

impedancias se muestra en la figura 9-35. Se supone que el capacitor C_2 está descargado inicialmente y que el interruptor K se cierra para $t = 0$. El teorema de Thévenin se aplica a las terminales $a-a'$, y se determinarán la impedancia equivalente y el voltaje equivalente en estas terminales. La impedancia equivalente es

$$Z_{\theta}(s) = \frac{(R_1 + 1/C_1 s)1/C_2 s}{R_1 + 1/C_1 s + 1/C_2 s} \quad (9-88)$$

y

$$V_{\theta}(s) = \frac{(V_0/s)(1/C_2s)}{R_1 + 1/C_1s + 1/C_2s} \quad (9-89)$$

La corriente que pasa por R_2 es

$$I_2(s) = \frac{V_{\theta}(s)}{Z_{\theta}(s) + R_2} \\ = \frac{V_0/C_2}{R_1 R_2 s^2 + (R_1/C_2 + R_2/C_1 + R_2/C_2)s + 1/C_1 C_2} \quad (9-90)$$

Supóngase que se dan los siguientes valores para la red: $C_1 = 8 \mu\text{F}$, $C_2 = 8 \mu\text{F}$, $R_1 = 9 \text{ M}\Omega$, $R_2 = 5 \text{ M}\Omega$ y $V_0 = 75 \text{ V}$. Con estos valores de parámetros, la ecuación 9-90 se reduce a

$$I_2(s) = \frac{0.208 \times 10^{-6}}{(s + 0.045)(s + 0.0077)} \quad (9-91)$$

Dicha ecuación se desarrolla por fracciones parciales y da

$$I_2(s) = 5.55 \times 10^{-6} \left(\frac{1}{s + 0.0077} - \frac{1}{s + 0.045} \right) \quad (9-92)$$

La transformación inversa de Laplace es

$$i_2(t) = 5.55 \times 10^{-6} (e^{-0.0077t} - e^{-0.045t}) \quad (9-93)$$

que es la corriente requerida. Si se busca la corriente en cualquier otra rama, es necesario principiar de nuevo y encontrar una nueva red equivalente de Thévenin.

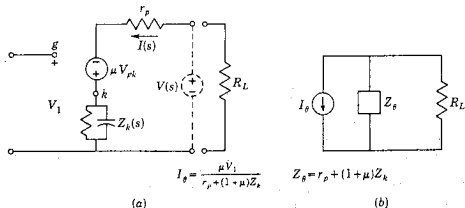


Figura 9-36. Red con fuente controlada del ejemplo 6 para la que se determina la red equivalente de Norton.

EJEMPLO 8

La red de la figura 9-36(a) contiene una fuente controlada que depende del voltaje

$$V_{gk}(s) = V_1(s) - V_k(s) \quad (9-94)$$

Para encontrar la red equivalente de Norton, primero se busca la impedancia $Z_{\theta}(s)$ en las terminales abiertas. Esto se hace insertando una fuente de voltaje $V(s)$ en estas terminales y determinando luego la corriente $I(s)$ con la condición de que las fuentes independientes se reduzcan a cero, lo cual significa que $V_1(s) = 0$, entonces,

$$V(s) = I(s)r_p + I(s)\mu Z_k(s) + I(s)Z_k(s) \quad (9-95)$$

en donde IZ_k se substituye por V_k en la ecuación (9-94). Entonces la impedancia requerida es

$$Z_{\theta}(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = r_p + (1 + \mu)Z_k(s) \quad (9-96)$$

La corriente en las terminales en corto circuito es

$$I_{\theta}(s) = \frac{\mu[V_1(s) - I_{\theta}(s)Z_k(s)]}{Z_k(s) + r_p} \quad (9-97)$$

o bien

$$I_{\theta}(s) = \frac{\mu V_1(s)}{r_p + (1 + \mu)Z_k(s)} \quad (9-98)$$

De acuerdo con estas ecuaciones, la red equivalente de Norton se construye como se indica en la figura 9-36(b).

El teorema de Thévenin se debe considerar como un medio útil que proporciona una ventaja conceptual para visualizar el funcionamiento de redes. En general, no se trata de un instrumento para simplificar la cantidad de cálculos requeridos, aunque en algunas ocasiones lo logra.

BIBLIOGRAFIA

- CHIRLIAN, PAUL M., *Basic Network Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969, capítulo 5.
 DESOER, CHARLES A. y ERNEST S. KUH, *Basic Circuit Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969, capítulos 16 y 17.
 KUO, FRANKLIN F., *Network Analysis and Synthesis*, 2.^a ed., John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1966, capítulo 7.

EJERCICIOS EN COMPUTADORA DIGITAL

Los temas de este capítulo no se relacionan directamente con el uso de la computadora digital, ya que se enfatizan conceptos y teoremas nuevos. Aproveche el tiempo de que disponga para ejercicios de computadora completando algunos otros de los que se sugieren al final del capítulo 3.

PROBLEMAS

- 9-1. En la red de (a) de la figura que sigue, $v_1 = V_0 e^{-2t} \cos t u(t)$ y para la red de (b), $i_1 = I_0 e^{-t} \sin 3t u(t)$. La impedancia de la red pasiva N resulta

$$Z(s) = \frac{(s + 2)(s + 3)}{(s + 1)(s + 4)}$$

- (a) Cuando N se conecta a la fuente de voltaje en (a) de la figura, ¿cuáles son las frecuencias complejas en la corriente $i_1(t)$?
 (b) Cuando N se conecta a la fuente de corriente, en (b) de la figura, ¿cuáles son las frecuencias complejas en el voltaje $v_1(t)$?

- 9-2. Repita el problema 9-1 cuando

$$Z(s) = \frac{2s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 5s + 1}{(s^2 + 1)(2s^2 + 2s + 4)}$$

Resuelva sólo la parte (b).

- 9-3. Sean los circuitos serie que se muestran en la figura. Sea $v_1(t) = \sin 10^3 t$, $v_2(t) = e^{-1000t}$ para $t > 0$, y $C = 1 \mu\text{F}$.

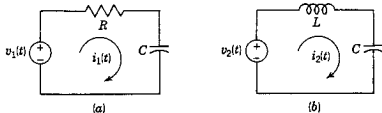


Fig. P9-3.

- (a) Demuestre que se puede tener $i_1(t) = i_2(t)$ para todos los valores de $t > 0$. (b) Determine los valores requeridos para R y L a fin de que se pueda tener la condición (a). (c) Analice el significado físico de este problema de acuerdo con las frecuencias complejas de estos dos circuitos en serie.

- 9-4. En la red de la figura el interruptor se abre para $t = 0$, habiéndose establecido previamente el estado permanente. Con el interruptor abierto, dibuje la red transformada para un análisis en base de mallas, representando todos los elementos y todas las condiciones iniciales.

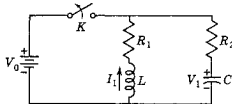


Fig. P9-4.

- 9-5. Este problema es semejante al 9-4, excepto en que la red transformada que se requiere se debe preparar para un análisis (a) en base de mallas y (b) en base de nodos. En esta red las corrientes y los voltajes iniciales son una consecuencia de elementos activos que se suprimen para $t = 0$.

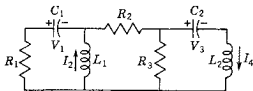
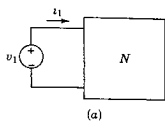
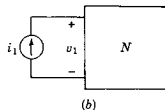


Fig. P9-5.



(a)



(b)

Fig. P9-1.

- 9-6. En la red de la figura el interruptor K se cierra para $t = 0$, y para $t = 0^-$ los capacitores tienen los voltajes que se indican. Repita el problema 94 para esta red.

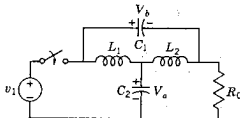


Fig. P9-6.

- 9-7. Determine las impedancias transformadas de las dos redes que se muestran en la figura.

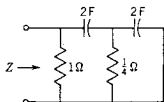


Fig. P9-8.

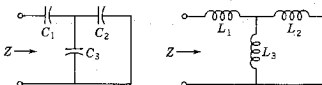


Fig. P9-7.

- 9-8. Para la red RC que se muestra en la figura siguiente encuentre la impedancia transformada $Z(s)$, en la forma de un cociente de polinomios, $p(s)/q(s)$. Factorice $p(s)$ y $q(s)$ de tal modo que $Z(s)$ se pueda expresar en la forma de la impedancia del problema 9-1.
- 9-9. Repita el problema 9-8 para la red LC de la figura que sigue.

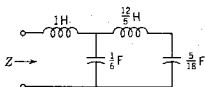


Fig. P9-9.

- 9-10. Repita el problema 9-8 para la red RC que se muestra en la figura.

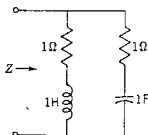


Fig. P9-11.

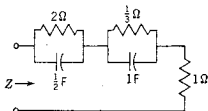


Fig. P9-10.

- 9-11. Repita el problema 9-8 para la red RLC de esta figura, sólo que en este caso se debe determinar $Y(s)$ en vez de $Z(s)$.
- 9-12. Se tienen dos cajas negras, idénticas por fuera cada una de las cuales cuenta con dos terminales. Se sabe que una caja contiene la red que se muestra en (a) y la otra contiene la red de (b) con $R = \sqrt{L/C}$. (a) Demuestre que la impedancia de entrada, $Z_{in}(s) = V_{in}(s)/I_{in}(s) = R$ para las dos redes.⁵ (b) Investigue la posibilidad de distinguir la red puramente

⁵ Slepian, J., carta de *Elec. Engrg.*, 68, 377; abril de 1949.

resistiva. Se puede efectuar cualquier medición externa, se pueden examinar las condiciones iniciales y finales, etc.

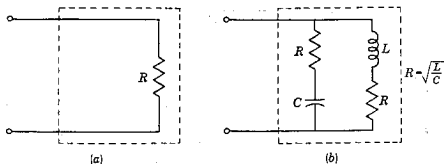


Fig. P9-12.

- 9-13. Repita el problema 9-12 comparando la red que se muestra en la figura⁶ con la que se da en (a) de la figura del problema 9-12.

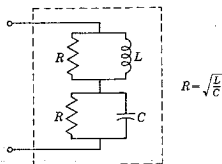


Fig. P9-13.

- 9-14. La red que se muestra en la figura P9-4 funciona con el interruptor K cerrado hasta que se llega a la condición de estado permanente. Entonces, para $t = 0$, se abre el interruptor K . Principiando con la red transformada que se encontró en el problema 9-4, determine el voltaje a través del interruptor, $v_k(t)$, para $t \geq 0$.
- 9-15. Si en la red indicada los capacitores no están cargados y la corriente en el inductor es cero para $t = 0^-$, demuestre que la transformada de la corriente en el generador es

$$I_1(s) = \frac{10(s^2 + s + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 2s + 2)}$$

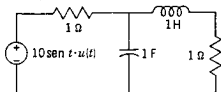


Fig. P9-15.

⁶ Macklem, F. S. "Dr. Slepian's black box problem", *Proc. IEEE*, 51, 1269; septiembre de 1963.

318 *Funciones de impedancia y teoremas de red*

- 9-16. Repita el problema 9-15 para la red que se indica a fin de demostrar que la corriente del generador está dada por la transformada

$$I_1(s) = \frac{s(s+2)(5s+6)}{(s^2+4s+13)(10s^2+18s+4)}$$

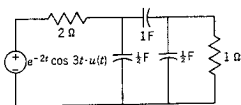


Fig. P9-16.

- 9-17. Para la red de la figura, demuestre que la red equivalente de Thévenin se representa por medio de

$$V_\theta = \frac{V_1}{2}(1+a+b-ab)$$

y

$$Z_\theta = \frac{3-b}{2}$$

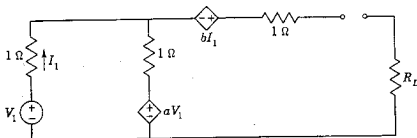


Fig. P9-17.

- 9-18. La red que se indica se compone de resistores y de fuentes controladas, además de la fuente independiente de voltaje v_s . Para esta red, encuentre la red equivalente de Thévenin determinando una expresión para el voltaje v_θ y la resistencia equivalente de Thévenin.

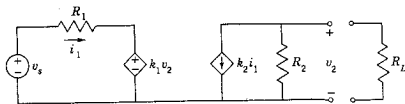


Fig. P9-18.

- 9-19. La red de la figura contiene tres resistores y una fuente de corriente controlada, además de las fuentes independientes. Determine la red equivalente de Thévenin de esta red, en las terminales 1-1'.

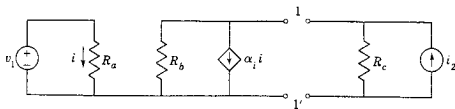


Fig. P9-19.

- 9-20. La red que se muestra a continuación es una representación sencilla de un transistor. Determine la red equivalente de Thévenin de esta red, para la carga R_L .

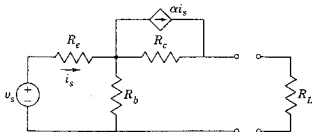


Fig. P9-20.

- 9-21. La red de la figura contiene un resistor y un capacitor, además de varias fuentes. Con respecto a la carga que se compone de R_L en serie con L , determine la red equivalente de Thévenin.

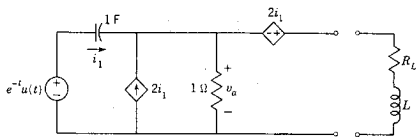


Fig. P9-21.

- 9-22. Utilice la red del problema 9-18 para determinar la red equivalente de Norton.
- 9-23. Para la red que se usó en el problema 9-19, determine la red equivalente de Norton.
- 9-24. Determine la red equivalente de Norton para la red que se da en el problema 9-20.
- 9-25. Determine la red equivalente de Norton para el sistema que se describe en el problema 9-21.
- 9-26. En la red que se indica, el interruptor está en la posición *a* hasta que se llega al estado permanente. Para $t = 0$, el interruptor se cambia a la posición *b*. En estas condiciones, determine la transformada del voltaje a tra-

vés del capacitor de 0.5-F utilizando (a) el teorema de Thévenin y (b) el teorema de Norton.

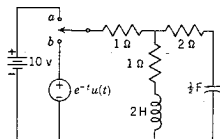


Fig. P9-26.

- 9-27. En la red de la figura el interruptor K se cierra para $t=0$, habiendo existido previamente el estado permanente. Encuentre la corriente en la resistencia R_3 utilizando (a) el teorema de Thévenin y (b) el teorema de Norton.

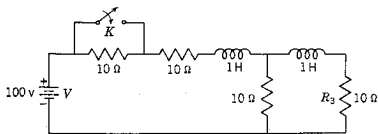


Fig. P9-27.

- 9-28. La red que se muestra en la figura es un filtro de paso bajo. El voltaje de entrada $v_1(t)$ es una función escalón unitario y los resistores de entrada y de carga tienen el valor $R = \sqrt{L/C}$. Use el teorema de Thévenin para mostrar que la transformada del voltaje de salida es

$$V_2(s) = \frac{4}{(LC)^{3/2}} \left[\frac{1}{s(s^2 + 4\sqrt{1/LC}s^2 + 8s/LC + 8/(LC)^{3/2})} \right]$$

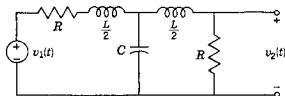


Fig. P9-28.

- 9-29. En la red que se muestra los elementos se escogen de tal modo que $L = CR_1^2$ y $R_1 = R_2$. Si $v_1(t)$ es un pulso de voltaje con una amplitud de 1-V y una duración de T seg, demuestre que $v_2(t)$ es también un pulso y determine su amplitud y duración.

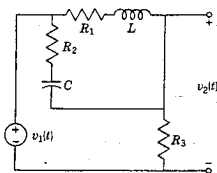


Fig. P9-29.

- 9-30. Utilice el teorema de Thévenin o el de Norton para determinar una red equivalente para las terminales $a-b$ en la figura, para condiciones iniciales cero.

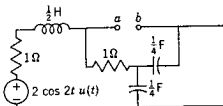


Fig. P9-30.

- 9-31. La red que aparece a continuación contiene una fuente controlada. Para los valores de elementos que se dan, con $v_1(t) = u(t)$ y para condiciones iniciales igual a cero, (a) determine la red equivalente de Thévenin en $a-a'$. (b) determine la red equivalente de Thévenin en $b-b'$.

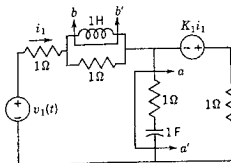


Fig. P9-31.

- 9-32. Para la red que se da determine la red equivalente de Thévenin para calcular la transformada de la corriente en L_R .

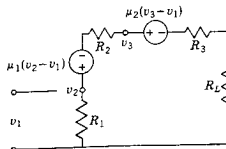


Fig. P9-32.

- 9-33. Suponiendo un voltaje inicial cero en el capacitor, determine la red equivalente de Norton para el resistor R_K .

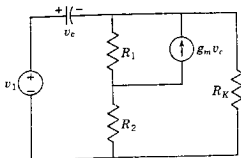
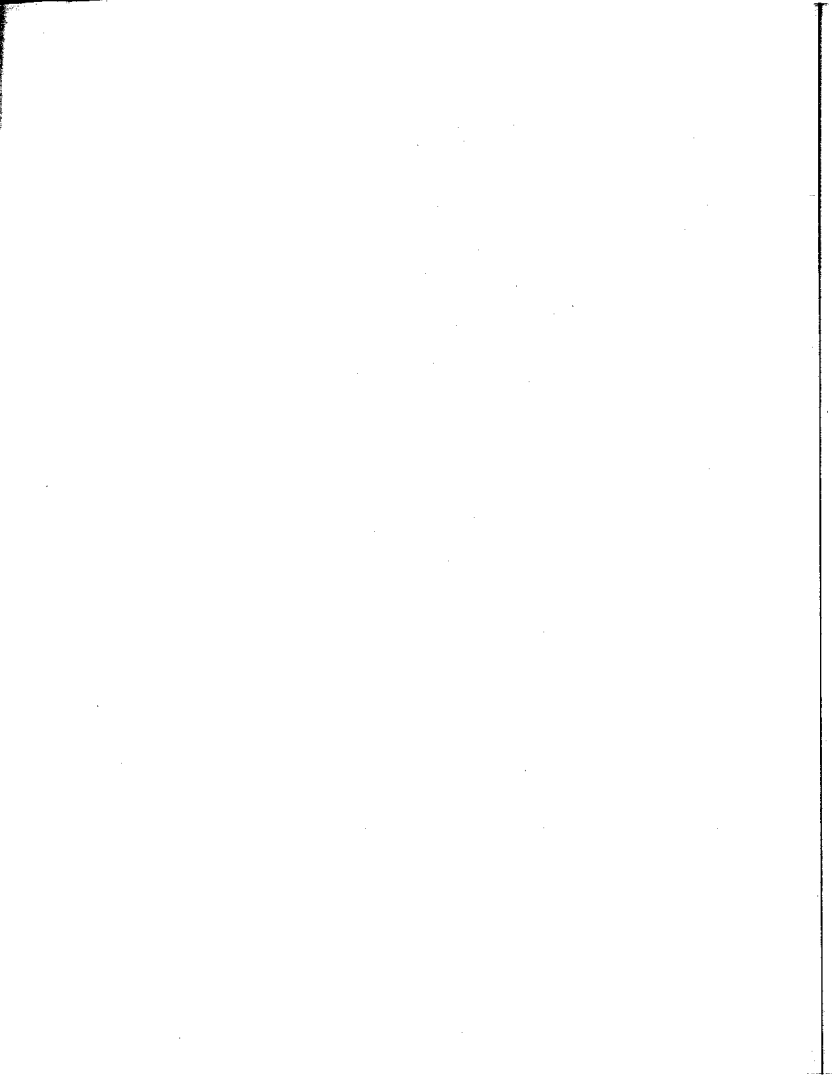


Fig. P9-33.



CAPITULO 10

10 Funciones de red: polos y ceros

En este capítulo se estudia y amplía el concepto de la impedancia transformada y la admitancia transformada que se introdujo en el capítulo anterior. Más aún, se estudia una función que relaciona a corrientes y a voltajes en diferentes partes de la red, que se conoce como *función de transferencia* y que es matemáticamente similar a la función de la impedancia transformada. A tales funciones se las denomina funciones de red.

10-1. PARES DE TERMINALES O PUERTOS

Sea una red arbitraria compuesta en su totalidad por elementos pasivos. Para indicar la naturaleza general de la red, ésta se representará mediante el símbolo de un rectángulo (o una caja). Si en la red se conecta un conductor a cualquier nodo que se saca de la caja para que sea accesible, el extremo de este conductor se designa con el nombre de *terminal*.¹ Las terminales se necesitan para conectar las fuerzas impulsoras a la red, para conectar alguna otra red (por ejemplo, una carga) o para efectuar mediciones. El número mínimo de terminales que es útil es *dos*. Asimismo, las terminales se asocian en pares, un par para la fuerza impulsora, otro par para la carga, etc. Las

¹ A veces las terminales se denominan *polos*, sobre todo en textos alemanes. Sin embargo, esto da como resultado una aplicación doble del vocablo polo, como se verá más adelante en este capítulo.

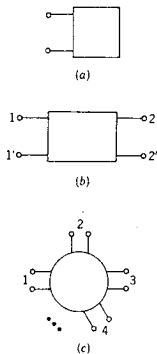


Figura 10-1. (a) Red de un puerto, (b) red de dos puertos y (c) representación de la red de n puertos.



Figura 10-2. La red de dos puertos con los sentidos de referencia para los voltajes y las corrientes de puerto que se indican.

dos terminales asociadas se denominan *par de terminales o puerto*, sugiriendo un puerto de entrada a la red.

En la figura 10-1(a) se muestra una representación de una red de un solo puerto. Por lo general, el par de terminales se conecta a una fuente de energía que es la fuerza impulsora de la red de tal modo que dicho par se conoce como *punto impulsor* de la red. En la figura 10-1(b) se ilustra una red de dos puertos. El puerto designado como 1-1' se supone conectado a la fuerza impulsora (o la *entrada*) y el puerto 2-2' se conecta a una carga (como una *salida*). En (c) de la figura 10-1 aparece una representación de una red de n puertos para el caso general; también se verán en algunos casos las redes con n terminales, que son distintas de las redes de n puertos. Se pondrá ahora énfasis en las redes de uno y dos puertos.

10-2. FUNCIONES DE RED PARA REDES DE UNO Y DOS PUERTOS

La impedancia transformada en un puerto se ha definido como la relación entre la transformada del voltaje a la transformada de la corriente para una red en estado cero (sin condiciones iniciales) cuando no se cuenta con fuentes internas de voltaje o corriente, excepto las fuentes controladas. Por tanto, se puede escribir

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} \quad (10-1)$$

De igual manera, la admitancia transformada se define como la relación

$$Y(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{Z(s)} \quad (10-2)$$

Las transformadas del voltaje y de la corriente que definen la impedancia transformada y la admitancia transformada, se deben relacionar con el mismo puerto, 1-1' ó 2-2' de la figura 1-2. La impedancia o la admitancia determinada en un puerto se conoce como *impedancia (o admitancia) de punto impulsor*.

Debido a la similitud de la impedancia y la admitancia (y para no tener que escribir "impedancia y admitancia"), las dos cantidades se identifican con un solo nombre, *immitancia* (que es una combinación de *impedancia* y *admitancia*). Por tanto, una immitancia es una impedancia o una admitancia.

La función de transferencia se usa para describir redes que tienen por lo menos dos puertos, y estas funciones se calculan con las mismas suposiciones que se indicaron para las funciones de punto impulsor. En general, la función de transferencia relaciona a la transformada de una cantidad en un puerto con la transformada de otra

cantidad en otro puerto. Por consiguiente, las funciones de transferencia que relacionan los voltajes con las corrientes tienen las siguientes formas posibles:

- (1) La relación de un voltaje a otro voltaje o relación de transferencia de voltajes.
- (2) La relación de una corriente a otra corriente o relación de transferencia de corriente.
- (3) La relación de una corriente a otro voltaje o de un voltaje a otra corriente.

Aunque no de un modo universal, se acostumbra definir las funciones de transferencia como la relación de una cantidad de salida a una cantidad de entrada. En términos de la red de dos puertos de la figura 10-2, las cantidades de salida con $V_2(s)$ e $I_2(s)$ y las cantidades de entrada son $V_1(s)$ e $I_1(s)$. Utilizando este esquema, existen sólo cuatro funciones de transferencia para la red de dos puertos, y son las que se tabulan en la tabla 10-1, junto con la designación correspondiente a cada una de ellas. La forma en que se determinan las funciones de red se ilustrará con varias redes sencillas.

TABLA 10-1. FUNCIONES DE TRANSFERENCIA PARA RED DE DOS PUERTOS.

Denominador	Numerador	
	$V_2(s)$	$I_2(s)$
$V_1(s)$	$G_{12}(s)$	$Y_{12}(s)$
$I_1(s)$	$Z_{12}(s)$	$\alpha_{12}(s)$

EJEMPLO 1

En la figura 10-3 se muestra una red RLC en serie, de un puerto, con impedancias transformadas que se indican para cada elemento. La impedancia de punto impulsor es

$$Z(s) = R + Ls + \frac{1}{Cs} = \frac{LCs^2 + RCs + 1}{Cs} \quad (10-3)$$

o bien

$$Z(s) = L \frac{s^2 + (R/L)s + 1/LC}{s} \quad (10-4)$$

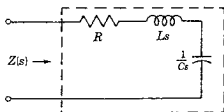


Figura 10-3. Red del ejemplo 1.

El polinomio del numerador de esta impedancia de punto impulsor es de segundo grado,² en tanto que el del denominador es de primer grado.

EJEMPLO 2

En la figura 10-4 se muestra una red más compleja que consiste en una red RL en serie, con un capacitor en derivación. La impedancia de punto impulsor es

$$Z(s) = \frac{1}{Cs + 1/(R + Ls)} = \frac{1}{C} \frac{s + R/L}{s^2 + (R/L)s + 1/LC} \quad (10-5)$$

En esta función de la impedancia de punto impulsor el numerador es de primer grado y el denominador de segundo. La función admitancia de punto impulsor $Y(s)$ de dicha red es la recíproca de la ecuación (10-5).

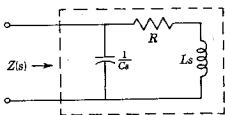


Figura 10-4. Red de un puerto del ejemplo 2.

EJEMPLO 3

La red de dos puertos que se muestra en la figura 10-5 tiene como voltaje de entrada a $V_1(s)$, y $V_2(s)$ es la transformada del voltaje de salida. Esta red actúa como un divisor del voltaje. Cuando no hay corriente en las terminales de salida, las ecuaciones del voltaje son

$$RI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) = V_1(s) \quad (10-6)$$

$$\frac{1}{Cs}I(s) = V_2(s) \quad (10-7)$$

La relación de estas ecuaciones es

$$G_{12}(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{(1/Cs)I(s)}{(R + 1/Cs)I(s)} = \frac{1/RC}{s + 1/RC} \quad (10-8)$$

² En lo que resta de libro se usará la palabra *grado* en vez de *orden*, como en los primeros capítulos. Véase la nota 3 de pie de página del capítulo 6.

Funciones de red para redes de uno y dos puertos 327

De acuerdo con la ecuación (10-6), la relación entre $I(s)$ y $V_1(s)$ es

$$Y_{11}(s) = \frac{I(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{R} \frac{s}{s + 1/RC} \quad (10-9)$$

para esta red.

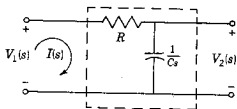


Figura 10-5. Red de dos puertos del ejemplo 3.

EJEMPLO 4

La red de dos puertos que se muestra en la figura 10-6 es igual a la del ejemplo 1, excepto en que el resistor se ha substituido por un inductor. No es necesario escribir las ecuaciones de Kirchhoff, como antes se hizo, para encontrar la función de transferencia, ya que esta red es esencialmente un divisor de voltaje. Esto significa que puesto que de acuerdo con la ley de voltajes de Kirchhoff $V_1 = V_L + V_C = LsI(s) + (1/Cs)I(s)$ y de acuerdo con la red se establece la identidad $V_2 = V_C = (1/Cs)I(s)$, la relación de voltajes se determina como sigue:

$$G_{12}(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{V_C}{V_L + V_C} = \frac{1/Cs}{Ls + 1/Cs} = \frac{1}{LCs^2 + 1} \quad (10-10)$$

o bien

$$G_{12}(s) = \frac{1/LC}{s^2 + 1/LC} \quad (10-11)$$

El polinomio del numerador es de grado cero y el del denominador es de segundo grado.

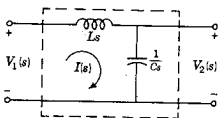


Figura 10-6. Red de dos puertos del ejemplo 4.

EJEMPLO 5

Este mismo concepto de la red divisora de voltaje se puede usar con más de una corriente de malla en la red, por medio de una reducción de red. En la figura 10-7 se muestra una red de tal tipo.

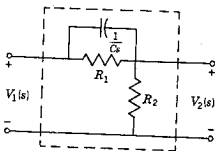


Figura 10-7. Red de dos puertos del ejemplo 5.

Las impedancias transformadas R_1 y $1/Cs$ se pueden combinar en una impedancia equivalente que tiene el valor

$$Z_{eq}(s) = \frac{1}{Cs + 1/R_1} = \frac{R_1}{R_1Cs + 1} \quad (10-12)$$

Entonces, la función de transferencia se convierte en

$$G_{12}(s) \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R_2}{R_2 + Z_{eq}(s)} \quad (10-13)$$

o bien

$$G_{12}(s) = \frac{R_2 R_1 C s + R_2}{R_2 R_1 C s + R_1 + R_2} \quad (10-14)$$

que se puede reducir a

$$G_{12}(s) = \frac{s + 1/R_1 C}{s + (R_1 + R_2)/R_1 R_2 C} \quad (10-15)$$

En esta función de transferencia son idénticos el grado del numerador y el grado del denominador. Esta red particular tiene grandes aplicaciones en control automático en donde se conoce como red "de guía".

EJEMPLO 6

Para la red de la figura 10-8, que se excita mediante una fuente de corriente, se pide que se calcule $\alpha_{12}(s)$ y $Z_{12}(s)$. Obsérvese que ésta es una red divisora de corriente, en el mismo sentido que en los otros ejemplos se ha incluido una división de voltaje. Por tanto,

$$I_1(s) = I_a(s) + I_2(s) = V_1(s)[Y_a(s) + Y_2(s)] \quad (10-16)$$

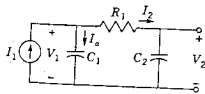


Figura 10-8. Red del ejemplo 6 alimentada por una fuente de corriente.

y, puesto que $I_2(s) = Y_2(s)V_1(s)$, se tiene que

$$I_2(s) = \frac{Y_2(s)}{Y_a(s) + Y_2(s)} I_1(s) \quad (10-17)$$

de tal manera que

$$\alpha_{12}(s) = \frac{I_2(s)}{I_1(s)} = \frac{Y_2(s)}{Y_a(s) + Y_2(s)} \quad (10-18)$$

Como $Y_2(s) = (s/R_1)/(s + 1/R_1 C_2)$, y $Y_a(s) = C_1 s$, se tiene que

$$\alpha_{12}(s) = \frac{1}{R_1 C_1} \frac{1}{s + (C_1 + C_2)/R_1 C_1 C_2} \quad (10-19)$$

Ahora, $V_2(s) = (1/C_2 s) I_2(s)$ en la red de la figura 10-8, de manera que

$$Z_{12}(s) = \frac{V_2(s)}{I_1(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 C_2} \frac{1}{s + (C_1 + C_2)/R_1 C_1 C_2} \quad (10-20)$$

Si los elementos de la red tienen los valores $C_1 = 1 \text{ F}$, $R_1 = 1 \Omega$, y $C_2 = 2 \text{ F}$, entonces las funciones de transferencia se convierten en

$$\alpha_{12}(s) = \frac{1}{s + 1.5} \quad \text{y} \quad Z_{12}(s) = \frac{0.5}{s(s + 1.5)} \quad (10-21)$$

Se observa que todas las funciones de red que se han calculado son cocientes de polinomios en s , y tienen la forma general

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m} \quad (10-22)$$

que es una función racional de s (n y m son enteros). En la ecuación, n es el grado del polinomio del numerador y m es el grado del polinomio del denominador. Este será el caso general, como se observa en la ecuación (9-62) del capítulo anterior, que es

$$\frac{I_k(s)}{V_j(s)} = \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} \quad (10-23)$$

Dicha ecuación se dedujo para las condiciones que se supusieron para la red de dos puertos o para una red de un puerto en donde $j = k = 1$. En esta ecuación, Δ es el determinante de la matriz de impedancia $[Z]$, y Δ_{jk} es un cofactor de Δ en donde se han eliminado el renglón j y la columna k . Ahora, un elemento típico de Δ y, por tanto, en Δ_{jk} , es

$$Z_{jk} = R_{jk} + L_{jk} s + \frac{1}{C_{jk} s} \quad (10-24)$$

Esta evaluación de Δ y Δ_{jk} incluirá productos, sumas y cocientes de términos semejantes a los de la ecuación (10-24) y, por tanto, dará siempre como resultado un cociente racional de polinomios de la

forma de la ecuación (10-22). Tal enunciado se aplica a todas las funciones de red. Las funciones de la relación de voltajes y de la relación de corrientes se obtienen a partir de la ecuación (10-23), observando que $I_k = Y_k V_k$ y $V_j = I_j Z_j$, de tal manera que estas funciones de red se pueden escribir como el cociente de la ecuación (10-23) multiplicada ya sea por Y_k o por Z_j . Habiendo establecido el citado resultado, a continuación se considerarán los polinomios $p(s)$ y $q(s)$ que representan a cualquier función de red.

10-3. CALCULO DE LAS FUNCIONES DE RED

(1) *Redes escalera.* En primer lugar se muestra que se pueden seguir procedimientos sencillos para computar las funciones de immitancia para una clase especial de estructuras de red, la escalera. La red escalera se ilustra en la figura 10-9. Si cada immitancia representa un elemento, la red se conoce como escalera *simple*. De otra manera,

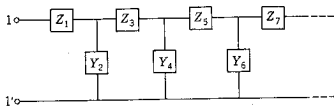


Figura 10-9. Una red escalera general, que se describe como una escalera simple Z o Y , describe un sólo elemento.

la red de escalera puede tener brazos que son arbitrariamente complicados, como se indica en el ejemplo de la figura 10-10. Se sigue la práctica de representar los brazos en serie por medio de sus impedancias y los brazos en paralelo por sus admittancias, debido a razones que más adelante se explican.

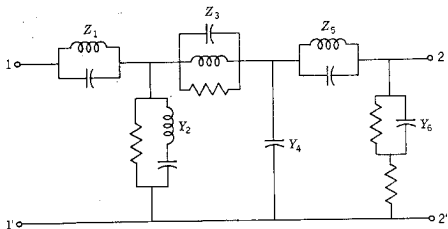


Figura 10-10. Una red escalera no simple.

En primer lugar se considera el cálculo de las immitancias de punto impulsor para la red escalera. Si se trata de encontrar un parámetro de circuito abierto o en corto circuito, se supone que el puerto apropiado se prepara ya sea abriéndolo o poniéndolo en corto circuito. Los cálculos se inician en un puerto que no sea aquel para el que se determina la immitancia de punto impulsor. Por tanto, en la figura 10-10 (en donde sólo se consideran seis brazos) se principia con Y_6 . Primero se invierte y se combina con Z_5 . A continuación, esta suma se invierte y se combina con Y_4 . El método se continúa hasta que concluye el proceso. Entonces, la impedancia será

$$Z = Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{Z_5 + \frac{1}{Y_6}}}}} \quad (10-25)$$

Esta ecuación se conoce como *fracción continua*. Se puede simplificar para determinar Z para una red de escalera determinada.

EJEMPLO 7

Se pide que se determine la impedancia de punto impulsor en circuito abierto para la red que se ilustra en la figura 10-11. De acuerdo con la ecuación 10-25, la impedancia que se requiere es

$$Z_{11} = s + \frac{1}{s + \frac{1}{s + \frac{1}{s}}} \quad (10-26)$$

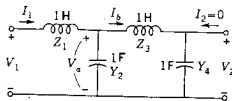


Figura 10-11. Red de escalera del ejemplo 5.

Esta ecuación se reduce principiando en el último término y combinando los términos paso a paso, lo cual da

$$Z_{11} = \frac{s^4 + 3s^2 + 1}{s^3 + 2s} \quad (10-27)$$

Se utiliza un método diferente para encontrar las funciones de transferencia para la red escalera. Esto requiere que se principie en el puerto de salida y luego se trabaje hacia el puerto de entrada, aplican-

do sucesivamente la ley de corrientes de Kirchhoff y la ley de voltajes de Kirchhoff. Las ecuaciones que se obtienen tienen una forma particularmente simple en que la primera puede substituirse en la segunda y luego la ecuación resultante se substituye en la tercera. El proceso se continúa hasta encontrar una ecuación que relacione a la salida con la entrada. En ningún punto de este método de substitución se encontrarán ecuaciones simultáneas.

EJEMPLO 8

De nuevo se considera la red de la figura 10-11 y se deberá determinar V_2/I_1 y V_2/V_1 . Principiando en el extremo derecho, se escriben las siguientes ecuaciones:

$$I_b = Y_4 V_2 = s V_2 \quad (10-28)$$

$$V_a = V_2 + I_b Z_3 = (s^2 + 1) V_2 \quad (10-29)$$

$$I_1 = I_b + Y_2 V_a = [s + s(s^2 + 1)] V_2 \quad (10-30)$$

$$V_1 = V_a + Z_1 I_1 = [(s^2 + 1) + s(s^2 + 2s)] V_2 \quad (10-31)$$

De acuerdo con la ecuación (10-30), se observa que

$$\frac{V_2}{I_1} = \frac{1}{s^3 + 2s} \quad (10-32)$$

y, de acuerdo con la ecuación (10-31),

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{s^4 + 3s^2 + 1} \quad (10-33)$$

Tal sistema de ecuaciones se puede escribir para cualquier red escalera y en esta forma se puede encontrar cualquier función de transferencia mediante operaciones algebraicas rutinarias. A veces es más fácil efectuar los cálculos del tipo descrito para cierto número de frecuencias específicas de interés, que derivar una ecuación general para la ecuación de transferencia. En estos cálculos se acostumbra suponer una salida de 1 volt o 1 ampère y luego calcular el valor numérico del voltaje o la corriente de entrada que se requiere. Puesto que lo que se busca es una relación de una cantidad de salida a una cantidad de entrada, no se pierde nada suponiendo este valor numérico conveniente para la salida. Por esta razón, el método que se describe a veces se denomina *método de unidad de salida* de las funciones de transferencia que se calculan. Por supuesto, esto se aplica solamente a las redes escalera.

(2) *Redes generales.* Las redes utilizadas para los ejemplos anteriores de este capítulo son del tipo escalera. Esta es una estructura importante, ya que es el tipo que se encuentra con mayor frecuencia, por ejemplo, en las aplicaciones electrónicas. Es de interés observar

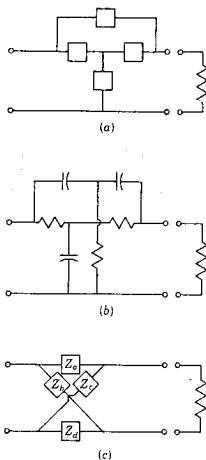


Figura 10-12. Formas comunes de redes no escalera: (a) T puenteada, (b) T en paralelo y (c) celosía.

que existen otras estructuras de red a las que no se pueden aplicar las técnicas antes descritas y también es útil revisar el procedimiento que se debe seguir en tales casos.

En la figura 10-12 se muestran varias redes que no son del tipo escalera. Entre los nombres descriptivos por los que se las conoce se incluyen (a) T puenteada, (b) T paralela o doble T y (c) celosía. En cualquiera de dichas estructuras se puede ver la razón para que no se les apliquen las técnicas para la red escalera. Obsérvese que la corriente en la salida se relaciona con un cierto número de voltajes de nodo, en vez de simplemente con un voltaje de nodo, lo cual significa que las ecuaciones que se van a escribir son simultáneas y que deberán resolverse de acuerdo con el método estándar del análisis por nodos o mallas.

Para las redes que no son del tipo escalera, las funciones de red se deben expresar como un cociente de determinantes formulados en base de nodos o de mallas. En capítulos anteriores, se han escrito ecuaciones de esta forma varias veces, por ejemplo en la ecuación (9-62). Los resultados anteriores se pueden resumir en la ecuación

$$Y_{jk} = \frac{\Delta_{kj}}{\Delta} \quad (10-34)$$

334 Funciones de red: polos y ceros

en donde Δ es el determinante del sistema en base de mallas y Y se substituye mediante y si el puerto de salida se pone en corto circuito, y en

$$Z_{jk} = \frac{\Delta'_{kj}}{\Delta'} \quad (10-35)$$

en donde Δ' es el determinante del sistema en base de nodos (con una conexión común a tierra entre el puerto 1 y el puerto 2) y z substituye a Z cuando se abre el puerto de salida. Las dos ecuaciones restantes para las relaciones de voltajes y corrientes son

$$G_{12} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\Delta'_{12}}{\Delta'_{11}} \quad (10-36)$$

y

$$\alpha_{12} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} \quad (10-37)$$

EJEMPLO 9

Para la red T puenteadada de la figura 10-13 el determinante del sistema en base de mallas es

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{s} + 1 & 1 & -\frac{1}{s} \\ 1 & \frac{1}{s} + 2 & \frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{2}{s} + 1 \end{vmatrix} \quad (10-38)$$

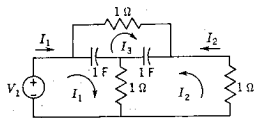


Figura 10-13. Red T puenteadada que se analiza en el ejemplo 7.

Desarrollando el determinante y los cofactores apropiados, se encuentra que la admitancia de entrada es

$$Y_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{2s^2 + 5s + 1}{s^3 + 5s + 2} \quad (10-39a)$$

y la admitancia de transferencia es

$$Y_{12} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta} = -\frac{(s^2 + 2s + 1)}{s^3 + 5s + 2} \quad (10-39b)$$

Obsérvese que cuando la salida, el puerto 2 de la red de la figura 10-13, se pone en corto circuito, la red se reduce a la forma de escalera.

10-4. POLOS Y CEROS DE FUNCIONES DE RED

Se ha demostrado que todas las funciones de red tienen la forma de un cociente de polinomios en s .

$$N(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m} \quad (10-40)$$

en donde los coeficientes a y b son reales y positivos para las redes de elementos pasivos y fuentes no controladas. Ahora, la ecuación $p(s) = 0$ tiene n raíces y $q(s) = 0$ tiene también m raíces. Tanto $p(s)$ como $q(s)$ se pueden escribir como un producto de factores lineales que incluyen estas raíces

$$N(s) = H \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_m)} \quad (10-41)$$

en donde $H = a_0/b_0$ es una constante que se conoce como *factor de escala*, y $z_1, z_2, \dots, z_n, p_1, p_2, \dots, p_m$ son frecuencias complejas. Cuando la variable s tiene los valores z_1, z_2, \dots, z_n , la función de red se hace nula; este tipo de frecuencias complejas se denominan *los ceros* de la función de red. Cuando s tiene los valores p_1, p_2, \dots, p_m , la función de red se hace infinita; estas frecuencias complejas son los *polos* de la función de red. En la ecuación (10-41) los factores $(s - z_i)$ se denominan *factores de cero* y $(s - p_j)$ son los *factores de polo*. Los polos y los ceros son útiles para describir las funciones de la red. Se observa en las ecuaciones (10-40) y (10-41) que una función de red queda especificada por completo mediante sus polos, sus ceros, y el factor de escala.

Cuando r polos o ceros de la ecuación (10-41) tienen el mismo valor, se dice que el polo o cero tienen *multiplicidad* r , aunque con frecuencia se usarán términos como doble, triple, etc., para describir la multiplicidad. Si el polo o el cero no se repite, se dice que es *simple o distinto*. A los polos y los ceros para $s = \infty$ se les asigna también un grado: cuando $n > m$ en la ecuación (10-40), el polo en el infinito es del grado o multiplicidad $n - m$; cuando $n < m$, el cero en el infinito es de grado m menos n .

Si para cualquier función racional de red se toman en consideración los polos y los ceros en cero e infinito además de los polos y los ceros finitos, el número total de ceros es igual al número total de polos. Por ejemplo, la función de red

$$N(s) = \frac{s^2(s + 3)}{(s + 1)(s + 2 + j1)(s + 2 - j1)} \quad (10-42)$$

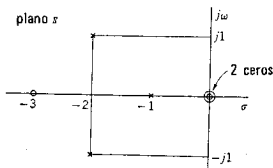


Figura 10-14. Los polos y ceros de $N(s)$ de la ecuación 10-42.

tiene un doble cero en $s = 0$ (el origen), un cero en -3 , y polos en -1 , $-2 + j1$, y $-2 - j1$. Si el factor $(s + 1)$ estuviera elevado al cuadrado, entonces $N(s)$ habría tenido un doble polo en -1 y un cero en el infinito. Los polos y los ceros de $N(s)$ de la ecuación (10-42) aparecen graficados en el plano s en la figura 10-14. Es conveniente utilizar el símbolo \circ para designar la ubicación de un cero y el símbolo \times para la ubicación de un polo.

Los polos y los ceros son *frecuencias críticas*. La función de red se hace infinita en los polos, en tanto que en los ceros se hace cero. A otras frecuencias complejas, la función de red tiene un valor finito distinto de cero. En la figura 10-15 se muestra una representación tridimensional de la magnitud de la función de transferencia en función de la frecuencia compleja para un cuadrante del plano s . La

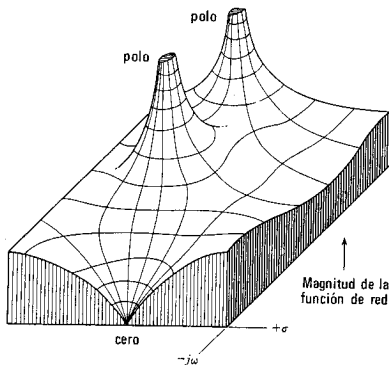


Figura 10-15. La magnitud de una función de red presentada en función de la frecuencia compleja con dos polos y un cero.

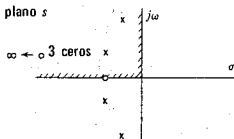


Figura 10-16. La porción del plano s que se ilustra en la figura 10-15 se muestra identificada.

porción del plano complejo que se representa en la figura 10-15 se muestra en la figura 10-16. Esta función particular de red tiene cuatro polos finitos, un cero finito y un cero de tercer orden en el infinito.

El polo representa una frecuencia a la que la función de red “estalla”. El cero representa una frecuencia a la que se produce el comportamiento opuesto: la función de red se anula. Las expresiones “estallar” o “anularse” suenan como un comportamiento más bien drástico de la función de red. Se podría pensar que conviene evitar por completo los polos y los ceros para seleccionar funciones de red sin polos y ceros. Sin embargo, éste no es el caso. Los polos y los ceros son la vida misma de una función; sin polos y ceros la función se reduce a una constante tediosa, monótona y sin objeto —una función que no cambia en ninguna condición. Sin polos y ceros, la representación tridimensional de la función de red se convierte en un desierto matemático —absolutamente plano. Sin embargo, si se agregan algunos polos y unos cuantos ceros y se tiene una tierra de picos espectaculares (elevación: ∞) y hermosos manantiales (elevación: 0) la tierra s cuyas coordenadas (latitud y longitud con respecto a $s = 0$, en vez de Greenwich) son frecuencias complejas.

¿Qué se puede aprender de una gráfica de polos y ceros? Una respuesta posible se deriva de la ecuación

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = G_{12}(s) \quad (10-43)$$

que se puede escribir como sigue:

$$V_o(s) = G_{12}(s)V_i(s) \quad (10-44)$$

En el problema normal, $v_i(t)$ se especifica y $G_{12}(s)$ se puede computar a partir de la red. El problema consiste en encontrar la respuesta, $v_o(t)$. Cuando la última ecuación se desarrolla por fracciones parciales, el denominador de cada término de fracción parcial da un polo de $G_{12}(s)$ o bien de $V_i(s)$; es decir, cuando no hay raíces repetidas en el denominador de $V_o(s)$,

$$G_{12}(s)V_i(s) = \sum_{j=1}^n \frac{K_j}{s - p_j} + \sum_{k=1}^m \frac{K_k}{s - p_k} \quad (10-45)$$

en donde u es el número de polos de $G_{12}(s)$ y v es el número de polos de $V_i(s)$. La transformación inversa de Laplace de esta ecuación es

$$v_i(t) = \mathcal{L}^{-1}[G_{12}(s)V_i(s)] = \sum_{j=1}^u K_j e^{p_j t} + \sum_{k=1}^v K_k e^{p_k t} \quad (10-46)$$

Por tanto, las frecuencias s_j son las frecuencias complejas naturales correspondientes a oscilaciones libres. Las frecuencias s_k son las frecuencias complejas de fuerza impulsora o de excitación que corresponden a *oscilaciones forzadas*. En consecuencia, los polos determinan la forma de onda en función del tiempo de la respuesta, el voltaje de salida. Los ceros determinan la magnitud de cada parte de la respuesta, ya que controlan la magnitud de K_j y K_k en el desarrollo en fracciones parciales, como se verá más adelante.

Para las immitancias de punto impulsor, los polos y los ceros tienen significados que se pueden ver con toda claridad. Puesto que $Z(s) = V(s)/I(s)$, un polo de $Z(s)$ implica una corriente cero para un voltaje finito, lo que significa un circuito abierto. Por otro lado, un cero de $Z(s)$ significa voltaje nulo con una corriente finita, es decir, un corto circuito. Por tanto, una red de un par de terminales es un circuito abierto para las frecuencias de polo y un corto circuito para las frecuencias de cero. Esto se puede representar con facilidad en función de redes de un solo elemento. Para un capacitor, la impedancia de punto impulsor es $Z(s) = 1/Cs$. Tal función de red tiene un polo en $s = 0$ y un cero en $s = \infty$. Se comporta como un circuito abierto para frecuencia de polo ($s = 0$) y como un corto circuito para frecuencia infinita. De igual manera, para un inductor, la impedancia de punto impulsor $Z(s) = Ls$ (cero en $s = 0$, polo en $s = \infty$) y este elemento se comporta como un corto circuito para frecuencia cero y como un circuito abierto a una frecuencia infinita.

10-5. RESTRICCIONES PARA LAS UBICACIONES DE POLOS Y CEROS DE FUNCIONES DE PUNTO IMPULSOR

Ya se observó que los polinomios $p(s)$ y $q(s)$ de la función de red $N(s) = p(s)/q(s)$ tienen la forma

$$p(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n \quad (10-47)$$

en las que los coeficientes son reales y positivos. Así pues, se observa que cuando s es real, $p(s)$ será real; esta función se conoce como *función real*. Si $p(s)$ de la ecuación (10-47) es una función real y si uno de los ceros de $p(s)$ es complejo, su conjugado también debe ser un cero de $p(s)$; de otra manera, algunos de los coeficientes de $p(s)$ serían complejos. Por tanto, el producto

$$p(s) = (s + a + jb)(s + a - jb) = (s + a)^2 + b^2 \quad (10-48)$$

o bien

$$p(s) = s^2 + 2as + (a^2 + b^2) \quad (10-49)$$

tiene coeficientes reales cuando a y b son reales. Para que el segundo coeficiente sea positivo, también es necesario que a sea positivo. Ahora, el producto de otros factores complejos que no son conjugados, $(s + a + jb)(s + c + jd)$, $a \neq c$, $b \neq d$, no tienen solamente coeficientes reales y, por tanto, se excluyen como factores en las funciones de red.

La segunda propiedad de $N(s)$ se deriva del supuesto de que las redes compuestas sólo de elementos pasivos son *estables* en el sentido de que la excitación debida a una condición inicial en el elemento da como resultado una salida limitada, lo cual significa una salida que nunca se hace infinita sea cual fuere la duración que se considere.

Ahora se verá una red de un puerto. Si la excitación es una fuente de voltaje, la respuesta será la corriente en la entrada. Sin embargo, si la excitación es una fuente de corriente, la respuesta es el voltaje de entrada. Puesto que la red debe ser estable para cualquiera de las dos clases de entrada, es evidente que las conclusiones a que se llegue para los polos se aplicarán también a los ceros. Supóngase que el denominador de la immitancia de punto impulsor contiene el factor $(s - s_a)$, en donde $s_a = \sigma_a + j\omega_a$ es complejo. Este factor dará como resultado un término en la respuesta en el dominio del tiempo de la forma

$$K_a e^{s_a t} = K_a e^{\sigma_a t} e^{j\omega_a t} \quad (10-50)$$

que si se combina con el término resultante de s_a^* se tendrá

$$K_0 e^{\sigma_a t} \sin(\omega_a t + \theta_a) \quad (10-51)$$

como se vio en el capítulo 6. Para que la respuesta permanezca limitada, es necesario que $\sigma_a \leq 0$. Puesto que estos argumentos se aplican tanto a los polos como a los ceros, se observa que los polos y los ceros de las immitancias de punto impulsor tienen sólo *partes reales negativas* (o *cero*). En lo que respecta a las ubicaciones de polos y ceros en el plano s , todos los polos y los ceros deben estar en la *mitad izquierda del plano s* (MIP) y nunca se pueden presentar en la *mitad derecha del plano* (MDP). Los polos y los ceros pueden estar en la frontera (el eje imaginario), con la limitación de que tales polos y ceros sean *simples*. La razón de esta restricción es que los polos de orden 2 o mayor dan origen a términos en el dominio del tiempo que crecen según t^{n-1} , en donde n es el orden del polo, y este tipo de respuestas no están limitadas como es necesario. Como ejemplo, sea el par de transformadas

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + \omega_a^2)^2} \right] = \frac{t}{2\omega_a} \sin \omega_a t \quad (10-52)$$

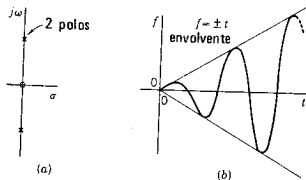


Figura 10-17. La transformada inversa de Laplace de la función que tiene los polos y ceros de (a) se presenta en (b).

que corresponden a la configuración de polos-ceros de la figura 10-17, con polos dobles en $\pm j\omega_a$. La respuesta en el dominio del tiempo es una senoide con una amplitud que aumenta linealmente, tal como se indica en la figura 10-17(b), que es una respuesta no limitada.

Se permiten polos y ceros múltiples en otras ubicaciones en la mitad izquierda del plano s , ya que estos polos dan origen a términos de la forma $t^m e^{-\sigma t}$, que tienen el límite cero requerido, ya que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^m e^{-\sigma t} = 0 \quad (10-53)$$

para una m finita, de acuerdo con la regla de l'Hospital.

En resumen, se observa que $p(s)$ y $q(s)$ son polinomios producto de los siguientes factores: K , $(s+a)$, donde a puede ser cero, $s^2 + bs + c$, y $s^2 + d$, donde K , a , b , c y d son reales y positivos. Cuando se forma el producto de estos factores no existe un mecanismo para que se introduzca un signo negativo, lo cual significa que todos los coeficientes de $p(s)$ y $q(s)$ son reales y positivos, como se requiere. Es posible aplicar el mismo razonamiento para demostrar que ningún coeficiente puede ser cero (ningún término del polinomio puede faltar) ¡a menos que falten todos los términos pares o todos los impares! La observación crucial para llegar a esta conclusión es que no existe forma alguna de introducir signos negativos, y sin términos negativos que cancelen a los positivos no es posible que un coeficiente sea cero. Por tanto, el polinomio $p(s)$ de la ecuación (10-47) y también $q(s)$ tienen todos sus coeficientes reales y positivos y, además, son *distintos de cero* excepto en dos casos especiales. Si $p(s)$ se compone exclusivamente de factores del tipo de $s^2 + d$, entonces $p(s)$ es un polinomio par y los coeficientes de todos los términos impares son cero. Si $p(s)$ tiene un cero simple en el origen, los términos $s^2 + d_j$ se multiplican por s y se obtiene como resultado un polinomio impar, lo que significa que los coeficientes de todos los términos pares son cero.

Otra propiedad interesante de las funciones de punto impulsor se puede encontrar considerando la conducta de la red de un puerto a frecuencias muy altas o muy bajas. La immitancia del inductor y del

capacitor cambia con la frecuencia. A frecuencias muy elevadas, las immitancias de estos dos elementos, $Z_L = Ls$ y $Y_C = Cs$, dominarán la función de immitancia de la red en el sentido de que ya sea Z_L o Y_C serán muy grandes en comparación con cualquier otra immitancia de elemento. Si no hay L en la red cuya impedancia se trata de determinar, o si C no se incluye en el cálculo de la admitancia (o si estos elementos están en corto circuito a causa de otros), entonces la resistencia será el elemento dominante, o bien la red equivalente estará en corto circuito, lo cual significa que $Z_C = 1/Cs$ o $Y_L = 1/Ls$ es la forma de immitancia conforme s tiende a un valor infinito. Por tanto, la representación equivalente del puerto a altas frecuencias comprenderá cuando mucho una clase de elemento y será una de las tres posibilidades que se ilustran en la figura 10-18, incluyendo $R_{eq} = 0$ ó ∞ . Estas mismas conclusiones con respecto a la representación de un solo elemento se aplican al equivalente de baja frecuencia de un puerto, como se puede observar en las ecuaciones duales a las dadas, $Y_L = 1/Ls$ y $Z_C = 1/Cs$.

¿Qué condiciones deben cumplir las funciones de immitancia de punto impulsor para que las redes equivalentes de la figura 10-18 se apliquen cuando $s = \infty$ y $s = 0$? De acuerdo con la ecuación (10-40), en donde $N(s)$ es una función de punto impulsor, se observa que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} N(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{a_n s^n}{b_0 s^m} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_0} s^{n-m} \quad (10-54)$$

Para que en este límite $N(s)$ tenga una de las tres formas requeridas —una constante multiplicada por s , 1 ó $1/s$ —, es necesario que

$$|n - m| \leq 1 \quad (10-55)$$

lo cual significa que $n - m$ puede tener los valores de -1 , 0 ó 1 y ningún otro valor. En otras palabras, los grados de los polinomios del numerador y del denominador para las funciones de punto impulsor deben diferir cuando mucho en uno.

De la misma manera, a frecuencias bajas, conforme s tiende a cero, los términos de $p(s)$ o $q(s)$ de grado elevado son relativamente pequeños, de manera que se pueden desechar en tal forma que $N(s)$ sea aproximadamente

$$N(s) \approx \frac{\dots + a_{n-1}s + a_n}{\dots + b_{m-1}s + b_m} \quad (10-56)$$

Para que $N(s)$ se reduzca a una de las tres formas permitidas —una constante multiplicada por s , 1, ó $1/s$ —, se observa que sólo existen tres posibilidades. Supóngase que $a_{n-1} \neq 0$ y $b_{m-1} \neq 0$. Si $N(s)$ es impedancia, entonces $a_n = 0$, $b_m \neq 0$ representa un inductor, en tanto que $a_n \neq 0$, $b_m = 0$ representa a un capacitor. Si $N(s)$ es admitancia, entonces se requieren las condiciones opuestas para representar al in-

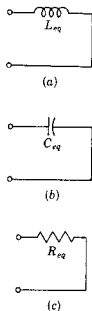


Figura 10-18. Formas posibles de la red equivalente de alta frecuencia para una red de un solo puerto.

ductor y al capacitor. Por último, $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$ significa que $N(0)$ es una constante que puede representar ya sea la impedancia o la admitancia de un resistor. En resumen, los términos del grado más bajo del numerador y el denominador de $N(s)$ *deben diferir de grado cuando mucho en uno*. A continuación se dan varios ejemplos para ilustrar las conclusiones a las que se ha llegado.

EJEMPLO 10

Alguien afirma que la impedancia de una red pasiva de un solo puerto es

$$Z(s) = \frac{4s^4 + s^2 - 3s + 1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 40} \quad (10-57)$$

Esta función no es apropiada para representar la impedancia de un puerto, lo que indica que se cometió un error en su determinación. En el numerador falta un coeficiente, y otro es negativo, lo cual indica la presencia de ceros en $Z(s)$ en la mitad derecha del plano. Efectivamente, en la forma factorizada de la ecuación, $4(s^2 + s + 1)(s - 0.5)^2$ se puede ver que esto sucede. Aunque no es tan evidente, el denominador tampoco es apropiado para una función de punto impulsor, ya que su forma factorizada, $(s + 4)(s^2 - 2s + 10)$, indica que hay dos polos de $Z(s)$ en la mitad derecha del plano.

EJEMPLO 11

Otro estudiante determinó la impedancia de una red de un solo puerto y obtuvo el siguiente resultado:

$$Z(s) = \frac{15s^3 + 2s^2 + 3s + 2}{s^4 + 6s^3 + 8s^2} \quad (10-58)$$

También en este caso se observa un error de cálculo debido a que esta función no es apropiada para representar la impedancia de una red de un puerto. El término del grado más bajo del numerador es de grado cero, en tanto que el del denominador es 2 —una diferencia que sobrepasa el margen permitido. Desde otro punto de vista, el denominador se factoriza a la forma $s^2(s + 2)(s + 4)$, y esto indica que hay un doble polo en el origen, lo cual tampoco se permite.

EJEMPLO 12

La función de impedancia

$$Z(s) = \frac{s^2 + s + 2}{2s^2 + s + 1} \quad (10-59)$$

satisface todos los requisitos que se han encontrado para la función de punto impulsor, de manera que *puede* ser la impedancia de un puerto. No se puede garantizar que $Z(s)$ se haya encontrado sin error alguno, pero reúne todas las condiciones necesarias que se han tabulado. Para determinar las condiciones que son tanto necesarias como suficientes, es preciso entender cómo encontrar una red a partir de la ecuación (10-59), un tema que se incluye en el estudio de *síntesis de redes*.³

TABLA 10-2. CONDICIONES NECESARIAS PARA FUNCIONES DE PUNTO IMPULSOR [EN QUE SE HAN ANULADO LOS FACTORES COMUNES EN $p(s)$ Y $q(s)$]

-
1. Los coeficientes de los polinomios $p(s)$ y $q(s)$ de $N=p/q$ deben ser reales y positivos.
 2. Los polos y los ceros deben ser conjugados si son imaginarios o complejos.
 3. (a) La parte real de todos los polos y ceros debe ser negativo o cero; además:
(b) Si la parte real es cero, entonces el polo o el cero debe ser simple.
 4. Los polinomios $p(s)$ y $q(s)$ no deben tener términos faltantes entre los de orden más alto y más bajo, a menos que falten todos los términos pares o todos los impares.
 5. El grado de $p(s)$ y $q(s)$ puede diferir ya sea en cero o sólo en uno.
 6. Los términos de grado más bajo de $p(s)$ y $q(s)$ pueden diferir en grado cuando mucho en uno.
-

Las conclusiones de esta sección, que son útiles para comprobar la determinación de las funciones de punto impulsor, aparecen resumidas en la tabla 10-2.

10-6. RESTRICCIONES PARA UBICACIONES DE POLOS Y CEROS PARA FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

Algunas de las propiedades importantes de las funciones de transferencia, Z_{12} , Y_{12} , G_{12} y α_{12} , se pueden determinar utilizando el mismo planteamiento que se dio para las funciones de punto impulsor. Sea una red de dos puertos, y sean 1-1' la entrada y 2-2' la salida, como se señala en la figura 10-2. En el puerto 1-1' se conecta una fuente de voltaje o una fuente de corriente, y en el puerto 2-2' se conecta una carga (un resistor) y se registra el voltaje o la corriente

³ Véase, por ejemplo, la obra del autor, *Introduction Modern Network Synthesis* (John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1960), capítulos 3 y 4; en la figura 7-17, página 178, se presenta una realización de red para la ecuación (10-59). La condición necesaria y suficiente para que $Z(s)$ tenga una realización de red es que $\text{Re } Z(s) \geq 0$ para $\text{Re } s \geq 0$ [además del requisito de que $Z(s)$ sea una función real].

de salida. Si la fuente genera un voltaje o corriente escalón, la respuesta de salida permanecerá limitada todo el tiempo, si la red es pasiva. Entonces se puede llegar a la conclusión de que la restricción en la parte real de los polos determinada para la red de un puerto se aplica a los polos de las funciones de transferencia que describen una red de dos puertos. Sin embargo, no se aplica a los ceros. Para la red de un puerto, se llegó a la conclusión de que los ceros provienen del hecho de que $Y(s) = 1/Z(s)$. Para la red de dos puertos, no existe esta relación; $Z_{12} \neq 1/Y_{12}$ y $G_{12} \neq 1/\alpha_{12}$ en general. En resumen, los polos de la función de transferencia se deben encontrar en la mitad izquierda del plano, incluyendo el límite (si es simple); pero a los ceros no se les restringe de esta manera y se pueden hallar en la mitad derecha del plano a condición de que sean conjugados si son complejos. Las funciones de red con los ceros en la mitad izquierda del plano se clasifican como *de fase mínima*; las que tienen ceros en la mitad derecha del plano se conoce como *de fase no mínima*.

Las reglas para la diferencia de grado de $p(s)$ y $q(s)$ para la función de transferencia $N(s) = p(s)/q(s)$ se ilustran ahora por medio de un cierto número de estructuras de redes simples. En la figura 10-19 se muestran dos estructuras de red conocidas como T y π . Se utilizará la red de (a) para ilustrar las propiedades de G_{12} y Z_{12} , y la de (b) para α_{12} y Y_{12} . Para las terminales de salida abiertas en (a) y en corto circuito en (b), Z_3 se puede poner en corto circuito y se puede abrir Y_3 sin afectar a G_{12} para (a) o a α_{12} para (b). Entonces para (a) se tiene, para la entrada V_1 ,

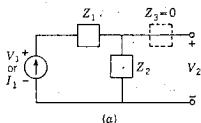
$$G_{12}(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{Z_3(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \quad (10-60)$$

en tanto que con una entrada de I_1 en (b),

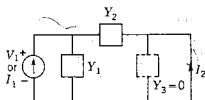
$$\alpha_{12}(s) = \frac{I_2(s)}{I_1(s)} = \frac{-Y_2(s)}{Y_1(s) + Y_2(s)} \quad (10-61)$$

Puesto que estas dos ecuaciones son duales, las ecuaciones que se encuentren para una se aplicarán a la otra. Por tal razón, esta exposición se limitará a G_{12} de la ecuación (10-60).

En la explicación para el puerto único se afirmó que conforme s tendía a infinito un tipo de elemento de la red era el dominante. Por supuesto, estas mismas conclusiones se aplican a la red de dos puertos, de manera que se pueden determinar las propiedades de las redes tomando en cuenta un tipo de elemento para las subredes Z_1 y Z_2 de la figura 10-19(a). Puesto que sólo hay tres clases de elementos, de los que se deben tomar dos a la vez, es sencillo agotar todas las posibilidades. El resultado se puede resumir en dos enunciados: (1) si los dos elementos son del mismo tipo, G_{12} se convierte en una constante (la red sirve sólo como un divisor de voltaje a frecuencia invariante). Dado que está tomando en cuenta sólo el equivalente a alta



(a)



(b)

Figura 10-19. (a) Una red T , uno de cuyos brazos tiene impedancia cero, y (b) una red π , uno de cuyos brazos tiene admitancia cero.

frecuencia de subredes más generales, Z_1 y Z_2 , en este caso corresponde evidentemente al grado de $p(s)$ que es igual al grado de $q(s)$. (2) Para otras combinaciones el grado del numerador es igual pero nunca excede al grado del denominador. Los dos casos se resumen mediante un solo enunciado que se aplica a las funciones de transferencia voltaje a voltaje y corriente a corriente: el grado máximo del numerador es el grado del denominador.

Para estudiar Z_{12} y Y_{12} se conecta I_1 a la red de la figura 10-19(a) y V_1 a la red de la figura 10-19(b). Agotando de nuevo todas las posibilidades al buscar una red que dé el grado máximo diferente para las funciones de transferencia, se llega a dos redes que son las que aparecen en la figura 10-20. Para estas dos redes que se ilustran se observa que

$$Z_{12} = \frac{V_2}{I_1} = Ls \quad \text{y} \quad Y_{12} = \frac{I_2}{V_1} = Cs \quad (10-62)$$

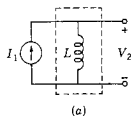
en donde el primer resultado corresponde a (a) y el segundo a (b). Puesto que estas ecuaciones deben representar a Z_{12} y Y_{12} conforme s tiende al infinito, la regla que abarca a Z_{12} y Y_{12} debe ser: el grado máximo del numerador es el grado del denominador más uno. Por tanto, se comprueba que dos reglas son necesarias para las funciones de transferencia.

¿Cuál debe ser el grado mínimo de $p(s)$ en comparación con $q(s)$? Otra vez se utilizará un ejemplo para ilustrar el resultado general. Para la red de la figura 10-21 (una celosía simétrica) se observa que

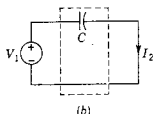
$$V_2 = V_1 \left(\frac{Z_b}{Z_a + Z_b} - \frac{Z_a}{Z_a + Z_b} \right) \quad (10-63)$$

Como para el puerto 1-1' la red se compone de dos ramas idénticas conectadas en paralelo, se tiene que

$$V_1 = I_1 \left[\frac{1}{2} (Z_a + Z_b) \right] \quad (10-64)$$

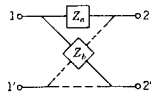


(a)

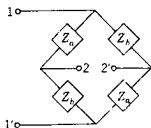


(b)

Figura 10-20. Casos especiales de redes de dos puertos que ilustran las reglas de diferencia de grado para las funciones de transferencia.



(a)



(b)

Figura 10-21. Dos representaciones para las celosías simétricas descritas por la ecuación (10-65). Las líneas punteadas de (a) de la figura indican que los dos brazos en serie tienen la misma impedancia, Z_a y también que los dos brazos en paralelo tienen la misma impedancia, Z_b .

Substituyendo este valor de V_1 en la ecuación (10-63), se obtiene

$$Z_{12} = \frac{V_2}{I_1} = \frac{1}{2}(Z_b - Z_a) \quad (10-65)$$

Si se hace que $Z_b = p_b/q_b$ y $Z_a = p_a/q_a$, se observa que

$$Z_{12} = \frac{1}{2} \frac{(p_b q_a - p_a q_b)}{q_a q_b} \quad (10-66)$$

Este resultado es útil porque relaciona a una función de transferencia con una diferencia de funciones de punto impulsor.

¿Cuál es el grado menor posible del numerador? Es evidente que la respuesta es *cero* que corresponde a una anulación término por término, excepto para el término constante. El valor de Z_{12} de la ecuación (10-21) determinado para la red del ejemplo 6 es un ejemplo de este caso, $Z_{12} = (1/2)/s$ ($s + 1.5$). La ecuación (10-66) es útil para examinar las conclusiones a que se llegó a partir de observaciones de estabilidad. En el polinomio del numerador cualquier término puede ser cero o negativo, dependiendo de la forma de anulación en la ecuación (10-66). El único requisito es que los polinomios tengan ceros que formen en pares conjugados si son complejos, ya sea que se encuentren en el semiplano izquierdo o en el derecho. Aunque dicho resultado se desarrolló para Z_{12} , se aplica también a todas las demás funciones de transferencia que ya se vieron: El resultado de la presente sección se resume en la tabla 10-3.

TABLA 10-3. CONDICIONES NECESARIAS PARA LAS FUNCIONES DE TRANSFERENCIA [DONDE SE ANULAN LOS FACTORES COMUNES DE $p(s)$ Y $q(s)$].

-
1. Los coeficientes de los polinomios $p(s)$ y $q(s)$ de $N = p/q$ deben ser reales, y los de $q(s)$ deben ser positivos.
 2. Los polos y los ceros deben ser conjugados si son imaginarios o complejos.
 3. (a) La parte real de los polos debe ser negativa o cero; además:
(b) Si la parte real es cero, entonces dicho polo debe ser simple. Esto incluye al origen.
 4. Los polinomios $q(s)$ no pueden tener términos faltantes entre los de más alto y más bajo orden, a menos que falten todos los términos pares e impares.
 5. El polinomio $p(s)$ puede tener términos faltantes entre los términos de más bajo y más alto grado, y algunos de los coeficientes pueden ser negativos.
 6. El grado de $p(s)$ puede ser tan pequeño que llegue a cero, independientemente del grado de $q(s)$.
 7. (a) Para G_{12} y α_{12} : el grado máximo de $p(s)$ es el grado de $q(s)$. (b) Para Z_{12} y Y_{12} : el grado máximo de $p(s)$ es el grado de $q(s)$ más uno.
-

10-7. COMPORTAMIENTO EN EL DOMINIO DEL TIEMPO A PARTIR DE LA GRAFICA DE POLOS Y CEROS

En esta sección se demostrará que la respuesta en el dominio del tiempo de un sistema se puede determinar a partir de la gráfica en el plano s de los polos y los ceros de una función, así como los de las transformadas de las fuentes de la red. Supóngase que se determina la transformada de una corriente $I(s)$ y que se encuentra que los polos y los ceros son:

$$I(s) = Y(s)V(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \quad (10-67)$$

en donde

$$\frac{p(s)}{q(s)} = H \frac{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)}{(s - s_a)(s - s_b) \dots (s - s_m)} \quad (10-68)$$

En la sección 10-5 se demostró que los polos de esta función determinan el comportamiento de $i(t)$ en el dominio del tiempo. Se sugirió que los ceros junto con los polos determinan la magnitud de cada uno de los términos de $i(t)$. En esta sección se amplían tales conceptos y se muestra la forma en que $i(t)$ se puede determinar si se conocen los polos, los ceros y el factor de escala H .

De acuerdo con la relación de amortiguamiento ζ y la frecuencia natural no amortiguada ω_n , como se vio en el capítulo 6, los polos y los ceros de la última ecuación tendrán las siguientes formas

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, \quad \zeta < 1 \quad (10-69)$$

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}, \quad \zeta > 1 \quad (10-70)$$

$$s_1, s_2 = -\omega_n, \quad \zeta = 1 \quad (10-71)$$

$$s_1, s_2 = \pm j\omega_n, \quad \zeta = 0 \quad (10-72)$$

También se demostró en el capítulo 6 que los contornos de ω_n constante son círculos en el plano s , que los contornos de relación constante de amortiguamiento son rectas que pasan por el origen y que los contornos de amortiguamiento ($\zeta\omega_n$) constante, son líneas rectas paralelas al eje $j\omega$ del plano s . Más todavía, las líneas paralelas al eje σ en el plano s son líneas de frecuencia constante, $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$. Todos estos hechos aparecen resumidos en la figura 10-22.

La ubicación de los polos en el plano s se puede interpretar en función de la respuesta general en el dominio del tiempo, en términos de ζ y ω_n .

$$i(t) = K_1 e^{(-\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})t} + K_2 e^{(-\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})t} \quad (10-73)$$

Para ilustrar el significado de los contornos de la figura 10-22 véase el arreglo de polos que se muestra en la figura 10-23 (los ceros se han omitido para mayor claridad).

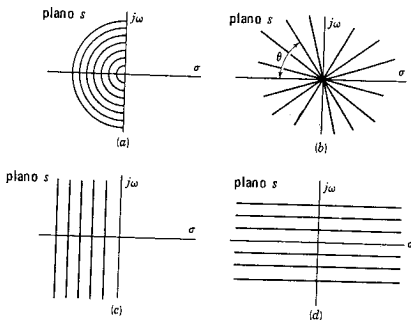


Figura 10-22. Contornos para valores de parámetro constante en el plano s : (a) contornos de ω_n constante, (b) líneas de relación de amortiguamiento constante, para el ángulo $\theta = \cos^{-1}\zeta$ con respecto al eje real negativo, (c) las líneas rectas paralelas al eje imaginario, son los contornos para amortiguamiento constante, $\sigma = -\zeta\omega_n$, y (d) las rectas paralelas al eje real representan contornos de frecuencia constante de oscilación, $\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$.

El par de polos s_a y s_a^* y el par s_c y s_c^* corresponden a expresiones oscilatorias en el dominio del tiempo. La frecuencia de oscilación correspondiente a s_a y s_a^* es mayor que la de s_c y s_c^* , al igual que el amortiguamiento (o rapidez de decrecimiento de la amplitud) es menor que s_a y s_a^* que para s_c y s_c^* . La frecuencia natural ω_n de los dos pares de polos es aproximadamente la misma, ya que tienen más o menos el mismo radio a partir del origen. La diferencia en la frecuencia real de oscilación se debe a una relación menor de amortiguamiento para s_a y s_a^* .

Los polos s_b y s_d son muy diferentes de los pares conjugados que se acaban de ver. Corresponden al caso de sobreamortiguamiento y tienen una forma exponencial de decrecimiento en el dominio del tiempo. El amortiguamiento es mayor para s_d que para s_b . Desde otro punto de vista, la constante de tiempo para el polo s_b es mayor que para s_d . La respuesta típica en el dominio del tiempo correspondiente a cada polo se ilustra en la figura 10-24 para una amplitud arbitraria para cada factor. La respuesta total correspondiente a estos polos se determina *sumando* cada uno de los factores individuales como sigue:

$$i(t) = K_a e^{s_a t} + K_a^* e^{s_a^* t} + K_b e^{s_b t} + K_c e^{s_c t} + K_c^* e^{s_c^* t} + K_d e^{s_d t} \quad (10-74)$$

Como de costumbre, los términos correspondientes a los pares conjugados se combinan para dar expresiones senoidales amortiguadas. En

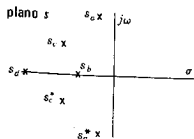


Figura 10-23. Un arreglo de polos en el plano s .

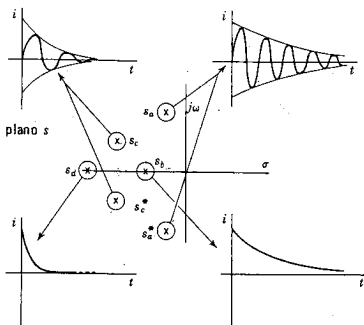


Figura 10-24. La forma de las respuestas identificadas con cada una de las posiciones de los polos que se muestran en la figura 10-23. Las respuestas se ilustran con amplitudes arbitrarias.

la figura 10-25 se presenta una figura más detallada, en la que se indica la variación de la respuesta para varias ubicaciones de polos.

Queda todavía el problema de determinar la constante (o magnitud) de multiplicación para cada uno de los términos (o modos). El punto de partida es la ecuación (10-68). Para encontrar la respuesta en el dominio del tiempo correspondiente a esta ecuación de transformada, ésta se desarrolla por medio de fracciones parciales. De donde

$$I(s) = \frac{K_a}{s - s_a} + \frac{K_b}{s - s_b} + \dots + \frac{K_r}{s - s_r} + \dots + \frac{K_m}{s - s_m} \quad (10-75)$$

Cualquiera de los coeficientes (residuos) se puede determinar aplicando el método de Heaviside como

$$K_r = H \frac{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)}{(s - s_a) \dots (s - s_r) \dots (s - s_m)} \Big|_{s=s_r} \quad (10-76)$$

Al substituir s con s_r en la ecuación (10-76) se obtiene el siguiente valor de K_r :

$$K_r = H \frac{(s_r - s_1)(s_r - s_2) \dots (s_r - s_n)}{(s_r - s_a)(s_r - s_b) \dots (s_r - s_m)} \quad (10-77)$$

Esta ecuación se compone de los factores de la forma general $(s_r - s_m)$, en donde tanto s_r como s_n son números complejos cono-

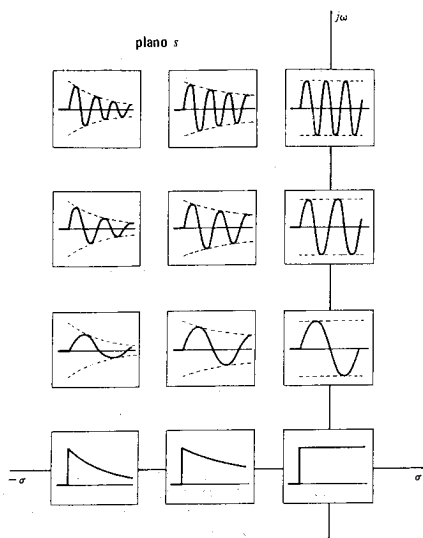


Figura 10-25. Una exploración más detallada de las formas de respuesta para las diferentes ubicaciones en el plano s .

cidos. La diferencia de dos números complejos es otro número complejo, que se puede escribir en forma polar como:

$$(s_r - s_n) = M_{nr} e^{j\phi_{nr}} \quad (10-78)$$

en donde M_{nr} es la magnitud del fasor $(s_r - s_n)$ y ϕ_{nr} es el ángulo de fase del mismo fasor. La diferencia de las dos cantidades complejas s_r y s_n se ilustra en la figura 10-26. (También en este caso se omiten otros polos y ceros para mayor claridad.) El término $(s_r - s_n)$ se interpreta como un fasor dirigido de s_n a s_r . La magnitud M_{nr} es la distancia de s_n a s_r ; el ángulo de fase ϕ_{nr} es el ángulo de línea de s_n a s_r , medido con respecto a la línea $\phi = 0$. La magnitud y la fase del factor $(s_r - s_n)$ se puede medir así con facilidad y, por tanto, todos los términos de este tipo general de la ecuación (10-77) se encuentran

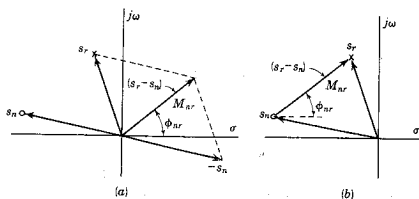


Figura 10-26. La representación de la cantidad compleja $(s_r - s_n)$ en el plano complejo s : (a) la construcción de $(s_r - s_n)$ y (b) representación como un fasor dirigido s_n a s_r .

sin mayores dificultades. En función de M y ϕ , para cada factor de la ecuación (10-77) el valor de K_r se convierte en

$$K_r = H \frac{M_{1r} M_{2r} M_{3r} \dots M_{nr}}{M_{ar} M_{br} M_{cr} \dots M_{mr}} e^{j(\phi_{1r} + \phi_{2r} + \dots - \phi_{ar} - \phi_{br} - \dots)} \quad (10-79)$$

Esta ecuación proporciona la magnitud y la fase de K_r . Efectuando las operaciones que se indican en esta ecuación se puede evaluar la constante K_r . Las cantidades de la ecuación (10-79) se determinan fácilmente mediante un procedimiento gráfico que se resume como sigue:

- (1) Grafique los polos y los ceros de $I(s) = p(s)/q(s)$ a escala en el plano complejo s .
- (2) Mida (o calcule) la distancia de cada uno de los otros polos y ceros finitos a un determinado polo s_r .
- (3) Mida (o calcule) el ángulo de cada uno de los otros polos y ceros finitos a un determinado polo s_r .
- (4) Sustituya tales cantidades en la ecuación (10-79) y evalúe K_r en esta forma.

EJEMPLO 13

Se usará un ejemplo para ilustrar este procedimiento. Supóngase que $I(s)$ tiene los polos $s = -1$ y -3 , y un cero en el origen, y H tiene un valor 5. La transformada de la corriente tiene la forma

$$I(s) = \frac{5s}{(s+1)(s+3)} \quad (10-80)$$

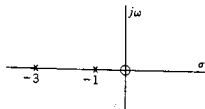


Figura 10-27. Polos y ceros que se utilizan en el ejemplo 13.

Esta función se puede desarrollar con facilidad por medio de fracciones parciales, pero también es posible evaluarla como se delineó antes. Con referencia a la figura 10-27 se observa que

$$M_{01}e^{j\phi_{01}} = 1e^{j180^\circ} \quad (10-81)$$

$$M_{31}e^{j\phi_{31}} = 2e^{j0^\circ} \quad (10-82)$$

De donde,

$$K_1 = H \frac{M_{01}e^{j\phi_{01}}}{M_{31}e^{j\phi_{31}}} = 5 \times \frac{1}{2}e^{+j180^\circ} = -2.5 \quad (10-83)$$

De la misma manera

$$K_3 = H \frac{M_{03}e^{j\phi_{03}}}{M_{13}e^{j\phi_{13}}} = 5 \times \frac{3e^{j180^\circ}}{2e^{j180^\circ}} = 7.5 \quad (10-84)$$

Puesto que los polos determinan la frecuencia (en este caso, la frecuencia neper), se puede escribir para la solución general

$$i(t) = K_1e^{-t} + K_3e^{-3t} \quad (10-85)$$

y como K_1 y K_3 se evaluaron partiendo del conocimiento de las ubicaciones del polo y el cero, se tiene una solución particular,

$$i(t) = -2.5e^{-t} + 7.5e^{-3t} \quad (10-86)$$

De acuerdo con esta exposición y con la ayuda de la ecuación (10-77) se puede visualizar la influencia de un cero en la respuesta en el dominio del tiempo. Sea un polo, por ejemplo s_r , de la figura 10-26. Si todos los otros polos y ceros del plano s se mantienen fijos en su posición y se desplaza el cero s_n , la proximidad de un cero a un polo hace que de acuerdo con la ecuación (10-79) se *reduzca* la magnitud del coeficiente K asociado con la frecuencia compleja del polo s_r . También aquí, de acuerdo con la ecuación (10-79), la proximidad de un polo a s_r tiene el efecto contrario —ya que las magnitudes del polo aparecen en el denominador— y la proximidad de otro polo a s_r *augmenta* la magnitud del coeficiente K_r . Cuando el cero s_n se desplaza tan cerca de s_r que *coinciden*, el polo y el cero se *anulan* y se reduce a cero el valor de K_r .

La magnitud del coeficiente K correspondiente a un polo particular se determina entonces por la proximidad de los polos y los ceros. Si, como sucede en el diseño de una red, se puede seleccionar la posición

de los polos y los ceros, éstos se deben escoger de acuerdo con el siguiente método:

- (1) Escoja las ubicaciones de los polos para obtener el comportamiento requerido en el tiempo. Haga esto en función de frecuencias complejas.
- (2) Determine la posición de los ceros en el plano complejo para ajustar las magnitudes de los diferentes coeficientes K .

Se debe hacer notar que la interpretación gráfica de la posición de los polos y ceros fue para el caso de polos no repetidos (o simples). En el caso de polos múltiples, se sugiere que se siga el desarrollo por fracciones parciales en vez de buscar una modificación de los procedimientos que se vieron, para satisfacer al nuevo caso.

10-8. ESTABILIDAD DE REDES ACTIVAS

En este capítulo se ha supuesto hasta ahora que las redes estudiadas se componen sólo de elementos pasivos, y las explicaciones se han basado en la afirmación de que *las redes pasivas son estables* en el sentido de que los polos de las funciones de red que las describen se excluyen en la mitad derecha del plano s . El hecho de que *las redes activas*—por ejemplo, una que contiene fuentes controladas (o dependientes)—no son necesariamente estables se mostrará mediante un ejemplo sencillo.

La red de la figura 10-28 contiene una fuente controlada cuyo voltaje se relaciona a V_2 mediante la constante positiva A . El análisis de rutina de la red da la siguiente función de transferencia:

$$\frac{V_2}{I_1} = \frac{1}{C} \frac{s}{s^2 + [(1/R_1C) + (1-A)/(R_2C)]s + 1/LC} \quad (10-87)$$

Si se escogen valores específicos para los elementos haciendo que $R_1 = 1/2$, $R_2 = 1$, $L = 1/2$ y $C = 1$, entonces la ecuación (10-87) se convierte en

$$\frac{V_2}{I_1} = \frac{s}{s^2 + (3-A)s + 2} \quad (10-88)$$

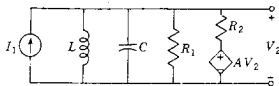


Figura 10-28. Red con una fuente controlada que es inestable para un rango de valores de A .

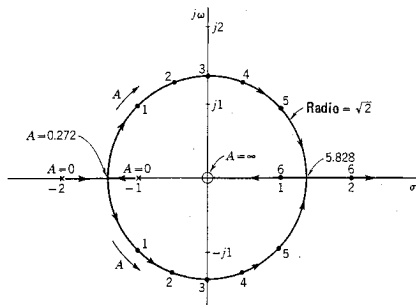


Figura 10-29. Lugar geométrico de los polos de la función de transferencia conforme A varía de 0 a ∞ .

De acuerdo con este resultado, se ve que las ubicaciones de los polos quedan determinadas mediante la constante A , y también que los polos se desplazarán en el plano s conforme A aumente de 0 hasta un valor muy grande. El lugar geométrico de las raíces de las ecuaciones $s^2 + (3 - A)s + 2 = 0$ se ilustra en la figura 10-29; estas gráficas se utilizan con mucha frecuencia para estudiar sistemas y se conocen como *gráficas del lugar geométrico de las raíces*.⁴ De acuerdo con esta gráfica, se observa que los polos están ubicados sobre el eje real negativo para $A = 0$. Al aumentar A , los polos se mueven el uno hacia el otro, encontrándose en $s = -\sqrt{2}$. A partir de entonces, el lugar geométrico es un círculo para el rango de valores $3 - 2\sqrt{2} \leq A \leq 3 + 2\sqrt{2}$. Cuando $A = 3$, los polos están ubicados sobre el eje imaginario. Para $A > 3 + 2\sqrt{2}$, los polos están otra vez sobre el eje real, pero permanecen en la mitad derecha del plano s —uno desplazándose hacia el cero y el otro hacia el infinito. Es evidente que los polos pasan la frontera crítica que es el eje imaginario para un rango de valores de A y, por tanto, la salida de la red puede ser estable, oscilatoria o inestable.

Se afirma que una red activa (o para el caso, cualquier sistema general) es estable si la función de transferencia que relaciona la salida con la entrada tiene polos que están confinados en la mitad izquierda del plano y el eje imaginario, y *estrictamente estable* si los polos se encuentran sólo en el medio plano de la izquierda. En consecuencia, una red activa es estable si oscila con una magnitud constante, corres-

⁴ W. R. Evans fue el primero en describir las gráficas del lugar geométrico de las raíces y las reglas para su construcción.

pondiendo esto al caso de polos sobre el eje imaginario. Para que una red activa sea estrictamente estable, se excluye la posibilidad de oscilación con una magnitud constante, lo cual significa que quedan excluidos los polos del eje imaginario. De acuerdo con la exposición que aquí se presenta, así como con las diferentes formas de respuesta que se muestran en la figura 10-25, se puede observar que un requisito equivalente para un sistema estable es que una *entrada limitada debe dar origen a una salida limitada*. Por consiguiente, en una red estable, una entrada que tiene la forma escalón, no producirá una salida que tenga términos como t , t^2 , e^t , $t \text{ sen } \omega t$, etc. Esta es una definición conceptualmente conveniente de la respuesta de una red estable.

En la red de la figura 10-28 se observa que tiene una respuesta que es estrictamente estable cuando $A < 3$, y estable cuando $A \leq 3$. Cuando $A = 3$, el voltaje de salida oscila a la frecuencia $\omega = \sqrt{2}$. Para $A > 3$, la salida oscila con una amplitud que aumenta sin límite con el tiempo.

Puesto que la estabilidad se determina por la ubicación de los polos, como se acaba de ver en el ejemplo anterior, es posible establecer las condiciones necesarias para la estabilidad en función de un requisito impuesto al polinomio del denominador de la función de transferencia que relaciona la salida con la entrada. Sea este polinomio

$$p(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \quad (10-89)$$

De acuerdo con $p(s)$, se puede indicar el requisito para la estabilidad en función de una pregunta sencilla: ¿tiene $p(s) = 0$ raíces con partes reales positivas (o cero)? Cuando se responda a esta pregunta, queda determinada la estabilidad de la respuesta de la red. Una respuesta obvia a la pregunta que acaba de proponerse se deriva cuando las raíces de la ecuación $p(s) = 0$ se determinan utilizando una computadora digital. Sin embargo, con mucha frecuencia el interés reside no tanto en los valores numéricos de las raíces como en responder sencillamente *sí* o *no* a la pregunta: ¿Es estable la red?

Entonces el problema es el siguiente: si se da un polinomio que tiene coeficientes reales por las razones que se indican en la sección 10-5, ¿cuántas de las raíces de la ecuación $p(s) = 0$ tienen partes reales positivas? Para una red estable, la respuesta debe ser: ninguna. Uno de los primeros científicos que investigaron este problema fue James Clerk Maxwell, en 1868. A partir de entonces, el tema se ha estudiado minuciosamente y existen muchas reglas, algoritmos y criterios que pueden aplicarse. No obstante, antes de delinear uno de los más útiles de ellos conviene ver algunas de las propiedades de las raíces de $p(s) = 0$, que se pueden deducir directamente de los coeficientes de $p(s)$.

El ejemplo

$$p(s) = (s + 4)(s^2 - 2s + 10) = s^3 + 2s^2 + 2s + 40 \quad (10-90)$$

demuestra que no basta con que los coeficientes del polinomio sean todos positivos para estar seguro de que $p(s) = 0$ tenga raíces con partes reales negativas. Si la ecuación (10-89) se factoriza, se escribe como el producto

$$a_0(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = 0 \quad (10-91)$$

Cuando estos factores se multiplican entre sí, se obtiene

$$\begin{aligned} p(s) = & a_0 s^n - a_0(s_1 + s_2 + \dots + s_n)s^{n-1} \\ & + a_0(s_1 s_2 + s_2 s_3 + \dots)s^{n-2} \\ & - a_0(s_1 s_2 s_3 + s_4 s_2 s_3 + \dots)s^{n-3} \\ & + a_0(-1)^n s_1 s_2 s_3 \dots s_n = 0 \end{aligned} \quad (10-92)$$

Igualando estos coeficientes a los de la ecuación (10-89), se tiene (suponiendo que $a_0 \neq 0$).

$$\frac{a_1}{a_0} = - \text{suma de las raíces} \quad (10-93)$$

$$\frac{a_2}{a_0} = \text{suma de los productos de las raíces tomadas dos a la vez} \quad (10-94)$$

$$\frac{a_3}{a_0} = - \text{suma de los productos de las raíces tomadas tres a la vez} \quad (10-95)$$

y así sucesivamente, hasta que por último

$$\frac{(-1)^n a_n}{a_0} = \text{producto de las raíces} \quad (10-96)$$

Si todas las raíces tienen partes reales negativas, entonces en estas ecuaciones se puede ver que *es necesario que todos los coeficientes tengan el mismo signo*. El ejemplo de la ecuación (10-90) ha demostrado que esta condición necesaria no es suficiente. También se observa que *ningún coeficiente puede tener valor cero*, porque esto requeriría una cancelación que sólo es posible cuando existen raíces con partes reales y positivas.

Esto es lo que se puede decir respecto a las condiciones necesarias que son útiles para una comprobación preliminar. A continuación se enumeran las condiciones que deben cumplir los coeficientes, que son tanto necesarias como suficientes para establecer la estabilidad.

Las primeras contribuciones a la teoría de la estabilidad de los sistemas físicos las hicieron: Routh, de Inglaterra, en 1877; Lyapunov, de Rusia, en 1892, y Hurwitz, de Alemania, en 1895. Más recientes contribuciones se deben a los trabajos de Lienard y Chipart, en Francia, en 1914, y Nyquist, de los Estados Unidos, 1932.⁵ Gran parte del

⁵ Para un estudio detallado del criterio de Nyquist véase de Norman, Balabanian, Theodore A. Bickart y Sundarem Seshu, *Electrical Network Theory* (John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1969), páginas 677-689.

trabajo lo realizaron independientemente unos de otros, de manera que se produjo cierta confusión en la atribución de los criterios a los auténticos autores. El criterio que se describirá a continuación se conoce como criterio de Routh. Para reconocer que también fue desarrollado en forma independiente por Hurwitz, los ingenieros han dado en designarle con el nombre de *criterio de Routh-Hurwitz*. Sin embargo, quien lea los libros especializados en este tema no se debe sorprender si encuentra que el criterio de Routh-Hurwitz se describe en términos de la evaluación de un cierto número de determinantes.

Ahora se separará $p(s)$ de la ecuación (10-89) en dos partes, una par $m(s)$ y otra impar $n(s)$. Obsérvese que ésta es una elección apropiada, ya que M tiene simetría par con respecto a la línea vertical que pasa por su centro, en tanto que N tiene una simetría impar con respecto a la misma línea. La parte par (impar) de $p(s)$ es la suma de los términos $a_k s^k$ en donde k es par (impar). A continuación se forma una nueva función,

$$\Psi = \frac{m(s)}{n(s)} \quad \text{o} \quad \Psi = \frac{n(s)}{m(s)} \quad (10-97)$$

de modo que el polinomio del numerador sea de grado más alto que el polinomio del denominador. El criterio que se estudiará se ocupa de los coeficientes seleccionados a partir de esta $\Psi(s)$. Antes de describir el criterio se verá lo que sucede cuando $p(s)$ contiene un factor de la forma $(s^2 + a^2)$ correspondiente a raíces imaginarias conjugadas. Entonces,

$$p(s) = p_1(s)(s^2 + a^2) \quad (10-98)$$

Si se hace que $p_1(s) = m_1(s) + n_1(s)$, entonces las partes par e impar de $p(s)$ serán $m_1(s^2 + a^2)$ y $n_1(s^2 + a^2)$, de tal modo que cuando se encuentra la función que se especifica en la ecuación (10-97) se tiene

$$\Psi(s) = \frac{m_1(s^2 + a^2)}{n_1(s^2 + a^2)} \quad (10-99)$$

suponiendo que m_1 tiene un grado más alto que n_1 . Si $\Psi(s)$ se escribe en esta forma, de inmediato se anula el factor común del numerador y el denominador. Desafortunadamente, no siempre es evidente que hay un factor común. Para ilustrar este caso, sea

$$\begin{aligned} p(s) &= (s + 1)(s + 2)(s^2 + 3) \\ &= s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 9s + 6 \end{aligned} \quad (10-100)$$

de modo que

$$\Psi(s) = \frac{s^4 + 5s^2 + 6}{3s^3 + 9s} \quad (10-101)$$

en donde el factor común no es evidente de inmediato. No obstante, si se factoriza el numerador y el denominador, entonces

$$\Psi = \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 3)}{3s(s^2 + 3)} = \frac{s^2 + 2}{3s} \quad (10-102)$$

Esta cancelación del factor común se relaciona con uno de los casos especiales del criterio que se estudiará un poco más adelante.

Al establecer los pasos que se deben seguir primero se construye el arreglo de Routh-Hurwitz (que se conoce también con el nombre de *modelo* o *esquema*), que se compone de los coeficientes de la función Ψ de la ecuación (10-97). Se separa $p(s)$ en sus partes par e impar y se forman dos renglones de coeficientes. Así pues, de la expresión dada para $p(s)$ se escogen los coeficientes para los dos renglones como sigue:

$$\begin{array}{c} \text{Renglón 1} \\ \hline a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + a_4 s^{n-4} + a_5 s^{n-5} + a_6 s^{n-6} + \dots \\ \hline \text{Renglón 2} \end{array} \quad (10-103)$$

y se escriben así:

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \dots \\ a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \dots \end{array} \quad (10-104)$$

El siguiente paso consiste en completar el arreglo de los números de acuerdo con Routh-Hurwitz. Para $n = 6$, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{array}{c|cccc} s^6 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ s^5 & a_1 & a_3 & a_5 & \\ s^4 & b_1 & b_3 & b_5 & \\ s^3 & c_1 & c_3 & & \\ s^2 & d_1 & d_3 & & \\ s^1 & e_1 & & & \\ s^0 & f_1 & & & \end{array} \quad (10-105)$$

Que se compone de $n + 1$ renglones, de los cuales los dos primeros se dan en la ecuación (10-104). Las entradas b , c , d , e , f se determinan por el algoritmo que se ilustra en la figura 10-30. El algoritmo se aplica como sigue para determinar un elemento del renglón k y la columna j . El valor de este elemento se determina a partir de otros cuatro elementos. Tales elementos están en los dos renglones directamente arriba del elemento que se va a determinar, los renglones $k - 1$ y $k - 2$. Más aún, están en la columna 1 del arreglo y en la columna inmediatamente a la derecha del elemento, la $j + 1$. Dichos elementos

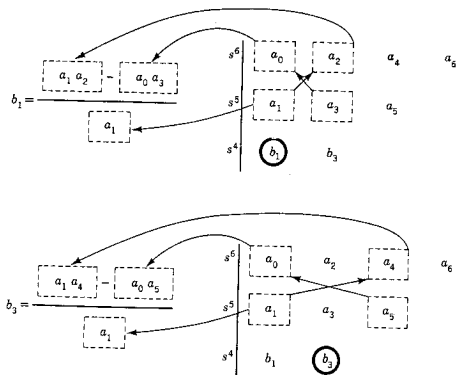


Figura 10-30. Esta figura ilustra los pasos a efectuar en la determinación de los elementos del arreglo de Routh. Para cualquier aclaración posterior véase el problema 10-33.

forman una estructura semejante a la de un determinante. Los elementos unidos por una línea con pendiente positiva tienen signo positivo; los elementos unidos por una línea con pendiente negativa tienen signo negativo (que es justamente lo opuesto a la regla para los determinantes). Se restan esos dos productos y se divide la diferencia entre el elemento pivote de la columna 1 y el renglón $k - 1$. Se continúa el proceso hasta que se forman $n + 1$ renglones.⁶ Para aplicar el criterio se debe enfocar la atención a la primera columna del arreglo. La columna a la derecha de la línea de la ecuación (10-105) constituye un índice útil para fines de evaluación.

El teorema de Routh-Hurwitz establece que el número de cambios en el signo de la primera columna (conforme se efectúa una exploración de arriba hacia abajo) es igual al número de raíces de $p(s) = 0$ con partes reales positivas. El criterio de Routh-Hurwitz establece que la red (o sistema) descrita por una función de red, para la que $p(s)$ es el polinomio del denominador, es estable si y sólo si no existen cambios de signo en la primera columna del arreglo. El citado requisito es tanto necesario como suficiente para estabilidad.

Al aplicar este criterio es necesario distinguir tres casos: (1) ningún elemento de la primera columna es cero. (2) Existe un cero en la

⁶ Para un estudio más amplio de este algoritmo véase el problema 10-33.

primera columna, pero los otros elementos del renglón que contiene un cero en la primera columna son distintos de cero. (3) Existen ceros en la primera columna y todos los demás elementos del renglón que contiene el cero en la primera columna son también cero. A continuación se ilustrarán estos tres casos por medio de ejemplos.

EJEMPLO 14 (caso 1)

Sea la identidad

$$\begin{aligned} (s+1)(s+2)(s+3)(s+4) \\ = s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24 \end{aligned} \quad (10-106)$$

El arreglo de Routh da lo siguiente:

$$\begin{array}{r|rrr} s^4 & 1 & 35 & 24 \\ s^3 & 10 & 50 & \\ s^2 & 30 & 24 & \\ s^1 & 42 & & \\ s^0 & 24 & & \end{array}$$

De acuerdo con la primera columna, se observa que no existen raíces con partes reales positivas (lo cual concuerda con las raíces conocidas).

EJEMPLO 15 (caso 1)

Como segundo ejemplo, véase la ecuación (10-90)

$$s^3 + 2s^2 + 2s + 40 = 0 \quad (10-107)$$

de la que se sabe que contiene dos raíces con partes reales positivas.

$$\begin{array}{r|rr} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 2 & 40 \\ s^1 & -18 & \\ s^0 & 40 & \end{array}$$

Existen dos cambios de signo (2 a -18 y -18 a 40), tal como se requiere.

EJEMPLO 16 (caso 1)

Sea la ecuación

$$a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 = 0 \quad (10-108)$$

El arreglo de Routh-Hurwitz para esta ecuación es

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & a_0 & a_2 \\ s^2 & a_1 & a_3 \\ s^1 & \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} & \\ s^0 & a_3 & \end{array}$$

De acuerdo con este arreglo, se llega a la conclusión de que es necesario y suficiente que todos los coeficientes de la ecuación sean positivos y, además, que $a_1 a_2 > a_0 a_3$, para que no existan raíces con partes reales positivas.

EJEMPLO 17 (caso 1)

Al formar el arreglo de Routh-Hurwitz para la ecuación

$$p(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 = 0 \quad (10-109)$$

se encuentra que el elemento de la primera columna, tercer renglón, es cero; pero ningún otro elemento de este renglón es cero. Para evitar esta dificultad⁷ se substituye el 0 con la pequeña cantidad ϵ de manera que el arreglo se convierte en

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 2 & 3 \\ s^3 & 1 & 2 & \\ s^2 & \epsilon & 3 & \\ s^1 & 2 - \frac{3}{\epsilon} & & \\ s_0 & 3 & & \end{array}$$

Para valores pequeños de $\epsilon > 0$, el cuarto elemento de la primera columna es negativo, lo cual indica dos cambios de signo o sea que dos raíces tienen partes reales positivas. Para un valor pequeño de $\epsilon < 0$, el tercer elemento es negativo, lo cual lleva a la misma conclusión.

EJEMPLO 18 (caso 1)

Para ilustrar el caso en que desaparece un renglón entero del arreglo de Routh-Hurwitz (todos los elementos del renglón tienen un valor de cero), véase una red que se describe por medio del polinomio del denominador

$$p(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + A = 0 \quad (10-110)$$

⁷ F. R. Gantmacher, *Applications of the Theory of Matrices* (Interscience Publishers, Inc., Nueva York, 1959), página 215 y sigs.

en donde A es ajustable, como en el caso de la red de la figura 10-28. El arreglo de Routh-Hurwitz se forma como sigue:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 2 & A \\ s^1 & \frac{4-A}{2} & \\ s^0 & A & \end{array} \quad (10-111)$$

De acuerdo con este arreglo, se observa que el sistema es estable para $A < 4$ pero inestable para $A > 4$. A continuación se examinará detalladamente el caso $A = 4$. Para esta elección el arreglo de Routh-Hurwitz es

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 2 & 4 \\ s^1 & 0 & \\ s^0 & ? & \end{array} \quad (10-112)$$

Aquí desaparece un renglón completo (que se compone de un elemento) y no es posible completar el arreglo.

La dificultad en este caso se relaciona con el estudio anterior de la ecuación (10-98), es decir, la presencia de un factor del tipo $(s^2 + a^2)$ en $p(s)$. Dicho factor provoca una terminación prematura de la formación del arreglo de Routh-Hurwitz. Para determinar este factor común se procede como sigue. Se hará que el factor común desconocido, un polinomio par, sea $p_2(s)$. El índice del renglón que desaparece es $s^v - 1$, lo cual significa que el renglón anterior de índice s^v tiene elementos que son distintos de cero, h_1, h_2, h_3, \dots . En este caso $p_2(s)$ está dada por

$$p_2(s) = h_1 s^v + h_2 s^{v-2} + \dots \quad (10-113)$$

Conociendo este polinomio par se puede quitar de $p(s)$ y luego aplicar otra vez el criterio de Routh-Hurwitz a $p_1(s)$. De acuerdo con el arreglo (10-112) se observa que

$$p_2(s) = 2(s^2 + 2) \quad (10-114)$$

de manera que, a simple vista se nota que

$$p_1(s) = \frac{1}{2}(s + 2) \quad (10-115)$$

Se observará que el valor $A = 4$ hizo que las raíces de $p(s)$ estuvieran ubicadas sobre el eje imaginario, que es la frontera entre la estabilidad y la inestabilidad indicada por este análisis de arreglo (10-111).

EJEMPLO 19 (caso 3)

Como segundo ejemplo del caso 3 véase el polinomio

$$p(s) = (s^2 + 2)(s^2 + 3)(s + 2)(s + 3) \quad (10-116)$$

o bien

$$p(s) = s^6 + 5s^5 + 11s^4 + 25s^3 + 36s^2 + 30s + 36 \quad (10-117)$$

El arreglo de Routh-Hurwitz es

s^6	1	11	36	36	(10-118)
s^5	5	25	30		
s^4	6	30	36		
s^3	0	0	0		

En este caso es más claro que en el arreglo (10-112) donde desaparece un renglón completo.

Se forma el polinomio $p_2(s)$ como se indica en la ecuación (10-113) para dar

$$p_2(s) = 6(s^4 + 5s^2 + 6) \quad (10-119)$$

que es el polinomio par contenido en la ecuación (10-116). La estabilidad de $p_1(s) = s^2 + 5s + 6$ es evidente al examinar la expresión.

El caso 3 revela la presencia de un polinomio par o un polinomio impar (que es s veces un polinomio par). El polinomio par puede ser un producto de factores semejante a $s^2 + a^2 = (s + ja)(s - ja)$ que representa ceros en el eje imaginario. Existe otra posibilidad que se debe tomar en cuenta antes de llegar a la conclusión final en las situaciones del caso 3. Sean los ceros que se muestran en la figura 10-31, que se conocen como *quad* (tetradas) de ceros. Su producto de factores es

$$\begin{aligned} (s + a + jb)(s + a - jb)(s - a + jb)(s - a - jb) \\ = [(s + a)^2 + b^2][(s - a)^2 + b^2] \\ = s^4 + 2(b^2 - a^2)s^2 + (a^2 + b^2)^2 \end{aligned} \quad (10-120)$$

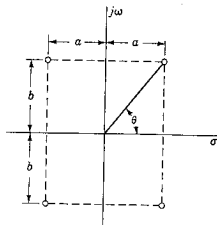


Figura 10-31. Los cuatro ceros simétricamente ubicados con respecto a los ejes del plano s forman un quad de ceros.

Al examinar estas expresiones se observa que todos los coeficientes son positivos y distintos de cero si $b > a$. En términos de la geometría del plano s de la figura 10-31, esta situación se aplica al quad si $\theta > \pi/4$.

EJEMPLO 20 (caso 3)

El polinomio

$$p(s) = 2s^6 + s^5 + 13s^4 + 6s^3 + 56s^2 + 25s + 25 \quad (10-121)$$

tiene el arreglo de Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{c|cccc} s^6 & 2 & 13 & 56 & 25 \\ s^5 & 1 & 6 & 25 & \\ s^4 & 1 & 6 & 25 & \\ s^3 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \quad (10-122)$$

y nuevamente desaparece todo un renglón. El polinomio $p_2(s)$ es

$$s^4 + 6s^2 + 25 = \prod (s \pm 1) \pm j2 \quad (10-123)$$

que es un quad, indica que $p(s)$ tiene dos ceros en la mitad derecha del plano s . Al dividir la ecuación (10-121) entre la (10-123) se obtiene el factor $2s^2 + s + 1$ que se puede analizar mediante la fórmula cuadrática.

BIBLIOGRAFIA

- DESOER, CHARLES A. y ERNEST S. KUH, *Basic Circuit Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969, capítulo 15.
- KARNI, SHLOMO, *Intermediate Network Analysis*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1971, capítulo 6.
- LATHI, B. P., *Signals, Systems and Communication*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1965, capítulo 7.
- MELSA, JAMES L. y DONALD G. SCHULTZ, *Linear Control Systems*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969, capítulo 6.
- PERKINS, WILLIAM, R. y JOSE B. CRUZ, Jr., *Engineering of Dynamic Systems*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1969, capítulo 8.

EJERCICIOS PARA COMPUTADORA DIGITAL

En este capítulo se incluyen dos temas que se prestan a la solución en computadora, que son la determinación de las raíces de un polinomio y la determinación del lugar geométrico de las raíces. Las secciones del apéndice E que se dedican a estos temas son las E-1 y E-9.5. En particular, véase a Huelsman, referencia 7, apéndice E-10, y su análisis de las gráficas del lugar geométrico de las raíces que se incluye en la sección 10.3, y a McCracken, referencia 12, casos de estudio 21 y 23.

PROBLEMAS

- 10-1. Para la red que se muestra en la siguiente figura determine $Z_{12} = V_2(s)/I_1(s)$.

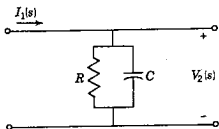


Fig. P10-1.

- 10-2. Sea la red RC de dos puertos que se muestra en la siguiente figura. Para esta red demuestre que

$$G_{12} = \left[\frac{s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2)s / R_1 R_2 C_1 C_2 + 1 / R_1 R_2 C_1 C_2}{s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)s / R_1 R_2 C_1 C_2 + 1 / R_1 R_2 C_1 C_2} \right]$$

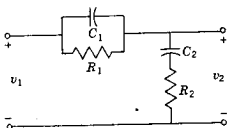


Fig. P10-2.

- 10-3. (a) Para la red que se da demuestre que con el puerto 2 abierto, la impedancia de entrada en el puerto 1 es 1Ω . (b) Encuentre la función de transferencia de la relación de voltajes, G_{12} , para la red de dos puertos.

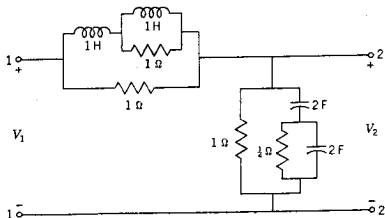


Fig. P10-3.

- 10-4. Para la red resistiva de dos puertos de la figura determine el valor numérico de (a) G_{12} , (b) Z_{12} , (c) Y_{12} y (d) α_{12} .

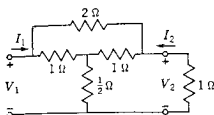


Fig. P10-5.

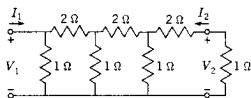


Fig. P10-4.

- 10-5. Se debe analizar la red resistiva T punteada de dos puertos que se muestra en la figura a fin de determinar (a) G_{12} , (b) Z_{12} , (c) Y_{12} y (d) α_{12} .
- 10-6. La red que se da contiene resistencias y fuentes controladas. Para esta red calcule $G_{12} = V_2/V_1$.

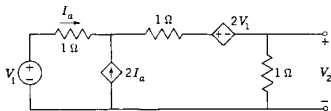


Fig. P10-6.

- 10-7. Para la red que se muestra a continuación y los valores de elementos que se indican determine $\alpha_{12} = I_2/I_1$.

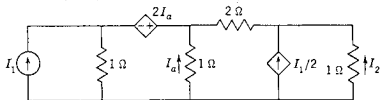


Fig. P10-7.

- 10-8. Para la red RC de dos puertos de la figura demuestre que

$$G_{12} = \left[\frac{1/R_1 R_2 C_1 C_2}{s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)s/R_1 R_2 C_1 C_2 + 1/R_1 R_2 C_1 C_2} \right]$$

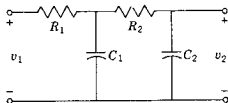


Fig. P10-8.

10-9. Para la siguiente red demuestre que

$$Y_{12} = \frac{K(s+1)}{(s+2)(s+4)}$$

y determine el valor y el signo de K .

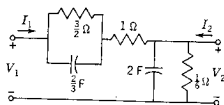


Fig. P10-9.

10-10. En el caso de la siguiente red demuestre que la función de transferencia de la relación de voltajes es

$$G_{12} = \frac{(s^2 + 1)^2}{5s^4 + 5s^2 + 1}$$

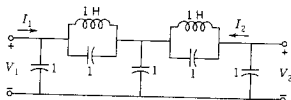


Fig. P10-10.

10-11. Para cada una de las redes que se ilustran a continuación conecte una fuente de voltaje V_1 al puerto 1 y señale referencias de polaridad para V_2 en el puerto 2. También para cada red determine $G_{12} = V_2/V_1$.

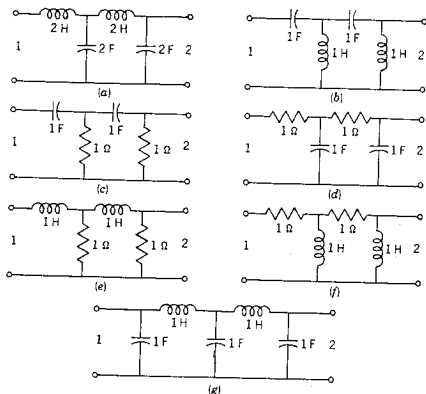


Fig. P10-11.

- 10-12. Para la red que aparece en la figura P10-11(a) haga que el puerto 2 termine en un resistor de 1Ω y conecte una fuente de voltaje al puerto 1. Sea I_1 la corriente en la fuente de voltaje e I_2 la corriente en la carga de 1Ω . Asigne sentidos de referencia a cada una de ellas. Calcule $G_{12} = V_2/V_1$ y $\alpha_{12} = I_2/I_1$.
- 10-13. Repita el problema 10-12 para la red de la figura P10-11(b).
- 10-14. Repita el problema 10-12 para la red de la figura P10-11(g).
- 10-15. Para la red de la figura P10-11(g) conecte una fuente de corriente I_1 en el puerto 1 y un resistor de 1Ω en el puerto 2. Asigne sentidos de referencia a todos los voltajes y corrientes. Para esta red compute $Z_{12} = V_2/I_1$ y $\alpha_{12} = I_2/I_1$.
- 10-16. La red que se muestra en (a) de la figura se conoce como red de compensación en paralelo. Demuestre que la impedancia tiene la forma

$$Z(s) = \frac{K(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

y determine z_1 , p_1 y p_2 en función de R , L y C . Si los polos y los ceros de $Z(s)$ tienen las ubicaciones que se indican en (b) de la misma figura, donde $Z(0) = 1$, determine los valores de R , L , y C .

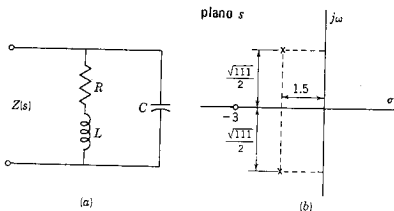


Fig. P10-16.

- 10-17. Un sistema tiene una función de transferencia con un polo en $s = -3$ y un cero cuya posición se puede ajustar en $s = -a$. La respuesta de este sistema a una entrada escalón tiene un término de la forma $K_1 e^{-3t}$. Grafique el valor de K_1 en función de a para los valores de a entre 0 y 5. Esto se puede realizar mediante el procedimiento gráfico de la sección 10-7.
- 10-18. Un sistema tiene una función de transferencia con polos en $s = -1 \pm j1$ y un cero cuya posición se puede ajustar en $s = -a$. La respuesta de este sistema a una entrada escalón tiene un término de la forma $K_2 e^{-t} \sin(t + \phi)$. Grafique el valor de K_2 como una función de a para valores de a entre 0 y 5. Esto se puede hacer gráficamente.
- 10-19. Un sistema tiene una función de transferencia con polos en $s = -1 \pm j1$ y en $s = -3$, y un cero cuya posición se puede ajustar en $s = -a$. Un término de la respuesta de este sistema a una entrada escalón tiene la

forma $K_3 e^{-t} \sin(t + \phi)$. Grafique el valor de K_3 en función de a para los valores de a comprendidos entre 0 y 5.

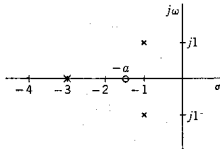


Fig. P10-19.

- 10-20. Aplique el criterio Routh-Hurwitz a las siguientes ecuaciones y determine: (a) el número de raíces con partes reales positivas, (b) el número de raíces con partes reales nulas y (c) el número de raíces con partes reales negativas.

- (a) $4s^3 + 7s^2 + 7s + 2 = 0$
 (b) $s^3 + 3s^2 + 4s + 1 = 0$
 (c) $5s^3 + s^2 + 6s + 2 = 0$
 (d) $s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$

- 10-21. Se da la ecuación

$$s^3 + 5s^2 + Ks + 1 = 0$$

(a) ¿Para qué rango de valores de K tendrán partes reales y negativas las raíces de esta ecuación? (b) Determine el valor de K que haga que desaparezcan las partes reales.

- 10-22. Repita el problema 10-20 para las ecuaciones:

- (a) $5s^4 + 6s^3 + 4s^2 + 2s + 3 = 0$
 (b) $s^4 + 3s^3 + 2s^2 + s + 1 = 0$
 (c) $2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 7s + 2 = 0$
 (d) $3s^6 + s^5 + 19s^4 + 6s^3 + 81s^2 + 25s + 25 = 0$

- 10-23. Repita las pruebas del problema 10-20 para las siguientes ecuaciones:

- (a) $720s^5 + 144s^4 + 214s^3 + 38s^2 + 10s + 1 = 0$
 (b) $25s^5 + 105s^4 + 120s^3 + 120s^2 + 20s + 1 = 0$
 (c) $s^5 + 5.5s^4 + 14.5s^3 + 8s^2 - 19s - 10 = 0$
 (d) $s^5 - s^4 - 2s^3 + 2s^2 - 8s + 8 = 0$
 (e) $s^6 + 1 = 0$

- 10-24. Para los siguiente polinomios, (1) determine el número de ceros en la mitad derecha del plano s , (2) determine el número de ceros sobre el eje imaginario del plano s . Muestre el método que use.

- (a) $2s^6 + 2s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 3s + 2 = p_1(s)$
 (b) $s^6 + 2s^5 + 6s^4 + 10s^3 + 11s^2 + 12s + 6 = p_2(s)$
 (c) $2s^6 + 2s^5 + 4s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 4s + 1 = p_3(s)$

- 10-25. Para el siguiente polinomio, determine el número de ceros de la mitad derecha del plano s , los de la mitad izquierda del plano s y los que están sobre el eje imaginario (la frontera) del plano s .

- (a) $p_1(s) = 2s^7 + 2s^6 + 15s^5 + 17s^4 + 44s^3 + 36s^2 + 24s + 9$
 (b) $s^6 + 3s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 27s + 18 = p_2(s)$
 (c) $s^8 + 3s^7 + 5s^6 + 9s^5 + 17s^4 + 33s^3 + 31s^2 + 27s + 18 = p_3(s)$.

370 Funciones de red: polos y ceros

10-26. Sea la ecuación

$$a_0s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4 = 0$$

Utilice el criterio de Routh-Hurwitz para determinar un conjunto de condiciones necesarias para que todas las raíces de la ecuación tengan partes reales negativas. Suponga que son positivos todos los coeficientes de la ecuación.

10-27. Para la red de la figura, sea $R_1 = R_2 = 1 \Omega$, $C_1 = 1 \text{ F}$ y $C_2 = 2 \text{ F}$. ¿Para qué valores de k será estable la red? En otras palabras, ¿para qué valores de k tendrán las raíces de la ecuación característica partes reales en la mitad izquierda del plano s ?

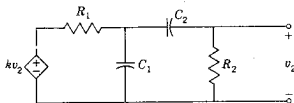


Fig. P10-27.

10-28. En el caso de la red del problema 10-27, sea $k = 2$, $C_1 = 1 \text{ F}$ y $R_2 = 1 \Omega$. Determine la relación que debe existir entre R_1 y C_2 para que el sistema oscile, es decir, para que las raíces de la ecuación característica sean conjugadas y tengan partes reales nulas.

10-29. Se debe analizar la red amplificadora que aparece en la siguiente figura. (a) ¿Cuál debe ser la relación entre R_1 , R_2 y K para que el sistema sea estable (las partes reales de las raíces de la ecuación característica sean cero o negativas)? (b) Para que el sistema oscile sin amortiguamiento, ¿cuál debe ser la relación entre R_1 , R_2 y K ? ¿Cuál será la frecuencia de oscilación? Suponga que el amplificador tiene una impedancia de entrada infinita y cero impedancia de salida.

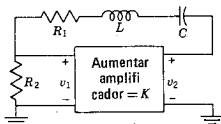


Fig. P10-29.

10-30. La red de la siguiente figura representa a un oscilador con desplazamiento de fase. (a) Demuestre que la condición necesaria para la oscilación es $g_m R_L \geq 29$. (b) Demuestre que la frecuencia de oscilación cuando $g_m R_L = 29$ es $\omega_0 = 1/\sqrt{6} RC$.

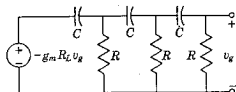


Fig. P10-30.

- 10-31. Demuestre que cuando $Z_a Z_b = R_0^2$ en la red de T punteada de la siguiente figura,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{1 + Z_a/R_0}$$

y la impedancia de entrada en el puerto 1 es $Z_i = R_0$.

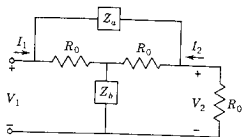


Fig. P10-31

- 10-32. Una red activa queda descrita mediante la ecuación característica

$$s^2 + (3 + 6K_1)s + 6K_2 = 0$$

Se pide que la red sea estable y que ninguna componente de su respuesta decaiga más rápidamente que $K_1 e^{-3t}$. Demuestre que estas condiciones se satisfacen cuando $K_2 > 0$, $|K_1| < \frac{1}{2}$, y $K_2 > 3K_1$. Sombrée la zona de los valores permitidos de K_1 y K_2 en el plano $K_1 \cdot K_2$.

- 10-33. Los valores de los elementos del arreglo Routh se pueden expresar también en función de los determinantes de segundo orden multiplicados por -1 . Por tanto, las fórmulas que se muestran en la figura 10-30 se convierten en

$$b_1 = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad b_3 = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}$$

$$c_1 = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad c_3 = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_5 \end{vmatrix}$$

Utilizando el método de índices que se sugiere en la página 312, proponga una fórmula general para los elementos del arreglo Routh.



CAPITULO 11

11 Parámetros de dos puertos

A continuación la atención se centrará en una clase especial de funciones de red que sirve para describir la red de dos puertos (y se puede generalizar para describir una red de n puertos). Como se verá más adelante, estas funciones de red son semejantes a las que se presentaron en el capítulo anterior, pero existen restricciones adicionales que se imponen, tales como el requisito de que uno de los puertos esté abierto o en corto circuito.

11-1. RELACION DE LAS VARIABLES PARA DOS PUERTOS

En la red de dos puertos de la figura 11-1 se identifican cuatro variables —dos voltajes y dos corrientes. Por supuesto, existen otros voltajes y otras corrientes que se pueden identificar dentro de la caja. La caja que encierra a la red tiene por función indicar qué otros voltajes y otras corrientes o bien no se pueden utilizar para efectuar mediciones o no son importantes para un problema en particular. Se supone que las variables son transformadas de cantidades y se usan V_1 e I_1 como variables en la entrada, el puerto 1, y V_2 e I_2 como variables en la salida, puerto 2. Ahora, sólo dos de las cuatro variables son independientes y la especificación de cualquier par de ellas determina las dos restantes. Por ejemplo, si V_1 y V_2 se especifican, entonces quedan determinadas I_1 e I_2 . La dependencia de dos de las cuatro variables en función de las otras dos se describe en varias formas, dependiendo de cuáles sean las variables que se hayan seleccionado para ser independientes. En este capítulo se estudian las seis combina-

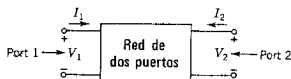


Figura 11-1. Una red de dos puertos con sentidos de referencia estándar para los voltajes y las corrientes que se indican.

TABLA 11-1. PARAMETROS DE DOS PUERTOS.

Nombre	Función		Ecuación
	Expresa	En términos de	
Impedancia en circuito abierto	V_1, V_2	I_1, I_2	$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$ $V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$
Admitancia en corto circuito	I_1, I_2	V_1, V_2	$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2$ $I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2$
Transmisión	V_1, I_1	V_2, I_2	$V_1 = AV_2 - BI_2$ $I_1 = CV_2 - DI_2$
Transmisión inversa	V_2, I_2	V_1, I_1	$V_2 = A'V_1 - B'I_1$ $I_2 = C'V_1 - D'I_1$
Híbridos	V_1, I_2	I_1, V_2	$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2$ $I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$
Híbridos inversos	I_1, V_2	V_1, I_2	$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2$ $V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2$

ciones que se presentan en la tabla 11-1. Como se verá, los nombres de los parámetros se escogen para indicar dimensiones (impedancia, admitancia), la carencia de dimensiones consistentes (híbridos) o la aplicación principal del parámetro (transmisión).

11-2. PARAMETROS DE ADMITANCIA EN CORTO CIRCUITO

La red de la figura 11-1 es un caso especial de la red general que se vio en el capítulo 9. Se supone que la red no contiene fuentes dependientes (controladas) a menos que se especifique otra cosa. En este caso, en la ecuación (9-61), todos los valores de V son cero excepto V_1 y V_2 . Para $k=1$ y $k=2$ se escribe

$$I_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} V_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta} V_2 \quad (11-1)$$

y

$$I_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} V_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} V_2 \quad (11-2)$$

Los cocientes de los cofactores son dimensionalmente admitancias y si se introduce la notación $y_{jk} = \Delta_{kj}/\Delta$, se convierte en

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \quad (11-3)$$

y

$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \quad (11-4)$$

Se observará que si cualquiera de V_1 ó V_2 es cero, los cuatro parámetros se pueden definir en función de un voltaje y una corriente; por tanto,

$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad (11-5)$$

$$y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad (11-6)$$

$$y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} \quad (11-7)$$

y

$$y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} \quad (11-8)$$

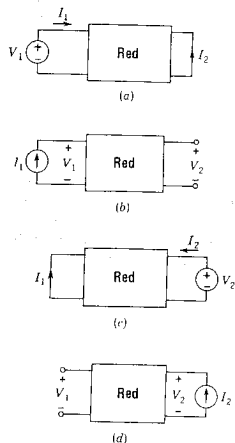


Figura 11-2. Cuatro conexiones de red en las que (a) y (c) se relacionan con las definiciones de las funciones de admitancia en corto circuito, y (b) y (d) con las funciones de impedancia en circuito abierto.

La condición $V_1 = 0$ ó $V_2 = 0$ se logra poniendo en corto circuito el puerto 1 o el puerto 2. Por tanto, los cálculos o las mediciones de los cuatro parámetros se efectúan utilizando una de las conexiones que se muestran en la figura 11-2(a) y (c). Puesto que se especifica una condición de corto circuito para cada una de las funciones de las ecuaciones (11-5) a la (11-8), los parámetros se conocen como parámetros de *admitancia en corto circuito*. Si la red que se estudia es recíproca, como se vio en el capítulo 9, entonces de acuerdo con la ecuación (9-65) se tiene que

$$\left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad (11-9)$$

o bien

$$y_{12} = y_{21} \quad (11-10)$$

y se observa que tres parámetros son suficientes para especificar la relación entre I_1 , I_2 y V_1 , V_2 .

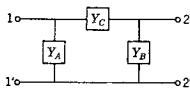


Figura 11-3. Red π que se usa en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1

Véase la red π de la figura 11-3 en la que Y_A , Y_B y Y_C son las admitancias de subredes. Siguiendo el modelo de conexiones que se muestra en la figura 11-2, se tiene que, a partir de las ecuaciones (11-5) y (11-7),

$$y_{11} = Y_A + Y_C \quad (11-11)$$

y

$$y_{22} = Y_B + Y_C \quad (11-12)$$

que son dos funciones de admitancia de punto impulsor. Para determinar $y_{12} = y_{21}$ se observa en la figura 11-2(c) que, cuando el puerto 1 está en corto circuito, se tiene $I_1 = -Y_C V_2$ (el signo menos se usa para explicar el sentido de referencia asignado a I_1). Por tanto, de acuerdo con la ecuación (11-7),

$$y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} = -Y_C \quad (11-13)$$

y los parámetros quedan determinados.

11-3. PARAMETROS DE IMPEDANCIA EN CIRCUITO ABIERTO

Para expresar V_1 y V_2 en función de I_1 e I_2 se puede principiar con las ecuaciones (11-3) y (11-4), y resolverlas para V_1 y V_2 usando determinantes. Al efectuar estas operaciones se obtiene

$$V_1 = \frac{y_{22}}{\Delta_y} I_1 + \frac{-y_{12}}{\Delta_y} I_2 \quad (11-14)$$

y

$$V_2 = \frac{-y_{21}}{\Delta_y} I_1 + \frac{y_{11}}{\Delta_y} I_2 \quad (11-15)$$

en donde

$$\Delta_y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21} \quad (11-16)$$

es el determinante de la matriz de admitancia,

$$\Delta_y = \det[y] = \det \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \quad (11-17)$$

Las cantidades que multiplican a I_1 e I_2 en las ecuaciones (11-14) y (11-15) son dimensionalmente impedancias y se les asigna un símbolo, como se indica en la tabla 11-1, de tal modo que

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad (11-18)$$

y

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \quad (11-19)$$

Estos parámetros se pueden interpretar en función de un solo voltaje y una sola corriente, haciendo que $I_1 = 0$, o bien $I_2 = 0$. Por tanto, se obtiene un conjunto de ecuaciones como las que se dan en las expresiones de la (11-5) a la (11-8), y son

$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad (11-20)$$

$$z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad (11-21)$$

$$z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad (11-22)$$

y

$$z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad (11-23)$$

La condición $I_1 = 0$ ó $I_2 = 0$ implica un circuito abierto en el puerto 1 ó en el puerto 2, lo cual explica la designación de los parámetros con el título de *parámetros de impedancia en circuito abierto*. Obsérvese que $y_{12} = y_{21}$ implica que

$$z_{12} = z_{21} \quad (11-24)$$

para redes recíprocas. Se observará que se podía haber principiado con las ecuaciones (11-18) y (11-19) para encontrar la ecuación (11-3) y (11-4). Resolviendo las ecuaciones (11-18) y (11-19), se llega a

$$I_1 = \frac{z_{22}}{\Delta_z} V_1 + \frac{-z_{12}}{\Delta_z} V_2 \quad (11-25)$$

e

$$I_2 = \frac{-z_{21}}{\Delta_z} V_1 + \frac{z_{11}}{\Delta_z} V_2 \quad (11-26)$$

en donde

$$\Delta_z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} \quad (11-27)$$

que es el determinante de la matriz de impedancia

$$\Delta_z = \det[z] = \det \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \quad (11-28)$$

Al comparar los términos de las ecuaciones (11-15), (11-18) y (11-19) se tiene que

$$z_{11}y_{11} = z_{22}y_{22} \quad (11-29)$$

y también que

$$\Delta_z \Delta_y = 1 \quad (11-30)$$

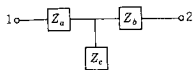


Figura 11-4. Red T del ejemplo 2.

EJEMPLO 2

Se pide determinar los parámetros de impedancia en circuito abierto de la red T de la figura 11-4. Al igual que en el ejemplo 1, las dos funciones de punto impulsor y la función de transferencia resultan ser

$$z_{11} = Z_a + Z_c \quad (11-31)$$

$$z_{22} = Z_b + Z_c \quad (11-32)$$

y

$$z_{12} = z_{21} = Z_c \quad (11-33)$$

EJEMPLO 3

La red de la figura 11-5 es un modelo para un transistor con conexión de base común en las condiciones de funcionamiento que se especifican. Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff se obtiene:

$$V_1 = (R_1 + R_3)I_1 + R_3I_2 \quad (11-34)$$

$$V_2 = (\alpha R_2 + R_3)I_1 + (R_2 + R_3)I_2 \quad (11-35)$$

y de acuerdo con estas ecuaciones se observa que la matriz de impedancia en circuito abierto es

$$[z] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ \alpha R_2 + R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \quad (11-36)$$

Puesto que esta red contiene una fuente controlada, no es recíproca. Esto se muestra por $z_{12} \neq z_{21}$.

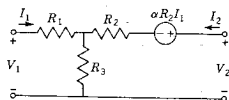


Figura 11-5. Red que es un modelo del transistor con conexión de base común del ejemplo 3.

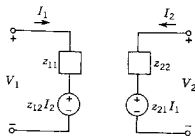


Figura 11-6. Red equivalente de dos generadores de la red general de dos puertos en términos de las funciones de impedancia en circuito abierto.

El resultado de los tres ejemplos dados hasta ahora se puede consolidar considerando las interpretaciones de los conjuntos de ecuaciones en función de redes equivalentes. Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff a la red de la figura 11-6 se obtienen las ecuaciones (11-18) y (11-19). Es evidente que esta red equivale a la red general de dos puertos con respecto a los dos puertos disponibles. Tal representación de la red de dos puertos se conoce como la *equivalente con dos generadores*. Para obtener una equivalente con un generador se agrega el término $z_{12} I_1$ a la ecuación (11-19) y luego se resta de ella, con lo que se obtiene la segunda ecuación del grupo

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad (11-37)$$

y

$$V_2 = z_{12}I_1 + z_{22}I_2 + (z_{21} - z_{12})I_1 \quad (11-38)$$

También en el presente caso la aplicación de la ley de voltajes de Kirchhoff a la red de la figura 11-7 proporciona estas ecuaciones,

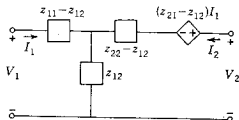


Figura 11-7. Red equivalente de un generador de la red general de dos puertos con respecto a las funciones z .

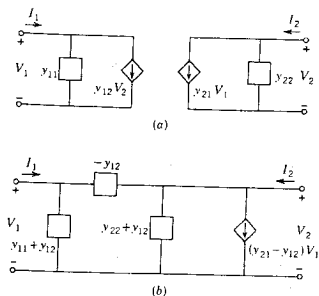


Figura 11-8. Redes equivalentes (a) de dos generadores y (b) de un generador de la red general de dos puertos en términos de las funciones de admitancia en corto circuito.

indicando que es otra equivalente a la red general de dos puertos para cualquier cálculo o medición en cualquiera de los dos puertos identificados. Para redes recíprocas, $z_{12} = z_{21}$ y el último término de la ecuación (11-38) desaparece dando una red T simple. Se encuentra el mismo resultado resolviendo las ecuaciones (11-31) a la (11-33) para Z_a , Z_b , y Z_c .

Un análisis dual de que se acaba de presentar para las ecuaciones de admitancia en corto circuito, conduce a las redes equivalentes de dos puertos con uno y dos generadores que se muestran en la figura 11-8.

11-4. PARAMETROS DE TRANSMISION

Los parámetros de transmisión sirven para relacionar el voltaje y la corriente de un puerto con el voltaje y la corriente del otro. En forma de ecuación, esto se expresa como sigue:

$$V_1 = AV_2 - BI_2 \quad (11-39)$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2 \quad (11-40)$$

en donde A , B , C y D son los parámetros de transmisión. Estos parámetros se conocen con varios nombres, entre los que se encuentran los de *cadena* y, por supuesto, los *parámetros ABCD*. Su primera aplicación se hizo en el análisis de líneas de transmisión de potencia, en donde se conocen también como *parámetros de circuito general*. El

signo negativo del segundo término de las ecuaciones (11-39) y (11-40) se origina de dos convenciones diferentes para asignar un sentido positivo a I_2 . En los problemas de transmisión de potencia se acostumbra asignar a la corriente un sentido de referencia opuesto al que se muestra en la figura 11-1. Por tanto, los signos menos de las ecuaciones (11-39) y (11-40) son para I_2 y *no* para B y D .

A continuación se da la interpretación de A , B , C , D en función de relaciones de transformadas de cantidades para condiciones de circuito abierto y de corto circuito. A partir de las ecuaciones (11-39) y (11-40) se pueden hacer las siguientes identificaciones, dispuestas en forma recíproca para estar de acuerdo con otras funciones de transferencia que se emplearon en el capítulo 10:

$$\frac{1}{A} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0} \quad (11-41)$$

$$-\frac{1}{B} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad (11-42)$$

$$\frac{1}{C} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad (11-43)$$

y

$$-\frac{1}{D} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} \quad (11-44)$$

Se observa que $1/A$ es una ganancia de voltaje en circuito abierto, que $-1/B$ es una admitancia de transferencia en corto circuito, que $1/C$ es una impedancia de transferencia en circuito abierto y que $-1/D$ es una ganancia de corriente en corto circuito. Ahora todas estas funciones son conocidas, de manera que la determinación de A , B , C y D no debe presentar ningún problema.

Los parámetros de transmisión son útiles para describir redes de dos puertos que estén conectadas en *cascada* (o en un arreglo de cadena). Para justificar esta afirmación véase la red de la figura 11-9. Las dos redes en cascada son N_a y N_b . Para dichas redes las ecuaciones (11-39) y (11-40) son, en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} \quad (11-45)$$

y

$$\begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix} \quad (11-46)$$

Para la red compuesta, N (que se indica mediante línea punteada en la figura 11-9), se tiene

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (11-47)$$

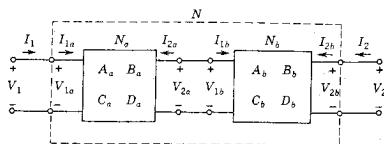


Figura 11-9. Dos redes, N_a y N_b , conectadas en cascada para formar la red N . Cada red se describe mediante los parámetros de cadena A , B , C , D .

El objetivo es determinar A , B , C , D de esta ecuación en función de los parámetros de transmisión de las dos ecuaciones anteriores. Esto se logra al observar que $V_1 = V_{1a}$, $I_1 = I_{1a}$, $V_{2a} = V_{1b}$, $I_{2a} = -I_{1b}$, $I_{2b} = I_2$ y $V_{2b} = V_2$. Si se utilizan tales condiciones para eliminar voltajes y corrientes con un subíndice a o b , entonces las ecuaciones (11-45) y (11-46) se pueden expresar en la forma de la ecuación (11-47). Una vez logrado esto, se encuentra que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \quad (11-48)$$

que es el resultado deseado. Dicho resultado se puede generalizar para cualquier número de redes de dos puertos conectadas en cascada y se verá que el parámetro matricial de transmisión general para las redes de dos puertos en cascada es, sencillamente, el producto matricial de las matrices de transmisión de cada una de las redes de dos puertos conectadas en cascada.

En las ecuaciones (11-39) y (11-40) se expresaron V_1 e I_1 en función de V_2 e I_2 . Si se expresan V_2 e I_2 en función de V_1 e I_1 , entonces las ecuaciones que se escriben son

$$V_2 = A'V_1 - B'I_1 \quad (11-49)$$

e

$$I_2 = C'V_1 - D'I_1 \quad (11-50)$$

y los parámetros de transmisión inversa son A' , B' , C' y D' . Estas ecuaciones se aplican a la transmisión en sentido opuesto al que se indica en las ecuaciones (11-39) y (11-40). Los parámetros $A'B'C'D'$ tienen propiedades similares a las que se describen para los parámetros $ABCD$.

Al estudiar los parámetros y y z se llegó a la conclusión de que para las redes recíprocas $y_{12} = y_{21}$ y $z_{12} = z_{21}$. En el estudio de los parámetros de transmisión se utilizaron cuatro de ellos, pero es evidente que uno de los cuatro es superfluo y se puede suprimir. Al igual que se demostró que las funciones z se pueden expresar de acuerdo con las funciones y , en las ecuaciones (11-14) y (11-15), por ejemplo, también se puede demostrar que $A = z_{11}/z_{21}$, $B = \Delta_z/z_{21}$, $C = 1/z_{21}$ y $D = z_{22}/z_{21}$. Obsérvese que

$$AD - BC = \frac{z_{12}}{z_{21}} \quad (11-51)$$

Si $z_{12} = z_{21}$, como es el caso para una red recíproca, entonces

$$AD - BC = 1 \quad (11-52)$$

de manera que si se conocen tres de los parámetros de transmisión, el cuarto queda determinado. De igual modo, se puede demostrar que para los parámetros de transmisión inversa, por reciprocidad, se implica que

$$A'D' - B'C' = 1 \quad (11-53)$$

11-5. PARAMETROS HIBRIDOS

Los parámetros híbridos que se estudian a continuación encuentran una aplicación muy amplia en los circuitos electrónicos, sobre todo en la construcción de modelos para transistores. Las propiedades de estos parámetros y su interpretación en función de las variables para redes de dos puertos se basan en las ecuaciones de definición:

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \quad (11-54)$$

e

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \quad (11-55)$$

Los parámetros h se definen en función de dos de las variables, haciendo que $I_1 = 0$ ó $V_2 = 0$. De esto se obtiene

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} \quad (11-56)$$

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} \quad (11-57)$$

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0} \quad (11-58)$$

y

$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0} \quad (11-59)$$

De acuerdo con estas ecuaciones, es evidente que h_{11} es la impedancia de entrada en corto circuito, h_{21} es la ganancia de corriente en corto circuito, h_{12} es la ganancia de voltaje inverso en circuito abierto y h_{22} la admitancia de salida en circuito abierto. Tales parámetros son dimensionalmente mixtos y por esta razón se denominan parámetros "híbridos".

La utilidad de dichos parámetros para representar transistores se deriva de la facilidad con que en el puerto 2 se pueden efectuar mediciones para determinar h_{11} y h_{21} en condiciones de corto circuito. Es relativamente más difícil efectuar mediciones con el puerto 2 en circuito abierto.

Los parámetros híbridos inversos o parámetros g son los que se encuentran en las ecuaciones

$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \quad (11-60)$$

y

$$V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \quad (11-61)$$

De acuerdo con ellos se observa que

$$g_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{I_2=0} \quad (11-62)$$

$$g_{21} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0} \quad (11-63)$$

$$g_{12} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_1=0} \quad (11-64)$$

y

$$g_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{V_1=0} \quad (11-65)$$

En este caso g_{11} es la admitancia de entrada en circuito abierto, g_{21} es la relación de voltajes en circuito abierto, g_{12} es la relación de corrientes en corto circuito y g_{22} la impedancia de entrada en corto circuito en el puerto 2. Las redes representadas por los parámetros h y g , que son equivalentes a la red general de dos puertos, se ilustran en la figura 11-10.

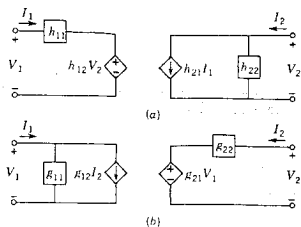


Figura 11-10. Redes que son equivalentes a la red general de dos puertos en función de (a) los parámetros h y (b) los parámetros g .

EJEMPLO 4

En la figura 11-11 se presenta el modelo de un transistor con una conexión de emisor común. Para esta red se observa que

$$V_1 = (r_b + r_e)I_1 + \mu_{bc}V_2 \quad (11-66)$$

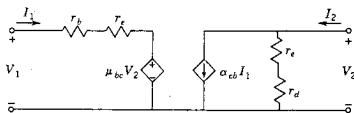


Figura 11-11. Modelo del transistor con conexión de emisor común que se emplea en el ejemplo 4.

$$I_2 = \alpha_{cb}I_1 + \frac{V_2}{r_e + r_d} \quad (11-67)$$

Utilizando las ecuaciones (11-56) a (11-59) se observa que los parámetros híbridos h tienen los siguientes valores:

$$h_{11} = r_b + r_e \quad (11-68)$$

$$h_{12} = \mu_{bc} \quad (11-69)$$

$$h_{21} = \alpha_{cb} \quad (11-70)$$

y

$$h_{22} = \frac{1}{r_e + r_d} \quad (11-71)$$

La sencillez de estos resultados sugiere la utilidad de los parámetros híbridos para representar redes de transistores.

11-6. RELACIONES ENTRE CONJUNTOS DE PARAMETROS

Al introducir los seis grupos de parámetros en las secciones anteriores de este capítulo se sugirieron aplicaciones para cada grupo de parámetros. Sin embargo, no se puede decir que todos los problemas de transistores se resuelven utilizando los parámetros h , y con frecuencia se hace necesario convertir un grupo de parámetros en otro. Es sencillo encontrar las relaciones de estos grupos de parámetros. Por ejemplo, comparando las ecuaciones (11-14) y (11-15) con las ecuaciones (11-18) y (11-19) es obvio que

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_y} \begin{bmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{bmatrix} \quad (11-72)$$

En la tabla 11-2 se da un resumen de todas las relaciones similares entre los grupos de parámetros. En esta tabla las matrices que aparecen en cada uno de los renglones son equivalentes. Se observará que las equivalencias incluyen un factor $\Delta_x = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$ en donde x es cualquiera de los siguientes: z, y, T, T', h o g .

En la tabla 11-3 se muestran las condiciones en que una red de dos puertos es recíproca, para los seis grupos de parámetros. También se tabulan en ella las condiciones en que una red recíproca pasiva de dos puertos es *simétrica* en el sentido de que los puertos se pueden intercambiar sin afectar a los voltajes y las corrientes del puerto.

11-7. CONEXION EN PARALELO DE REDES DE DOS PUERTOS

Ya se analizó la conexión en cascada o tándem de redes de dos puertos en la sección 11-4. Existe otra conexión útil, denominada en *paralelo* que se muestra en la figura 11-12. Las funciones admitancia en corto circuito sirven para representar las redes en paralelo de dos puertos, como se verá a continuación. Para la red A de la figura 11-12(a) se tiene

$$I_{1a} = y_{11a}V_{1a} + y_{12a}V_{2a} \quad (11-73a)$$

Conexión en paralelo de redes de dos puertos 387

TABLA 11-2. GRAFICA DE CONVERSION.

(Las matrices que están en el mismo renglón de la tabla son equivalentes)

$$\Delta_x = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$$

	[z]	[y]	[T]	[T']	[h]	[g]
[z]	$\begin{matrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{y_{22}}{\Delta_y} & -\frac{y_{12}}{\Delta_y} \\ -\frac{y_{21}}{\Delta_y} & \frac{y_{11}}{\Delta_y} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta_T}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D'}{C'} & \frac{1}{C'} \\ \frac{\Delta_T}{C'} & \frac{A'}{C'} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_h}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ -\frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{g_{11}} & -\frac{g_{12}}{g_{11}} \\ \frac{g_{21}}{g_{11}} & \frac{\Delta_g}{g_{11}} \end{matrix}$
[y]	$\begin{matrix} \frac{z_{22}}{\Delta_z} & -\frac{z_{12}}{\Delta_z} \\ -\frac{z_{21}}{\Delta_z} & \frac{z_{11}}{\Delta_z} \end{matrix}$	$\begin{matrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{B} & -\frac{\Delta_T}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A'}{B'} & -\frac{1}{B'} \\ -\frac{\Delta_T}{B'} & \frac{D'}{B'} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta_h}{h_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_g}{g_{22}} & \frac{g_{12}}{g_{22}} \\ -\frac{g_{21}}{g_{22}} & \frac{1}{g_{22}} \end{matrix}$
[T]	$\begin{matrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & \frac{\Delta_z}{z_{21}} \\ \frac{1}{z_{21}} & \frac{z_{22}}{z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{y_{22}}{y_{21}} & -\frac{1}{y_{21}} \\ -\frac{\Delta_y}{y_{21}} & -\frac{y_{11}}{y_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D'}{\Delta_T} & \frac{B'}{\Delta_T} \\ \frac{C'}{\Delta_T} & \frac{A'}{\Delta_T} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta_h}{h_{21}} & -\frac{h_{11}}{h_{21}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{21}} & -\frac{1}{h_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{g_{21}} & \frac{g_{22}}{g_{21}} \\ \frac{g_{11}}{g_{21}} & \frac{\Delta_g}{g_{21}} \end{matrix}$
[T']	$\begin{matrix} \frac{z_{22}}{z_{12}} & \frac{\Delta_z}{z_{12}} \\ \frac{1}{z_{12}} & \frac{z_{11}}{z_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{y_{11}}{y_{12}} & -\frac{1}{y_{12}} \\ -\frac{\Delta_y}{y_{12}} & -\frac{y_{22}}{y_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{\Delta_T} & \frac{B}{\Delta_T} \\ \frac{C}{\Delta_T} & \frac{A}{\Delta_T} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A' & B' \\ C' & D' \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{12}} & \frac{h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{h_{22}}{h_{12}} & \frac{\Delta_h}{h_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta_g}{g_{12}} & -\frac{g_{22}}{g_{12}} \\ -\frac{g_{11}}{g_{12}} & -\frac{1}{g_{12}} \end{matrix}$
[h]	$\begin{matrix} \frac{\Delta_z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ -\frac{z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{y_{11}} & -\frac{y_{12}}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{y_{11}} & \frac{\Delta_y}{y_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B}{D} & \frac{\Delta_T}{D} \\ -\frac{1}{D} & \frac{C}{D} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B'}{A'} & \frac{1}{A'} \\ -\frac{\Delta_T}{A'} & \frac{C'}{A'} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{g_{22}}{\Delta_g} & -\frac{g_{12}}{\Delta_g} \\ -\frac{g_{21}}{\Delta_g} & \frac{g_{11}}{\Delta_g} \end{matrix}$
[g]	$\begin{matrix} \frac{1}{z_{11}} & -\frac{z_{12}}{z_{11}} \\ \frac{z_{21}}{z_{11}} & \frac{\Delta_z}{z_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_y}{y_{22}} & \frac{y_{12}}{y_{22}} \\ -\frac{y_{21}}{y_{22}} & \frac{1}{y_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C}{A} & -\frac{\Delta_T}{A} \\ \frac{1}{A} & \frac{B}{A} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C'}{D'} & -\frac{1}{D'} \\ \frac{\Delta_T}{D'} & \frac{B'}{D'} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h_{22}}{\Delta_h} & -\frac{h_{12}}{\Delta_h} \\ -\frac{h_{21}}{\Delta_h} & \frac{h_{11}}{\Delta_h} \end{matrix}$	$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{matrix}$

TABLA 11-3. ALGUNAS SIMPLIFICACIONES DE PARAMETROS PARA REDES PASIVAS, RECIPROCAS.

Parámetro	Condición para redes pasivas	Condición para simetría eléctrica
z	$z_{12} = z_{21}$	$z_{11} = z_{22}$
y	$y_{12} = y_{21}$	$y_{11} = y_{22}$
ABCD	$AD - BC = 1$	$A = D$
A'B'C'D'	$A'D' - B'C' = 1$	$A' = D'$
h	$h_{12} = -h_{21}$	$\Delta_h = 1$
g	$g_{12} = -g_{21}$	$\Delta_g = 1$

e

$$I_{2a} = y_{12a}V_{1a} + y_{22a}V_{2a} \quad (11-73b)$$

De igual manera, para la red B,

$$I_{1b} = y_{11b}V_{1b} + y_{12b}V_{2b} \quad (11-74a)$$

e

$$I_{2b} = y_{12b}V_{1b} + y_{22b}V_{2b} \quad (11-74b)$$

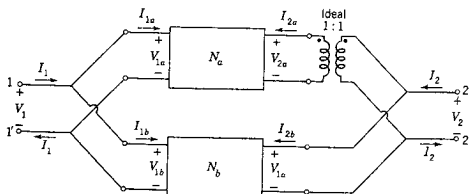


Figura 11-12. Las dos redes N_a y N_b se muestran en una conexión en paralelo. Las redes combinadas se describen por medio de las ecuaciones (11-77).

Al proponer que las dos redes se conecten en paralelo se supone que al efectuar la conexión no se altera la naturaleza de las redes propiamente dichas. Esto no será siempre así, como se ilustra en la figura 11-13; en este caso la red T elimina a la resistencia más baja de la red celosía, que en esta forma queda alterada. Esa dificultad se evita si se utiliza el transformador ideal con una relación de vueltas de 1:1 que se muestra en la figura 11-12. Existe un caso especial importante que se presenta cuando todas las redes que se van a conectar en paralelo tienen una tierra común, como sucede en la figura 11-14. En tal caso no se requiere el uso del transformador ideal. Casi todas las aplicaciones de las ideas de esta sección se podrán usar en redes con una tierra común; pero si éste no es el caso, entonces se requiere el uso del transformador ideal o se deberán efectuar pruebas para estar seguros de que las redes se pueden conectar en paralelo.¹

¹ Las condiciones necesarias se analizan en Norman Balabanian, Theodore A. Bickart y S. Seshu, *Electrical Network Theory* (John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1969), páginas 174-76.

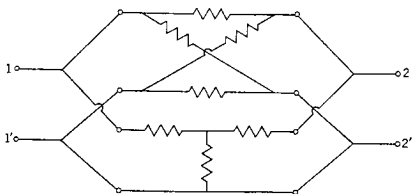


Figura 11-13. Dos redes resistivas con una conexión en paralelo que se usa para ilustrar la necesidad del aislamiento proporcionado por el transformador ideal de relación 1:1 de la figura 11-12.

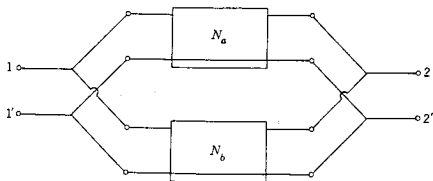


Figura 11-14. Esta figura ilustra la forma en que se indica el caso especial de una conexión común a tierra en N_a y N_b .

Suponiendo que se puede efectuar la conexión en paralelo, entonces esta conexión requiere que

$$V_1 = V_{1a} = V_{1b} \quad \text{y} \quad V_2 = V_{2a} = V_{2b} \quad (11-75)$$

Además,

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b} \quad \text{y} \quad I_2 = I_{2a} + I_{2b} \quad (11-76)$$

de acuerdo con la ley de corrientes de Kirchhoff. Combinando dichas ecuaciones se obtiene

$$I_1 = (y_{11a} + y_{11b})V_1 + (y_{12a} + y_{12b})V_2$$

e

$$I_2 = (y_{12a} + y_{12b})V_1 + (y_{22a} + y_{22b})V_2 \quad (11-77)$$

Este resultado se puede generalizar para cualquier número de redes conectadas en paralelo; las funciones individuales de admitancias en

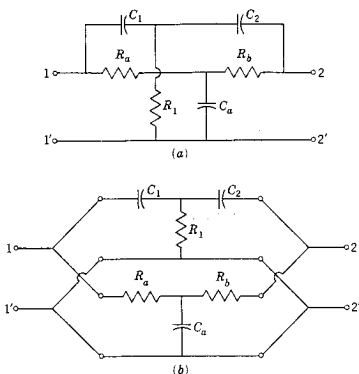


Figura 11-15. La red de (a) se conoce como red de *doble T* y topológicamente equivale a la red que aparece en (b), que es la conexión en paralelo de dos redes *T*.

corto circuito se suman para determinar la función de admitancia general en corto circuito.

Para ilustrar la utilidad de este resultado véase la red que se ilustra en la figura 11-15(a), conocida como red de *doble T*; cuando tiene un diseño apropiado, es útil como filtro de escalonamiento. Se puede considerar como la conexión paralela de dos redes de dos puertos, como se indica en (b) de la misma figura.

Puesto que es posible determinar con facilidad las funciones de admitancia en corto circuito para las redes simples constituyentes, las funciones generales de admitancia en corto circuito se determinan rutinariamente mediante este artificio. Para ilustrarlo se designará a la red superior con la letra A y a la inferior con B. A continuación, examinando estos circuitos (con las terminales de salida en corto circuito), se ve que

$$y_{11a} = \frac{1}{\frac{1}{C_1 s} + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + C_2 s}} \quad (11-78)$$

y

$$y_{11b} = \frac{1}{R_a + \frac{1}{\frac{1}{R_b} + C_a s}} \quad (11-79)$$

Si $R_1 = R_a = R_b = 1$ ohm y $C_1 = C_2 = C_a = 1$ F, entonces

$$y_{11a} = \frac{s(s+1)}{2s+1} \quad \text{y} \quad y_{11b} = \frac{s+1}{s+2} \quad (11-80)$$

De donde, para las redes combinadas,

$$y_{11} = y_{11a} + y_{11b} = \frac{s^3 + 5s^2 + 5s + 1}{(2s+1)(s+2)} \quad (11-81)$$

Se pueden hacer cálculos similares para las funciones de red restantes.

La red que aparece en la figura 11-16(a) se conoce como red *T puentada*. Asimismo, en la parte (b) de la figura esta red se puede reconocer como dos redes de dos puertos en paralelo. Estas redes individuales se pueden analizar como se hizo en el caso de la red de doble *T* y sumar las funciones de admitancia en corto circuito.

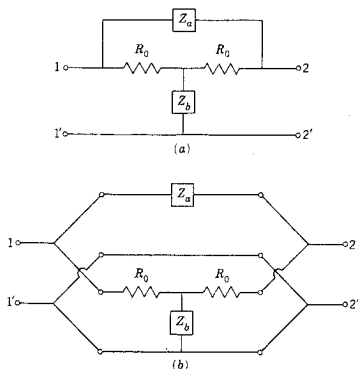


Figura 11-16. La red de (a) se denomina red de *T puentada*. Equivale a la conexión en paralelo de las dos redes que se ilustran en (b) de la figura.

BIBLIOGRAFIA

- CHIRLIAN, PAUL M., *Basic Network Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969, capítulo 8.
 CLOSE, CHARLES M., *The Analysis of Linear Circuits*, Harcourt Brace Jovanovich, Inc., Nueva York, 1966, capítulo 12.

DESOER, CHARLES A. y ERNEST S. KUH, *Basic Circuit Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1966, capítulo 17.

HUELSMAN, LAWRENCE P., *Basic Circuit Theory with Digital Computations*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1972. Véase el capítulo 9.

KARNI, SHLOMO, *Intermediate Network Analysis*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1971, capítulo 4.

KIM, WAN H. y HENRY E. MEADOWS, Jr., *Modern Network Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1971, capítulo 5.

EJERCICIOS PARA COMPUTADORA DIGITAL

En relación con la multiplicación matricial de las matrices de los parámetros $ABCD$ para redes conectadas en cascada, véanse los ejercicios en las referencias que se citan en el apéndice E-3.1. La determinación de los otros parámetros incluye un análisis ordinario de redes con la condición especial de que un par de terminales de la red pueden estar abiertas o bien en corto circuito. Estos temas se analizan en las referencias que aparecen en el apéndice E-8.

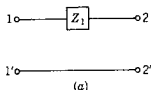
PROBLEMAS

En los problemas que siguen, todos los valores de elementos están en ohms, farads o henrys.

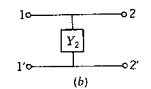
11-1. Encuentre los parámetros y y z para las dos redes simples que aparecen en la figura siguiente, si es que existen.

11-2. Para las dos redes que se ilustran en la figura que sigue determine los parámetros z y y , si es que existen.

11-3. Encuentre los parámetros y y z para la red resistiva de la figura.



(a)



(b)

Fig. P11-1.

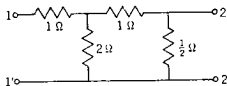


Fig. P11-3.

11-4. La red de la figura contiene una fuente de corriente controlada por corriente. Determine los parámetros y y z de esta red.

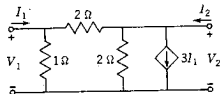
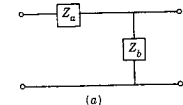
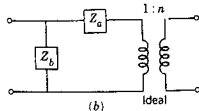


Fig. P11-4.

11-5. Encuentre los parámetros y y z para la red resistiva que contiene una fuente controlada, como se señala en la figura.



(a)



(b)

Fig. P11-2.

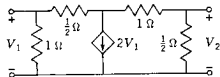


Fig. P11-5.

- 11-6. En la figura se muestra una red resistiva que contiene una sola fuente controlada. Encuentre los parámetros y y z de esta red.

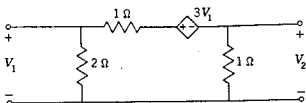


Fig. P11-6.

- 11-7. La red de la figura contiene una fuente dependiente de corriente y una fuente dependiente de voltaje. Para los valores de elemento que se dan determine los parámetros y y z .

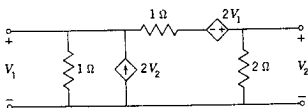


Fig. P11-7.

- 11-8. La red que sigue contiene una fuente de voltaje controlado y una fuente de corriente controlada. Determine los parámetros y y z para los valores de elementos que se especifican.

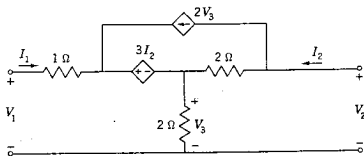


Fig. P11-8.

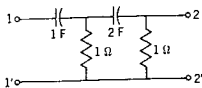


Fig. P11-9.

- 11-9. Encuentre los parámetros y y z para la red RC en escalera de la figura.

- 11-10. La red de la figura es de tipo RC en T puenteadada. Determine los parámetros y y z para los valores que se dan.

- 11-11. Determine los parámetros A^{BCD} (de transmisión) de la red del problema 11-10.

- 11-12. En la figura que se muestra a continuación se presenta una red con elementos pasivos y dos transformadores ideales que tienen la relación de vueltas 1:1. Determine los parámetros z para los valores de elemento que se especifican.

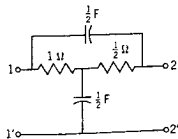


Fig. P11-10.

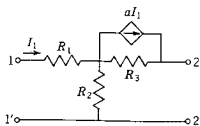


Fig. P11-13.

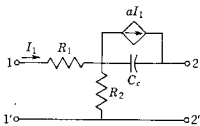


Fig. P11-14.

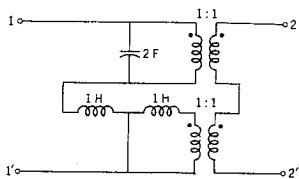


Fig. P11-12.

- 11-13. La red de la siguiente figura representa cierto transistor en un determinado rango de frecuencias. Para esta red, determine (a) los parámetros h y (b) los parámetros g . Compruebe sus resultados utilizando la tabla 11-2.
- 11-14. La red de esta figura representa al transistor del problema 11-13 en un rango de frecuencias distinto. Para esta red, determine (a) los parámetros h y (b) los parámetros g .
- 11-15. Demuestre que la representación estándar T de una red de dos puertos se puede expresar en función de los parámetros h por medio de las ecuaciones que se indican en la figura.

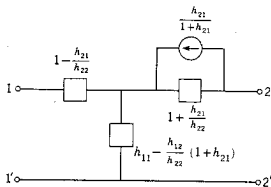


Fig. P11-15.

- 11-16. La red de esta figura se puede considerar como una red de dos puertos incrustada en otra red resistiva. La red resistiva se describe mediante las siguientes admitancias de corto circuito: $y_{11} = y_{22} = 2$ mhos, $y_{21} = 2$ mhos

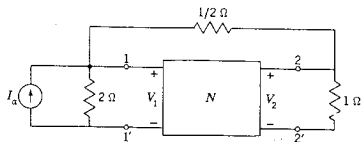


Fig. P11-16.

y $y_{12} = 1$ mho. Si I_a es una constante igual a 1 amp, determine los voltajes de los dos puertos de la red N , V_1 y V_2 .

- 11-17. La red que se muestra a continuación se compone de una red resistiva T y una red resistiva π conectadas en paralelo. Determine los parámetros y para los valores de elementos que se dan.

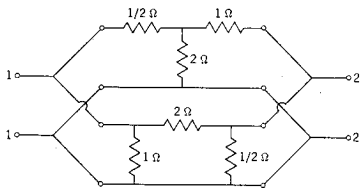


Fig. P11-17.

- 11-18. La red resistiva que se ilustra a continuación se debe analizar a fin de determinar los parámetros y .

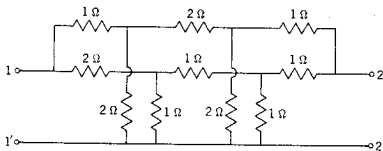


Fig. P11-18.

- 11-19. En la siguiente figura se presentan dos redes de dos puertos conectadas en paralelo. Una de ellas contiene sólo un girador y la otra es una red resistiva que contiene una sola fuente controlada. Determine los parámetros y de esta red.

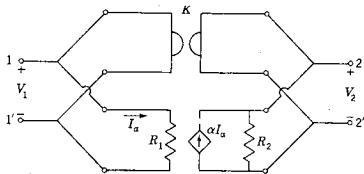


Fig. P11-19.

11-20. En la red de la figura 11-16 sea $Z_a = s/2$, $Z_b = 2/s$ y $R_0 = 1$. Para estos valores de elemento específico determine los parámetros y .

11-21. La red de la figura siguiente es del tipo que se usa para el llamado "filtro de escalonamiento". Determine los parámetros y para los valores de elemento que se indican.

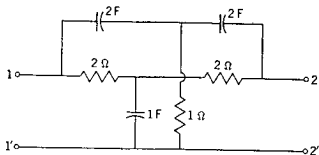


Fig. P11-21.

11-22. Sean los valores de elemento para la red que se muestra en la figura 11-15 los siguientes: $C_1 = C_2 = 1$ F, $R_1 = 1$ ohm, $R_a = R_b = 2$ ohms, $C_a = 1/2$ F. Determine los parámetros y utilizando estos valores.

11-23. En la figura se muestran dos redes identificadas como (a) y (b). Se asegura que una de ellas es la equivalente de la otra. ¿Es correcta esta afirmación? Diga por qué. Si lo es, ¿podría una de las redes tener una ventaja con relación a la otra en lo que respecta al cálculo de los parámetros de red?

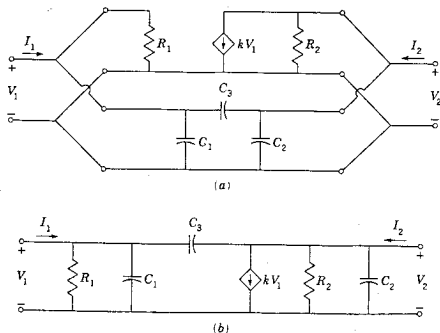


Fig. P11-23.

11-24. Se dice que dos redes de dos puertos son equivalentes cuando sus parámetros y o z son idénticos (o cualquier otro parámetro característico). En este problema se desea estudiar las condiciones en que la red π de (a)

es equivalente a la red T de (b). Demuestre que las dos redes son equivalentes cuando

$$Y_a = \frac{Z_2}{D}, \quad Y_b = \frac{Z_3}{D}, \quad \text{y} \quad Y_c = \frac{Z_1}{D}$$

en donde

$$D = Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1$$

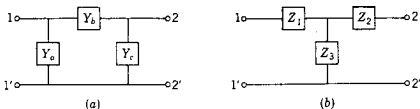


Fig. P11-24.

- 11-25. Deduzca ecuaciones similares a las que se dan en el problema 11-24, expresando Z_1 , Z_2 y Z_3 en función de Y_a , Y_b y Y_c . Este resultado y el que se da en el problema 11-24 se utilizan para obtener una transformación $T-\pi$.
- 11-26. Aplique la transformación $T-\pi$ del problema 11-24 o del 11-25 a la red de la figura para obtener una red equivalente (a) en T y (b) en π .

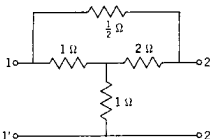


Fig. P11-26.

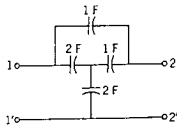


Fig. P11-27.

- 11-27. Aplique la transformación $T-\pi$ para obtener una red equivalente (a) en T y (b) en π para la red capacitiva que se ilustra a continuación.
- 11-28. Aplique cuantas veces sea necesario la transformación $T-\pi$ a la red inductiva de escalera que se muestra a continuación para determinar los valores numéricos de la red equivalente (a) T y (b) π .

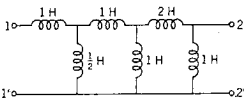


Fig. P11-28.

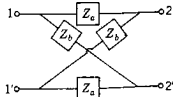


Fig. P11-29.

- 11-29. La red de la figura que sigue se conoce como red celosía; esta celosía es simétrica en el sentido de que dos de los brazos de la red tienen la impedancia Z_a y otros dos tienen la impedancia Z_b . Para esta red, (a) determine los parámetros z y (b) exprese Z_a y Z_b en función de los parámetros z .

- 11-30. En este problema se estudian redes de dos puertos que tienen una propiedad de simetría como la que se señala en (a) de la figura: si la red se divide con una línea punteada, las dos mitades de red tienen simetría de espejo con respecto a dicha línea. Las dos mitades de red se conectan mediante cualquier número de conductores, como se indica, y se considerarán sólo los casos en que estos conductores no se crucen. Si se *biseca* una red que satisface estas especificaciones en la línea punteada, entonces, con los alambres de conexión abiertos, la impedancia de entrada en cualquiera de los puertos es $Z_{1/2oc}$ como se señala en (b). De la misma manera, cuando los alambres de conexión están en corto circuito, la impedancia en cualquiera de los puertos es $Z_{1/2sc}$, como se muestra en (c). Existe un teorema propuesto por Bartlett que establece que estas impedancias se relacionan con las que se dan para los brazos de la red del problema 11-29 mediante las ecuaciones

$$Z_a = Z_{1/2sc}, \quad Z_b = Z_{1/2oc}$$

Esto se conoce como el *teorema de bisección de Bartlett* y permite encontrar una red equivalente de celosía para cualquier red simétrica. Demuestre el teorema.

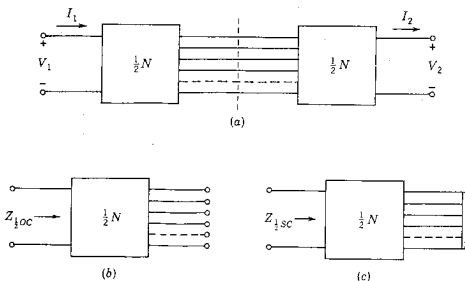


Fig. P11-30.

- 11-31. Aplique el teorema del problema 11-30 a la red del problema 10-2 suprimiendo el resistor terminal del puerto 2 y obteniendo así una red equivalente de celosía.
- 11-32. Aplique el teorema del problema 11-30 a la red del problema 11-31, eliminando el resistor terminal R_0 para encontrar la celosía equivalente de la red que se da.
- 11-33. (a) Demuestre que la red de la figura satisface los requisitos que se describen en el problema 11-30. (b) Determine la equivalente de celosía de dicha red.

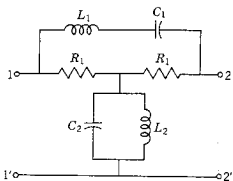


Fig. P11-33.

11-34. Encuentre la equivalente de celosía de la red de la siguiente figura utilizando los resultados del problema 11-30.

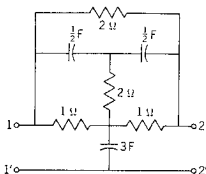


Fig. P11-34.

11-35. La red N de la siguiente figura se puede describir por medio de los parámetros z . Demuestre que, con el puerto 2 abierto,

$$G_{12} = \frac{z_{21}}{z_{11}}$$

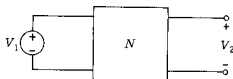


Fig. P11-35.

11-36. La red N de la figura tiene conectada en el puerto 2 una red con una impedancia $Z_L = 1/Y_L$. Demuestre que

$$G_{12} = \frac{-Y_{21}}{Y_{22} + Y_L}$$

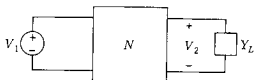


Fig. P11-36.

400 *Parámetros de dos puertos*

- 11-37. La red N de la figura tiene conectada en el puerto 2 una impedancia $Z_L = 1/Y_L$. Demuestre que la impedancia de transferencia de la combinación es

$$Z_{12} = \frac{z_{21}Z_L}{z_{22} + Z_L}$$



Fig. P11-37.

- 11-38. En la siguiente figura se ilustran dos redes de dos puertos conectadas en cascada. Las dos redes se distinguen con los subíndices a y b . Demuestre que la red combinada se puede describir por medio de las ecuaciones

$$z_{12} = \frac{z_{12a}z_{12b}}{z_{11b} + z_{22a}}$$

y

$$y_{12} = \frac{-y_{12a}y_{12b}}{y_{11b} + y_{22a}}$$

para las funciones de transferencia.

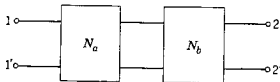


Fig. P11-38.

CAPITULO 12

12 *Análisis senoidal de estado permanente*

12-1. EL ESTADO PERMANENTE SENOIDAL

La senoide es una forma característica de onda para señales. Si una fuente senoidal se conecta a una red de elementos pasivos lineales, todas las corrientes y todos los voltajes de dicha red serán senoidales *en el estado permanente* y diferirán de la forma de onda de la fuente sólo en la amplitud y en el ángulo de fase. Esta propiedad se infiere de dos observaciones:

- (1) La senoide se puede diferenciar o integrar repetidamente y seguir siendo una senoide de la misma frecuencia.
- (2) La suma de un número de senoides de igual frecuencia pero de amplitud y fase arbitrarias es una senoide de la misma frecuencia. Esta propiedad de adición es importante porque el análisis incluye la aplicación de la ley de voltajes o corrientes de Kirchhoff.

En otras palabras, la clase de señales descritas por la función exponencial e^{st} tiene un valor de estado permanente que es finito y distinto de cero sólo cuando $s = j\omega$ y $s = -j\omega$.

Además de esta distinción matemática, la senoide se genera de un modo muy común en la naturaleza: una botella que se balancea sobre el agua, el oscilar de un péndulo, la sombra de la manivela de una rueda que gira son todos dispositivos que tienen movimientos que son senoidales en el tiempo. Un voltaje senoidal se genera por medio de un conductor que se limita a desplazarse en una trayectoria circular a ángulos rectos con un campo magnético. Estos generadores producen

la potencia que se usa en las casas y en la industria. Todos los laboratorios de ingeniería eléctrica están llenos de fuentes senoidales que pueden tener gran variedad de frecuencias, desde cero hasta gigahertz.

En este capítulo se desarrollarán las técnicas que se aplican en particular a los cálculos del estado senoidal permanente en términos de las soluciones generales que antes se obtuvieron.¹ Sea la primera ecuación

$$I(s) = Y(s)V(s) \quad (12-1)$$

en la que $I(s)$ es la transformada de la respuesta, $Y(s)$ es una función de red y $V(s)$ es una transformada de excitación. Sea $V(s)$ la transformada de $v(t) = V_1 \text{ sen } \omega_1 t$, en donde V_1 y ω_1 son constantes reales positivas, de manera que

$$I(s) = \frac{\omega_1 V_1 Y(s)}{s^2 + \omega_1^2} \quad (12-2)$$

Ahora $Y(s)$ es un cociente de polinomios, $Y = p/q$, en donde $q = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)$, en donde p_j son los polos simples de Y . La transformada de la respuesta se puede expresar en forma de fracciones parciales como sigue:

$$I(s) = \frac{K_{-j\omega_1}}{s + j\omega_1} + \frac{K_{j\omega_1}}{s - j\omega_1} + \frac{K_1}{s + p_1} + \dots + \frac{K_n}{s + p_n} \quad (12-3)$$

Se puede aplicar el método de Heaviside del capítulo 7 para evaluar los residuos $K_{-j\omega_1}$ y $K_{j\omega_1}$ y así

$$K_{-j\omega_1} = \frac{\omega_1 V_1 Y(-j\omega_1)}{-2j\omega_1} = \frac{V_1 |Y_1| e^{-j\phi}}{-2j} \quad (12-4)$$

puesto que $Y(-j\omega_1)$ se expresa en forma polar como $|Y_1| e^{-j\phi}$. Del mismo modo, se observa que

$$K_{j\omega_1} = \frac{\omega_1 V_1 Y(j\omega_1)}{2j\omega_1} = \frac{V_1 |Y_1| e^{j\phi}}{2j} \quad (12-5)$$

con la identificación en función de ϕ hecha a partir de la propiedad general de las variables complejas, $[f(z^*)]^* = f(z)$. Ahora se substituyen las ecuaciones (12-4) y (12-5) en la (12-3) y se simplifican los dos primeros términos a la forma

$$\frac{V_1 |Y_1|}{2j} \left(\frac{e^{j\phi}}{s - j\omega_1} - \frac{e^{-j\phi}}{s + j\omega_1} \right) \quad (12-6)$$

que tiene la siguiente transformada inversa:

$$V_1 |Y_1| \text{ sen } (\omega_1 t + \phi) \quad (12-7)$$

¹ Los elementos del álgebra fasorial se repasan en el apéndice A.

Entonces la transformada inversa de la ecuación (12-3) se convierte en

$$i(t) = V_1 |Y_1| \text{sen}(\omega_1 t + \phi) + K_1 e^{p_1 t} + \dots + K_n e^{p_n t} \quad (12-8)$$

Se recordará, capítulo 10, que en las redes pasivas cuyas pérdidas son distintas de cero es negativa, la parte real de todos los valores de p_j de esta ecuación, de tal manera que se verá que si se espera un tiempo lo suficientemente grande después de que $t = 0$, sólo el primer término de la ecuación (12-8) será importante. Este valor se denomina respuesta de estado permanente, como se indicó en el capítulo 6, de tal suerte que

$$i_{ss} = V_1 |Y_1| \text{sen}(\omega_1 t + \phi) \quad (12-9)$$

Al comparar esta ecuación con la de la excitación $v = V_1 \text{sen} \omega_1 t$ se ve que la magnitud de la excitación y la respuesta difieren por $|Y_1|$ y por ϕ en lo que respecta a la fase, siendo estas dos cantidades la magnitud y la fase de $Y(j\omega_1)$ de la ecuación (12-5). Por tanto, es evidente que la respuesta de estado permanente para la excitación senoidal se determina haciendo que $s = j\omega$ en la función de red que relaciona a la excitación con la respuesta. Este es un resultado importante que se usa en este capítulo y los que siguen.

12-2. LA SENOIDE Y $e^{\pm j\omega t}$

La forma de onda senoidal que se ilustra en la figura 12-1 se describe mediante la ecuación

$$v = V \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (12-10)$$

en donde V es la amplitud (o valor máximo) de la onda senoidal, ω es la frecuencia en radianes por segundo y ϕ es el ángulo de fase de v con respecto a la referencia $v' = V \text{sen} \omega t$, que se indica mediante la curva punteada en la figura 12-1. El período de v es el intervalo entre $\omega t = 0$ y $\omega t = 2\pi$ radianes. Sea el segundo valor del tiempo $t = T$, por tanto el período se define por $\omega T = 2\pi$ y

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{seg} \quad (12-11)$$

La cantidad ϕ/ω que se indica en la figura 12-1 representa el desplazamiento en el tiempo de v con respecto a la referencia v' . Si ϕ es positivo, v adquiere el valor cero, ϕ/ω seg antes que v' , y se dice que v está adelantada a v' ; por el contrario, si ϕ es negativa, v pasa por cero, ϕ/ω seg más tarde que v' , en cuyo caso v está atrasada con relación a v' .

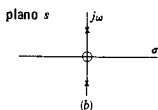
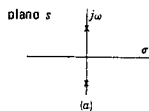


Figura 12-2. Polos y ceros de la transformada de (a) una función senoidal y (b) una función cosenoidal.

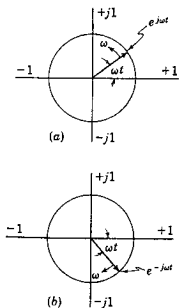


Figura 12-3. Fasores giratorios de amplitud unitaria (a) que giran en sentido positivo, (b) en sentido negativo. El plano complejo que se indica en esta figura no se debe confundir con el plano s.

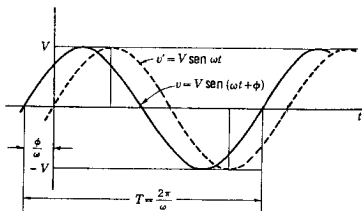


Figura 12-1. Onda senoidal de amplitud V y ángulo de fase ϕ . T es el período de la función periódica.

Utilizando la relación entre la función seno y coseno, v de la ecuación (12-10) se puede expresar en la forma equivalente:

$$v = V \cos [\omega t + \phi - (\pi/2)] = V \cos (\omega t + \beta) \quad (12-12)$$

Esta ecuación se puede expresar como la siguiente suma de las funciones seno y coseno:

$$v = (V \cos \beta) \cos \omega t + (-V \sin \beta) \sin \omega t \quad (12-13)$$

Por tanto, la forma general de la señal con que se trabajará en este estudio es la suma de las funciones seno y coseno.

Las transformadas para las funciones seno y coseno son

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (12-14)$$

indicando que las señales senoidales tienen transformadas con polos y ceros restringidos al eje imaginario, como se señala en la figura 12-2. Los polos en $\pm j\omega$ corresponden a los factores en el dominio del tiempo $e^{j\omega t}$ y $e^{-j\omega t}$. Esto se ve también directamente en las siguientes ecuaciones:

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \quad (12-15)$$

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \quad (12-16)$$

El término $e^{j\omega t}$ por lo común se interpreta en términos de un fasor giratorio unitario que gira en sentido positivo (o en sentido contrario a las manecillas del reloj); $e^{-j\omega t}$ se interpreta asimismo como un fasor giratorio unitario que gira en sentido negativo (en el mismo sentido que las manecillas del reloj). Los fasores unitarios se ilustran en la figura 12-3. Ahora, de acuerdo con la ecuación (12-15),

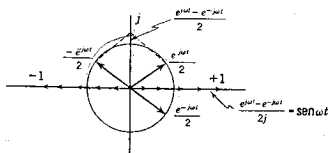


Figura 12-4. La función seno descrita por dos fasores que giran en sentido opuesto.

el seno se compone de la diferencia de dos fasores unitarios giratorios, girando en sentido opuesto, dividida entre el factor $(2j)$. La configuración de una onda senoidal en función de estos exponenciales unitarios se ilustra en la figura 12-4. La combinación de los fasores $(e^{j\omega t}/2)$ y $(-e^{-j\omega t}/2)$ da un fasor sobre el eje j . El factor $1/j = -j$ corresponde a una rotación negativa de 90° ($-\pi/2$ radianes). El seno es un número real, tiene un valor cero cuando $\omega t = 0$ y un valor unidad cuando $\omega t = \pi/2$. Conforme aumentará ωt de 0 a 2π , se observa que la función seno toma valores entre los límites 1 y -1 .

El coseno se puede construir de un modo similar de acuerdo con los factores exponenciales, como se ilustra en la figura 12-5. El coseno es también un número real que tiene un rango total de valores que van de $+1$ a -1 . Cuando $\omega t = 0$, el coseno tiene el valor unidad; cuando $\omega t = 2\pi$, el coseno tiene un valor 0.

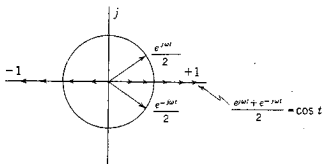


Figura 12-5. La función coseno descrita por dos fasores que giran en sentido opuesto.

En las dos secciones siguientes se mostrará la forma en que se pueden aprovechar las funciones exponenciales $e^{\pm j\omega t}$ para calcular la respuesta senoidal de estado permanente.

12-3. SOLUCION UTILIZANDO $e^{\pm j\omega t}$

La determinación de la componente de estado permanente de la respuesta para una entrada senoidal se estudió en el capítulo 6, donde

se introdujo el método de los coeficientes no determinados como medio para encontrar esta parte de la solución. Los métodos que se estudian a continuación tienen el mismo objetivo pero ofrecen ventajas de cálculo. Tales métodos fueron introducidos en la ingeniería eléctrica, a principios de este siglo, por Charles P. Steinmetz y otros. El uso de la exponencial $e^{j\omega t}$ para determinar la solución es particularmente popular en la teoría electromagnética y sus aplicaciones tales como la propagación de ondas y las antenas en donde la excitación es de tipo senoidal y donde se hacen cálculos para condiciones de estado permanente. Este método se presentará por medio de un ejemplo.

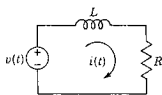


Figura 12-6. Red RL en serie del ejemplo 1.

EJEMPLO 1

Sea la red de la figura 12-6, en donde la fuente es senoidal y se requiere la respuesta $i(t)$ para la operación en estado permanente. Para esta red, $v = V \cos \omega t$, en donde V es una constante real y positiva; esta ecuación se puede escribir como sigue:

$$V \cos \omega t = V \left(\frac{e^{j\omega t}}{2} + \frac{e^{-j\omega t}}{2} \right) \quad (12-17)$$

Por tanto, se observa que el generador $v(t) = V \cos \omega t$ es equivalente a dos generadores, uno que genera $(V/2)e^{j\omega t}$, y el otro que genera $(V/2)e^{-j\omega t}$. Utilizando el principio de superposición se pueden analizar las fuerzas impulsoras por separado y luego combinar las corrientes resultantes para obtener la solución. Para el primer generador, la ecuación diferencial se convierte en

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \frac{V}{2} e^{j\omega t} \quad (12-18)$$

Para resolver esta ecuación se utiliza el método de los coeficientes no determinados del capítulo 6. Dicho método requiere que la solución tenga la forma $i_{1,ss} = A e^{j\omega t}$, en donde A es el coeficiente que se debe determinar. Sustituyendo $i_{1,ss}$ en la ecuación (12-18), se obtiene

$$j\omega LA + RA = \frac{V}{2} \quad (12-19)$$

o bien

$$A = \frac{V/2}{R + j\omega L} \quad (12-20)$$

Del mismo modo, se puede lograr que $Be^{-j\omega t}$ sea la solución de estado permanente de la ecuación (12-18) haciendo que $e^{-j\omega t}$ sustituya a $e^{j\omega t}$ para dar

$$B = \frac{V/2}{R - j\omega L} \quad (12-21)$$

Solución utilizando $e^{\pm j\omega t}$ 407

La solución para el estado permanente se convierte en

$$i_{ss} = \frac{V}{2} \left(\frac{e^{j\omega t}}{R + j\omega L} + \frac{e^{-j\omega t}}{R - j\omega L} \right) \quad (12-22)$$

La reducción algebraica en que se emplean las identidades de la ecuación (12-15) y (12-16) da

$$i_{ss} = \frac{V}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t) \quad (12-23)$$

Esto se puede reducir más todavía utilizando el método que se da en las ecuaciones (6-73) a (6-76), para obtener

$$i_{ss} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \left[\cos \left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \right) \right] \quad (12-24)$$

que es la solución requerida.

En el ejemplo 1 se observa que $B = A^*$, lo cual sugiere que toda la información requerida se puede encontrar con una función exponencial, $e^{j\omega t}$. Para demostrar que, en efecto, éste es el caso, se empleará la excitación

$$\begin{aligned} v &= V e^{j(\omega t + \phi)} \\ &= V \cos(\omega t + \phi) + jV \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (12-25)$$

Este constituye sencillamente un ardid que se usa para lograr resultados útiles: no existen generadores reales de números complejos. Sea $i(t)$ la respuesta debida a v de la ecuación (12-25). Más aún, sea $i_c(t)$ la respuesta producida por la excitación $V \cos(\omega t + \phi)$ e $i_s(t)$ la respuesta producida por la excitación $V \sin(\omega t + \phi)$. Se observa que $i(t)$ se relaciona con $i_c(t)$ e $i_s(t)$ por medio de

$$i(t) = i_c(t) + j i_s(t) \quad (12-26)$$

a partir de la ecuación (12-25), por medio de una superposición. Entonces

$$i_c = \text{Re} [i(t)] \quad (12-27)$$

y

$$i_s = \text{Im} [i(t)] \quad (12-28)$$

en donde "Re" designa la *parte real* de e "Im" es la *parte imaginaria* de la función.

Ahora v de la ecuación (12-25) se puede expresar como sigue:

$$v = V e^{j\phi} e^{j\omega t} = V e^{j\omega t} \quad (12-29)$$

en donde V es un número complejo cuya magnitud es V y fase ϕ . Se observará que, debido al aspecto de la homogeneidad de la propiedad de superposición para redes lineales, se puede utilizar la excitación $e^{j\omega t}$ para encontrar la solución y luego multiplicar el resultado por V . Esta exposición se puede resumir por medio de dos procedimientos como sigue:

Procedimiento 1. La respuesta de estado permanente a la excitación $V \cos(\omega t + \phi)$ se puede encontrar determinando la respuesta a la excitación $e^{j\omega t}$, multiplicando esta respuesta por $V = Ve^{j\phi}$ y luego determinando la parte real de este producto.

Procedimiento 2. La respuesta de estado permanente a la excitación $V \sin(\omega t + \phi)$ se puede encontrar determinando la respuesta a la excitación $e^{j\omega t}$, multiplicando esta respuesta por $V = Ve^{j\phi}$ y luego determinando la parte imaginaria de este producto.

EJEMPLO 2

A continuación se volverá a trabajar con el ejemplo 1, aplicando el procedimiento 1. Para la excitación $e^{j\omega t}$, la ecuación (12-18) se convierte en

$$L \frac{di}{dt} + Ri = e^{j\omega t} \quad (12-30)$$

para la cual se tiene la solución

$$Ae^{j\omega t} = \frac{1}{R + j\omega L} e^{j\omega t} \quad (12-31)$$

Para este problema, $V = Ve^{j0}$ de tal manera que la respuesta de estado permanente es

$$i_{ss} = \operatorname{Re} \frac{Ve^{j\omega t}}{R + j\omega L} \quad (12-32)$$

Substituyendo $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ en esta ecuación se obtiene después de una reducción algebraica comparable a la del ejemplo 1,

$$i_{ss} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \left[\cos \left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \right) \right] \quad (12-33)$$

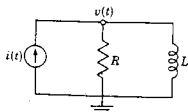


Figura 12-7. Red RL en paralelo del ejemplo 3.

EJEMPLO 3

La red de la figura 12-7 tiene una excitación senoidal $i_1 = I_1 \sin(\omega t + \phi)$, y se desea determinar la respuesta de voltaje de no-

do a referencia, v , en el estado permanente. La ley de corrientes de Kirchoff establece que

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v dt = I_1 \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad (12-34)$$

Por supuesto, esta expresión se puede convertir en ecuación diferencial por medio de una derivación; sin embargo, se considerará la integral de la ecuación. Puesto que el valor inicial que se encuentra al integrar de $t = -\infty$ a $t = 0$ no afecta a la solución de estado permanente, el límite inferior no entra en esta evaluación y se puede escribir la ecuación en forma de integral indefinida. Por tanto, la ecuación

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int v dt = e^{j\omega t} \quad (12-35)$$

tiene la solución

$$Ae^{j\omega t} = \frac{1}{(1/R) + (1/j\omega L)} e^{j\omega t} \quad (12-36)$$

Puesto que la excitación se expresa en términos del seno, se utiliza el procedimiento 2 que se describió antes. Siguiendo este método, se tiene que

$$v_{ss} = \operatorname{Im} \left[I_1 e^{j\phi} \left(\frac{j\omega LR}{R + j\omega L} \right) e^{j\omega t} \right] \quad (12-37)$$

Desarrollando todas las operaciones algebraicas se llega a la solución de estado permanente

$$v_{ss} = \frac{\omega L R I_1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \operatorname{sen} \left(\omega t + \phi + \tan^{-1} \frac{R}{\omega L} \right) \quad (12-38)$$

12-4. SOLUCION UTILIZANDO $\operatorname{Re} e^{j\omega t}$ o $\operatorname{Im} e^{j\omega t}$

Un planteamiento semejante al de la sección anterior utiliza las identidades

$$\cos \omega t = \operatorname{Re} e^{j\omega t} \quad (12-39)$$

y

$$\operatorname{sen} \omega t = \operatorname{Im} e^{j\omega t} \quad (12-40)$$

Para ilustrar el método se estudiará la red del ejemplo 1 que aparece en la figura 12-6. Se substituye $V_1 \cos \omega t$ por $\operatorname{Re} V_1 e^{j\omega t}$ y se obtiene la ecuación

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \operatorname{Re} V_1 e^{j\omega t} \quad (12-41)$$

410 Análisis senoidal de estado permanente

Siguiendo el método de los coeficientes no determinados, la solución se supone como sigue

$$i_{ss} = \operatorname{Re} A e^{j\omega t} \quad (12-42)$$

Substituyendo esto en la ecuación (12-41) se obtiene

$$L \frac{d}{dt} [\operatorname{Re} A e^{j\omega t}] + R [\operatorname{Re} A e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} V_1 e^{j\omega t} \quad (12-43)$$

Las operaciones algebraicas con cantidades complejas se manejan a continuación empleando las tres reglas siguientes: si $f = V e^{j\omega t}$, se observa que

$$\operatorname{Re} (k_1 f_1 + k_2 f_2) = k_1 \operatorname{Re} f_1 + k_2 \operatorname{Re} f_2 \quad (12-44)$$

$$\operatorname{Re} \frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} \operatorname{Re} f \quad (12-45)$$

y, finalmente, para otros problemas distintos de este ejemplo se deberá saber que

$$\operatorname{Re} \int f dt = \int \operatorname{Re} f dt \quad (12-46)$$

Entonces la ecuación (12-43) se convierte en

$$\operatorname{Re} \left[A \left(L \frac{d}{dt} + R \right) e^{j\omega t} \right] = \operatorname{Re} (V_1 e^{j\omega t}) \quad (12-47)$$

o bien

$$\operatorname{Re} \{ [A(j\omega L + R) - V_1] e^{j\omega t} \} = 0 \quad (12-48)$$

Puesto que la ecuación se debe satisfacer para todos los valores de t , es necesario que

$$A(j\omega L + R) - V_1 = 0 \quad (12-49)$$

o bien

$$A = \frac{V_1}{j\omega L + R} \quad (12-50)$$

y A de la ecuación (12-42) queda determinada. Por tanto, la solución es

$$i_{ss} = \operatorname{Re} \left[\left(\frac{V_1}{j\omega L + R} \right) e^{j\omega t} \right] \quad (12-51)$$

Esta ecuación es idéntica a la (12-32) del ejemplo 2, de manera que la solución es la que da la ecuación (12-33).

Se observará que si la excitación se da en términos del seno, en-

tonces $\text{Im } e^{j\omega t}$ se utiliza en la ecuación (12-41) y se efectúan los pasos restantes comparables a los que se dieron para la parte real.

Con el fin de generalizar el método ilustrado con el ejemplo, obsérvese que

$$V_1 \cos(\omega t + \phi) = \text{Re} [V_1 e^{j(\omega t + \phi)}] \quad (12-52)$$

$$= \text{Re} [V e^{j\omega t}], \quad \text{si } V = V_1 e^{j\phi} \quad (12-53)$$

La solución supuesta es

$$i_{ss} = \text{Re} [I e^{j\omega t}], \quad \text{en donde } I = I_1 e^{j\theta} \quad (12-54)$$

Observe que la relación

$$\frac{V}{I} = \frac{V_1 e^{j(\phi - \theta)}}{I_1} = Z(j\omega) \quad (12-55)$$

En este caso $Z(j\omega)$ es la función de red de los estudios anteriores de la transformación de Laplace con $s = j\omega$,

$$Z(j\omega) = \left. \frac{V(s)}{I(s)} \right|_{s=j\omega} \quad (12-56)$$

La ecuación (12-55) se puede expresar también en la forma

$$IZ(j\omega) = V \quad (12-57)$$

o bien

$$I = \frac{V}{Z(j\omega)} \quad (12-58)$$

Una vez que se determina I , la solución es

$$i_{ss} = \text{Re} (I e^{j\omega t}) \quad (12-59)$$

Aplicando los métodos que antes se vieron esto se puede escribir como sigue:

$$i_{ss} = \frac{V_1}{|Z|} \cos(\omega t + \theta) \quad (12-60)$$

en donde

$$\theta = \phi - \tan^{-1} \frac{\text{Im } Z(j\omega)}{\text{Re } Z(j\omega)} \quad (12-61)$$

EJEMPLO 4

Se conecta un resistor de 1 ohm en serie con un capacitor de $1/2$ F y una fuente de voltaje $v = 10 \cos [2t + (\pi/4)]$. Se pide determinar la corriente de estado permanente en la red utilizando las ecuaciones

(12-60) y (12-61). Para el valor que se da de $v(t)$ se tiene que $V_1 = 10$ y $\phi = \pi/4$. Así también, $Z(j2) = R + (1/j\omega C) = 1 - j1$. De acuerdo con esto se ve que la magnitud de $Z(j2)$ es $\sqrt{2}$ y la fase de $Z(j2)$ es $-\pi/4$. Substituyendo estos datos en la ecuación (12-60) se obtiene

$$i_{ss} = 7.07 \cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = 7.07 \sin(2t + \pi) \quad (12-62)$$

que es la solución requerida.

12-5. FASORES Y DIAGRAMAS FASORIALES

En esta sección se generalizan los resultados que da la ecuación (12-57) empleando los diferentes métodos utilizados hasta ahora en el presente capítulo. Sea una red de L mallas independientes excitadas por fuentes senoidales, todas las cuales operan a la misma frecuencia. Se pide determinar la respuesta de estado permanente de esta red. Supóngase que se escriben L ecuaciones de malla en forma de transformada. Si se hace que $s = j\omega$, en donde ω es la frecuencia única de excitación, las funciones de impedancia se convierten en $Z_{ik}(j\omega)$, y cada voltaje de malla se representa por un fasor² $V_i e^{j\omega t}$ y cada corriente se expresa también en forma fasorial, $I_k e^{j\omega t}$. Por tanto, se tiene que, para esta red,

$$\begin{aligned} Z_{11}(j\omega) I_1 + Z_{12}(j\omega) I_2 + \dots + Z_{1L}(j\omega) I_L &= V_1 \\ Z_{21}(j\omega) I_1 + Z_{22}(j\omega) I_2 + \dots + Z_{2L}(j\omega) I_L &= V_2 \\ Z_{L1}(j\omega) I_1 + Z_{L2}(j\omega) I_2 + \dots + Z_{LL}(j\omega) I_L &= V_L \end{aligned} \quad (12-63)$$

en donde el exponencial $e^{j\omega t}$ se ha anulado en cada una de las L ecuaciones. Cuando el fasor de respuesta requerido I_k se determina a través de las operaciones algebraicas rutinarias de números complejos, será un fasor de la forma

$$I_k = I_k e^{j\theta_k} \quad (12-64)$$

a partir de la cual se puede escribir la respuesta en el dominio del tiempo utilizando sólo los datos de magnitud y fase (además de la frecuencia, que se conoce ya),

$$i_k(t) = I_k \cos(\omega t + \theta_k) \quad (12-65)$$

y la solución está completa.

² El fasor se conoce también como *vector* o *senor*. Véase la exposición del apéndice A.

Este método general se puede describir mediante un diagrama de flujo similar al de la figura 7-1(b) que se empleó para introducir la transformación de Laplace. Dicho diagrama se ilustra en la figura 12-8, que describe el método de solución que se aplica cuando todas las fuentes son senoidales, cuando se desea sólo la solución de estado permanente y cuando todas las fuentes operan a la misma frecuencia. Véanse los siguientes pasos:

- (1) Expresar las ecuaciones de red en forma de transformada y sea $s = j\omega$ en todas las funciones de red. Esta ω es la frecuencia de las fuentes senoidales.
- (2) Todas las fuentes de condiciones iniciales se hacen igual a cero porque las condiciones iniciales no son necesarias para determinar una solución de estado estacionario.³
- (3) Todos los voltajes de fuente se describen en términos de la función coseno:

$$v_i(t) = V_i \cos(\omega t + \phi_i) \quad (12-66)$$

de acuerdo con la cual el fasor es $V_i = V_i e^{j\phi_i}$. Las ecuaciones útiles para cambiar las funciones seno en coseno son:

$$\sin(\omega t + \alpha) = \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) \quad (12-67)$$

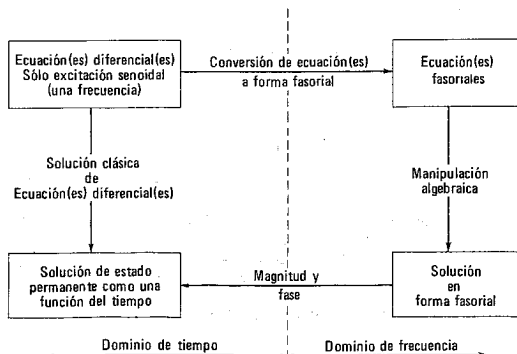


Figura 12-8. Diagrama de flujo que describe el método para determinar la respuesta de estado permanente utilizando fasores.

³ Aquí se supone que todos los polos de la función de red están en la mitad izquierda del plano.

y

$$\cos(\omega t + \beta) = \sin\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right) \quad (12-68)$$

- (4) El sistema de ecuaciones que se obtiene posee la forma de las ecuaciones (12-63) que se pueden resolver por los métodos usuales (por ejemplo, por determinantes) para especificar a I_k .
- (5) El fasor I_k proporciona los datos necesarios de fase y magnitud para que la solución se pueda escribir en el dominio del tiempo como sigue:⁴

$$i_k(t) = I_k \cos(\omega t + \theta_k) \quad (12-69)$$

y la solución está completa.

A continuación se ilustrará la aplicación de estas reglas con varios ejemplos.

EJEMPLO 5

La red de la figura 12-9 se describe mediante la ecuación

$$\mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C = \mathbf{Z}(j\omega)\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1 \quad (12-70)$$

en donde

$$\mathbf{Z}(j\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (12-71)$$

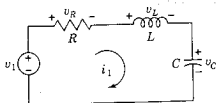


Figura 12-9. Red del ejemplo 5.

Puesto que $v_1 = \cos \omega t$, se tiene que $\mathbf{V}_1 = 1$ y

$$\mathbf{I}_1 = I_1 e^{j\theta_1} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (12-72)$$

De acuerdo con este resultado, se observa que

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (12-73)$$

⁴ Cambiando los pasos 3 y 5, las reglas se pueden escribir de tal modo que la solución se obtenga en términos de la función seno.

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (12-74)$$

Finalmente, la expresión en el dominio del tiempo es

$$i_1(t) = I_1 \cos(\omega t + \theta_1) \quad (12-75)$$

y las ecuaciones (12-73) a (12-75) describen la respuesta de estado permanente.

EJEMPLO 6

Para la red de la figura 12-10 se deberá encontrar i_2 en el estado permanente y $v_1 = \cos 2t$. La impedancia de cada elemento y el fasor de voltaje se ilustran en la figura 12-10(b). Con base en esta figura se pueden escribir las siguientes ecuaciones de malla:

$$\begin{aligned} j1I_1 + j1I_2 &= 1 \\ j1I_1 + (2 - j1)I_2 &= 0 \end{aligned} \quad (12-76)$$

Eliminando I_1 se obtiene

$$I_2 = \frac{1}{-2 + j2} \quad (12-77)$$

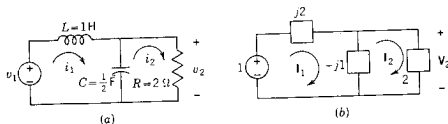


Figura 12-10. (a) La red que se analiza en el ejemplo 6 y (b) una red equivalente de impedancias y funciones de fasor.

De acuerdo con este resultado, es evidente que $I_2 = \sqrt{2}/4$ y que la fase es $-3\pi/4$. En consecuencia, la corriente de estado permanente que se pide es

$$i_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(2t - \frac{3\pi}{4}\right) \quad (12-78)$$

Puesto que los fasores son números complejos, se pueden representar en el plano complejo en la forma polar acostumbrada, por medio de una flecha, donde la longitud corresponde a la magnitud del fasor, y un ángulo con respecto al eje real positivo, que es la fase del fasor. Si las diversas cantidades fasoriales pertenecientes a una red deter-

minada se combinan en tal forma que se ilustre una o las dos leyes de Kirchhoff, la figura resultante se describe como un *diagrama fasorial*. Este tipo de diagramas proporcionan una claridad geométrica en lo que respecta a las relaciones de voltaje y corriente dentro de una red, y son especialmente útiles para visualizar fenómenos de estado permanente tales como la resonancia o para hacer gráficas de magnitud, como se verá un poco más adelante.

Al construir un diagrama fasorial se representa cada voltaje y corriente senoidales por medio de un fasor cuya longitud es igual a la amplitud máxima de la senoide⁵ y con un desplazamiento angular a partir del eje real positivo, que es el ángulo de la función coseno equivalente para $t = 0$. Por supuesto, este uso del coseno es arbitrario y el estudiante no tendrá ninguna dificultad para formular reglas similares en relación con la función seno. En consecuencia, el primer paso consiste en expresar cada voltaje y corriente en términos de una función coseno equivalente. Las ecuaciones útiles para lograr esto son las (12-67) y (12-68).

A continuación se presentan tres ejemplos para ilustrar este método de elaboración de diagramas fasoriales.

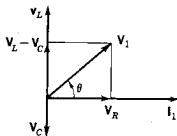


Figura 12-11. Diagrama fasorial completo de la red de la figura 12-9, como se expone en el ejemplo 7.

EJEMPLO 7

Sea una vez más la red ilustrada en la figura 12-9. Puesto que cada uno de los voltajes se expresa en términos de una corriente se tomará a I_1 como *referencia* en el sentido de que se traza con $\theta = 0$ en el plano complejo. Ahora, puesto que $V_R = RI_1$, V_R está en fase con I_1 y se le asigna una longitud arbitraria como se indica en la figura 12-11. De la misma manera, $V_L = j\omega LI_1$ y, por tanto, se representa con $\theta = 90^\circ$, en tanto que $V_C = (1/j\omega C)I_1$ y con $\theta = -90^\circ$. La suma fasorial de los tres voltajes da V_1 , que está desplazando de I_1 por θ , según se ilustra. Se podría haber iniciado la elaboración del diagrama fasorial utilizando cualquier otra referencia, pero el diagrama completo habría sido el mismo en el que aparece en la figura 12-11, excepto porque se habría girado de tal modo que la nueva referencia se encontrara en $\theta = 0$.

EJEMPLO 8

Como segundo ejemplo se construirá el diagrama fasorial para la red que se ilustra en la figura 12-12(a); esta red es la dual de la que se vio en el ejemplo 7. Para dicha red se escoge V como la referencia (puesto que las otras cantidades se relacionan fácilmente con V), y a

⁵ En el capítulo 14 se demuestra que a veces es útil reducir la magnitud en $1/\sqrt{2}$ para obtener valores *efectivos* o *rms*.

continuación se determina cada una de las corrientes. Obsérvese que I_C se adelanta a V en 90° , I_L se atrasa 90° en relación a V e I_R está en fase con V . Como no se asignaron valores específicos, se representa cada fasor mediante una longitud arbitraria y así se construye el diagrama fasorial que se muestra en la figura 12-12(b). La suma fasorial de las tres corrientes da el valor de I .

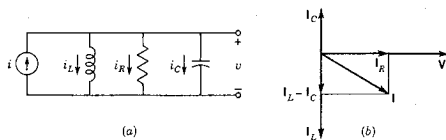


Figura 12-12. Diagrama fasorial completo para la red que se indica.

EJEMPLO 9

Sea la red de la figura 12-10 que se usó anteriormente para el ejemplo 6. Para esta red se selecciona como referencia V_2 , que determina la posición de I_R e I_C , como se indica en la figura 12-13. La suma de estas dos corrientes se designa como I_{RC} , que debe ser la corriente que pasa por el inductor, I_1 . Ahora el voltaje del inductor se adelanta a la corriente en 90° (de acuerdo con la ecuación $V_L = j\omega LI_L$), de manera que tiene la posición que se señala en la figura. Por último, el voltaje aplicado V_1 es la suma fasorial de V_L y V_2 .

Para elaborar este diagrama fasorial se hizo caso omiso de los valores especificados para la red y sólo se trazó con longitudes arbitrarias para cada uno de los fasores. Por supuesto, se puede preparar un diagrama fasorial para igualar los valores específicos del elemento y la fuente, determinando el valor de la magnitud y la fase de cada fasor antes de principiar la preparación del diagrama.

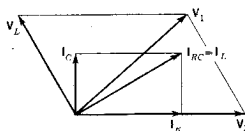


Figura 12-13. Diagrama fasorial completo de la red de la figura 12-10.

BIBLIOGRAFIA

- BALABANIAN, NORMAN, *Fundamentals of Circuit Theory*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1961, capítulo 4.
- CHIRLIAN, PAUL M., *Basic Network Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969, capítulo 6.
- CLOSE, CHARLES M., *The Analysis of Linear Circuits*, Harcourt Brace Jovanovich, Inc., Nueva York, 1966, capítulo 5.
- HUANG, THOMAS y RONALD R. PARKER, *Network Theory: An Introductory Course*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1971, capítulo 10.
- LEON BENJAMIN y PAUL A. WINTZ, *Basic Linear Networks for Electrical and Electronics Engineers*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., Nueva York, 1970, capítulo 4.
- MANNING, LAURENCE A., *Electrical Circuits*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1965, capítulo 6.
- WING, OMAR, *Circuit Theory with Computer Methods*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., Nueva York, 1972, véase el capítulo 7.

EJERCICIOS PARA COMPUTADORA DIGITAL

Este capítulo está dedicado al análisis de las redes que funcionan en estado permanente senoidal. El análisis de grandes sistemas en esta condición es directo, pero tedioso si se hace con papel y lápiz, es muy útil el uso de la computadora. Véanse las referencias citadas en el apéndice E-8.3, en donde se sugieren algunos ejercicios. En particular, véanse los capítulos 9 y 10 de Huelsman, referencia 7 del apéndice E-10, y capítulos 3 y 11 de Ley, referencia 11 del apéndice E-10.

PROBLEMAS

- 12-1. Sea $v(t) = V_1 \cos \omega_1 t$ para la ecuación (12-1). Efectúe la derivación que lleva a un resultado similar a la ecuación (12-9).
- 12-2. Para la forma de onda senoidal de la figura que sigue escriba una ecuación para $v(t)$ empleando valores numéricos para la magnitud, la fase y la frecuencia.

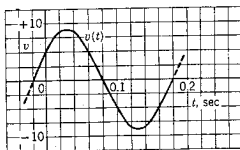


Fig. P12-2.

- 12-3. Principiando con los fasores giratorios $e^{\pm j\omega t}$, utilice una construcción similar a la que se ilustra en las figuras 12-4 y 12-5 para demostrar que

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$$

- 12-4. Se da la ecuación

$$\sin 377t + 3\sqrt{2} \sin\left(377t + \frac{\pi}{4}\right) = A \cos(377t + \theta)$$

Determine A y θ .

12-5. Demuestre que

$$\sum_{k=1}^n A_k \text{sen}(\omega_1 t + \phi_k) = C \text{sen}(\omega_1 t + \theta)$$

En otras palabras, demuestre que la suma de cualquier número de senoídes de amplitud y ángulo de fase arbitrarios, pero teniendo todas la misma frecuencia, es una senoíde de la misma frecuencia.

- 12-6. Utilizando la ecuación del problema 12-5 con $n=2$, determine C y θ en función de A_1 , A_2 , ϕ_1 y ϕ_2 .
- 12-7. Aplicando el método de la sección 12-3, resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales para la solución de estado permanente (denominada integral particular en el capítulo 6):

- (a) $\frac{di}{dt} + 2i = \text{sen } 2t$
- (b) $\frac{di}{dt} + i = \cos 3t$
- (c) $\frac{di}{dt} + 3i = \cos(2t + 45^\circ)$
- (d) $\frac{d^2i}{dt^2} + 2\frac{di}{dt} + i = 5 \text{sen}(2t + 30^\circ)$
- (e) $\frac{d^2i}{dt^2} + i = 2 \text{sen } t$

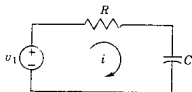


Fig. P12-9.

12-8. Repita el problema 12-7 para las siguientes ecuaciones diferenciales, resolviendo sólo para la solución de estado permanente:

- (a) $\frac{d^2i}{dt^2} + 2\frac{di}{dt} + 2i = 3 \cos(t + 30^\circ)$
- (b) $\frac{d^2i}{dt^2} + 4i = 3 \cos(2t + 45^\circ)$
- (c) $\frac{di}{dt} + 2i = \text{sen } 2t + \cos t$

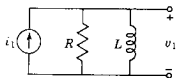


Fig. P12-10.

12-9. La red de la siguiente figura tiene una fuente de voltaje senoidal y funciona en el estado permanente. Utilice el método de la sección 12-3 para determinar la corriente de estado permanente $i(t)$, si $v_1 = 2 \cos 2t$.

12-10. En la red de la figura, $i_1 = 3 \cos(t + 45^\circ)$ y la red opera en el estado permanente. Aplique el método de la sección 12-3 para determinar el voltaje de nodo a referencia $v_1(t)$.

12-11. Para la red que se da a continuación, encuentre $v_a(t)$ en el estado permanente, cuando $v_1 = 2 \text{sen } 2t$. Use el método de la sección 12-3.

12-12. En la red resistiva que se muestra en la siguiente figura, $v_1 = 2 \text{sen}(2t + 45^\circ)$ para todos los valores de t . (a) Determine $i_a(t)$. (b) Determine $i_b(t)$.

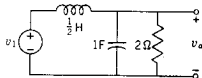


Fig. P12-11.

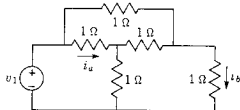


Fig. P12-12.

- 12-13. La red que se muestra a continuación opera en estado permanente con fuentes de voltaje senoidales. Si $v_1 = 2 \cos 2t$ y $v_2 = 2 \sin 2t$, determine el voltaje $v_a(t)$.

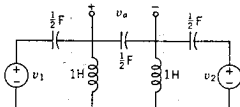


Fig. P12-13.

- 12-14. La red con acoplamiento inductivo de la figura siguiente opera en el estado permanente senoidal con $v_1(t) = 2 \cos t$. Si $L_1 = L_2 = 1$ H, $M = 1/4$ H y $C = 1$ F, determine el voltaje $v_a(t)$.

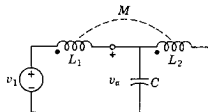


Fig. P12-14.

- 12-15. La red de la figura que se ilustra a continuación opera en estado senoidal permanente. En dicha red se ha determinado que $v_a = 10 \sin(1000t + 60^\circ)$ y $v_b = 5 \sin(1000t - 45^\circ)$. La magnitud de la impedancia del capacitor es 10 ohms. Determine la impedancia en las terminales de entrada de la red N .

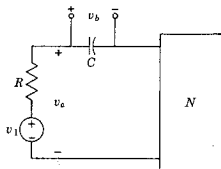


Fig. P12-15.

- 12-16. En la red siguiente, $v_1 = 10 \sin 10^6 t$ e $i_1 = 10 \cos 10^6 t$, y opera en estado permanente. Para los valores de elemento que se dan determine el voltaje de nodo a referencia $v_a(t)$.

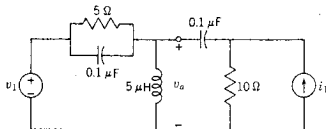


Fig. P12-16.

- 12-17. Para la red de T puenteada de la siguiente figura, $v_1 = 2 \cos t$ y el sistema se encuentra en estado permanente. Para esta red, (a) determine $i_a(t)$ y (b) determine $i_b(t)$.

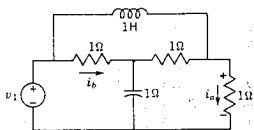


Fig. P12-17.

- 12-18. La red de la figura opera en estado estacionario con $v_1 = 2 \text{ sen } 2t$ y $K_1 = -1/3$. En estas condiciones, determine $i_2(t)$.

La siguiente serie de problemas tiene por objeto adquirir práctica en la construcción de diagramas fasoriales. La red que se ilustra en la figura del problema 12-19 opera en estado senoidal permanente. En los valores de elemento que se dan en la tabla que sigue se observa una doble entrada en la columna uno, lo cual implica una conexión en serie y, en la columna 2, una conexión en paralelo. Para cada problema, (a) determine $v_1(t)$. (b) Dibuje un diagrama fasorial completo indicando todos los voltajes y todas las corrientes, al igual que todas las relaciones entre unos y otras.

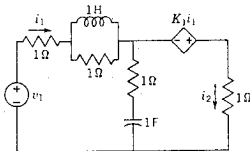


Fig. P12-18.

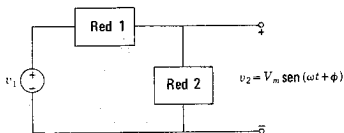


Fig. P12-19.

	Red 1	Red 2	V_m	ω	ϕ
12-19.	$R = 1$	$C = 2$	2	$\frac{1}{2}$	-30°
12-20.	$R = 2$	$C = 1$	10	2	45°
12-21.	$R = 20$	$C = \frac{1}{2}$	1	0.1	0°
12-22.	$R = 2$	$L = 2$	100	$\frac{1}{2}$	30°
12-23.	$L = \frac{1}{2}$	$R = 1$	10	$\frac{1}{2}$	0°
12-24.	$C = 2$	$R = 2$	3	1	45°

	Red 1	Red 2	V_m	ω	ϕ
12-25.	$L = 3$	$C = 1$	10	$\frac{1}{2}$	-45°
12-26.	$C = 1$	$L = \frac{1}{2}$	1	2	0°
12-27.	$R = 1, C = 1$	$L = 2$	2	1	30°
12-28.	$R = 1, L = 2$	$C = \frac{1}{2}$	2	1	45°
12-29.	$L = 1, C = 2$	$R = 1$	10	$\frac{1}{2}$	0°
12-30.	$R = 1, C = 1$	$R = 1, L = 2$	10	1	90°
12-31.	$R = 3, L = 2$	$R = 1, C = \frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0°
12-32.	$L = 1, C = 2$	$R = 1, C = 1$	100	1	-90°
12-33.	$L = 1, C = 2$	$R = 1, L = 2$	1	1	0°

- 12-34. La red de la figura que sigue, funciona en el estado senoidal permanente y se sabe que $v_3 = 2 \text{ sen } 2t$. Para los valores de elemento que se dan determine $V_2/V_1 = A e^{j\phi}$.

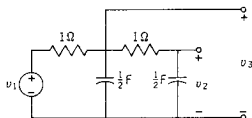


Fig. P12-34.

- 12-35. La red que se ilustra a continuación se ajusta de tal modo que $R_L = R_C = \sqrt{L/C}$. (a) Dibuje un diagrama fasorial completo indicando todos los voltajes y todas las corrientes (así como sus relaciones entre sí) para la condición $|V_L| = |V_C|$. (b) Sea ω_1 la frecuencia para la condición de la parte (a). Dibuje un diagrama fasorial para la frecuencia $\omega_2 > \omega_1$. (c) Repita la parte (b) para una frecuencia $\omega_3 < \omega_1$.

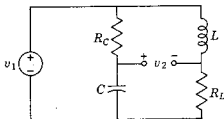


Fig. P12-35.

- 12-36. La red de la figura se ajusta de tal manera que $R_1 C_1 = R_2 C_2 = T$. Sea ϕ el ángulo de fase de v_2 con respecto a v_1 . (a) Demuestre la forma en que ϕ varía en función de T . (b) Para un valor fijo de T , demuestre cómo varía ϕ en función de ω . (c) Para un valor fijo de T , demuestre cómo se relaciona la amplitud máxima de v_2 con la amplitud máxima de v_1 , como una función de ω .

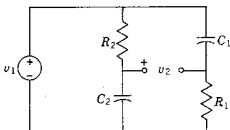


Fig. P12-36.

CAPITULO 13

13 Gráficas de la respuesta de frecuencia

13.1. PARTES DE LAS FUNCIONES DE RED

En este capítulo el estudio se circunscribe a las funciones de red que describen a las redes en el estado permanente senoidal con $s = j\omega$. Sea $G(s)$ cualquier función de red, ya sea de punto impulsor o de transferencia. Ahora, $G(j\omega)$ es una función compleja que se puede expresar en coordenadas rectangulares como sigue:

$$G(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad (13-1)$$

o bien en la forma polar¹

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi(\omega)} \quad (13-2)$$

En este caso $R(\omega) = \text{Re } G(j\omega)$ es la *parte real* de la función de red, $X(\omega) = \text{Im } G(j\omega)$ es la *parte imaginaria*, $|G(j\omega)|$ es la *magnitud* y $\phi(\omega)$ es la *fase*. Las partes de las ecuaciones (13-1) y (13-2) se relacionan mediante las ecuaciones²

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \quad (13-3)$$

y

$$|G(j\omega)| = \sqrt{[R(\omega)]^2 + [X(\omega)]^2} \quad (13-4)$$

¹ Una notación abreviada útil de esta ecuación es $|G(j\omega)|/\phi(\omega)$.

² Por supuesto, existen otras relaciones de las cuatro partes: si se da cualquiera de las partes, las otras tres se pueden determinar analíticamente. Véase el capítulo 8 de la obra de este autor, *Introduction to Modern Network Synthesis* (John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1960).

Estas partes de las funciones de red son importantes en el diseño de redes por dos razones: (1) como se verá más adelante, en el capítulo 14, las especificaciones a partir de las cuales se diseñan las redes casi siempre se dan en términos de magnitud y fase y con menos frecuencia en función de las partes real e imaginaria. (2) Las mediciones de estas partes de las funciones de red se efectúan con facilidad si se emplean instrumentos estándar tales como el osciloscopio de rayos catódicos, una combinación de voltímetro, amperímetro y vatímetro, el puente o el medidor de Q . Aunque en este caso el interés se centra en los métodos analíticos para facilitar la determinación de las partes de $G(j\omega)$, se debe tener en cuenta que tal vez haya que comprobar los resultados en el laboratorio y hacerlo en forma rápida y adecuada, usando instrumentos sencillos.

La función general de red de los capítulos anteriores se convierte en la siguiente expresión para $s = j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n}{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m} \quad (13-5)$$

o bien

$$G(j\omega) = \frac{a_0(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \dots (j\omega - z_n)}{b_0(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_m)} \quad (13-6)$$

Para valores específicos de los coeficientes a y b o de los polos y ceros se desea computar funciones de red para todos los valores de ω . Se encontrará que por lo general este procedimiento es tedioso. Por fortuna, en muchos casos se puede evitar gran cantidad de trabajo aplicando los métodos que se verán en este capítulo.

13-2. GRÁFICAS DE MAGNITUD Y FASE

Existen varias posibilidades de uso de coordenadas para las gráficas de respuesta de frecuencia. La variable independiente es siempre de frecuencia, ω —de otra manera, la gráfica no sería la de una respuesta de frecuencia—, pero la variable dependiente puede ser cualquiera de las partes que se vieron en la sección anterior, o bien pueden ser dos de las partes asociadas, magnitud y fase, en la interpretación en coordenadas polares, tomando la frecuencia como parámetro. La última posibilidad se estudiará en la siguiente sección que se titula “Lugares geométricos complejos”. El uso de coordenadas logarítmicas en las gráficas de magnitud y fase se analizará también por separado en la sección 13-5 que corresponde a las gráficas de Bode. Aquí se verán algunas características importantes de la aplicación de las coordenadas lineales en gráficas de magnitud y fase con la frecuencia.

Se acostumbra utilizar el rango de frecuencias de 0 a ∞ , en vez de $-\infty$ a ∞ . Esta es una elección natural, ya que los generadores de

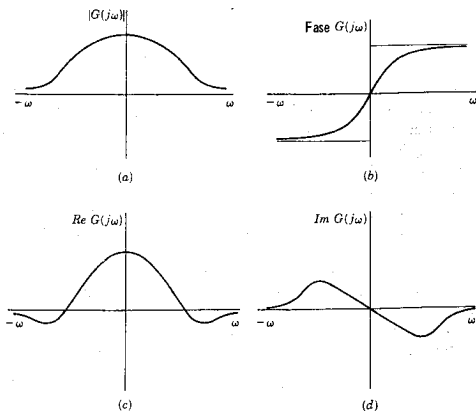


Figura 13-1. Cuatro partes de una función de red para $s = j\omega$, (a) la magnitud, (b) la fase, (c) la parte real y (d) la parte imaginaria.

laboratorio de ondas senoidales producen sólo ω positivas. Además, la información para la frecuencia negativa es redundante porque la magnitud y la parte real son funciones pares, en tanto que la fase y la parte imaginaria son funciones impares de ω , como se ilustra en la figura 13-1. Se debe observar que para algunos fines, de los cuales la aplicación del criterio de Nyquist³ es un ejemplo, es necesario emplear el rango completo de los valores de ω . Finalmente, se debe indicar que, en comparación con las gráficas de magnitud y fase, en la práctica de la ingeniería se hace poco uso de la parte real o imaginaria de la respuesta de frecuencia y, por esta razón, no se estudiará aquí este tipo de gráficas.

EJEMPLO 1

En la figura 13-2 se muestra una red RC de dos puertos para la que la función de transferencia de la relación de voltajes es

$$G_{12}(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{RCs + 1} \quad (13-7)$$

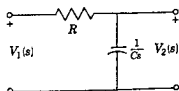


Figura 13-2. Red del ejemplo 1.

³ H. Nyquist, "Regeneration Theory", *Bell System Tech. J.*, 11, 126-147 (1932).

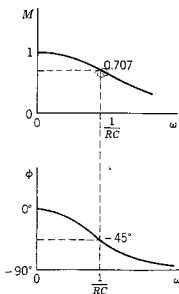


Figura 13-3. Variación de magnitud y fase para la función de transferencia G_{12} de la red de la figura 13-2.

Para el estado senoidal permanente, G_{12} se convierte en

$$G_{12}(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1} = \frac{1/RC}{j\omega + (1/RC)} \quad (13-8)$$

Los valores asintóticos de magnitud y fase se pueden determinar examinando la ecuación (13-8). Para un valor pequeño de ω , la magnitud es aproximadamente 1 y la fase es 0° . Para valores grandes de ω , la magnitud se acerca a 0 en tanto que la fase se hace casi -90° . Para la frecuencia, $\omega = 1/RC$, la magnitud y la fase son especialmente fáciles de determinar, siendo los valores $1/\sqrt{2} \approx 0.707$ y -45° . Si se seleccionan otros valores de ω se puede trazar las curvas de respuesta de magnitud y fase que aparecen en la figura 13-3, en donde se ha hecho $M = |G_{12}(j\omega)|$ para mayor facilidad.

Para estudiar el significado de la frecuencia $\omega = 1/RC$ en el ejemplo 1 se hará aquí una pequeña digresión para considerar la red de la figura 13-2 como de un solo puerto, excitada por una fuente de voltaje y para la que el fasor corriente es $I = YV$ y la magnitud de la corriente es

$$|I(j\omega)| = |Y(j\omega)| |V(j\omega)| \quad (13-9)$$

En el capítulo 14 se demostrará que la potencia media en el resistor de la combinación RC es

$$P = \frac{1}{2} |I(j\omega)|^2 R \quad (13-10)$$

Sea ω_{hp} la frecuencia a la que $|I| = (1/\sqrt{2})|I|_{\text{máx}}$. Por supuesto, ésta será la frecuencia a la que la admitancia es $1/\sqrt{2}$ veces su valor máximo, ya que de acuerdo con la ecuación (13-9) se observa que $|I|$ varía directamente en función de $|Y|$ cuando $|V|$ es constante. Sea P_1 la máxima potencia dada por la ecuación (13-10). A la frecuencia ω_{hp} la potencia media del resistor es

$$P_2 = \frac{1}{2} \left| \frac{I(j\omega)}{\sqrt{2}} \right|^2 R = \frac{1}{2} P_1 \quad (13-11)$$

indicando que a esta frecuencia la potencia en el resistor es la mitad de su valor máximo. La frecuencia ω_{hp} se conoce con el nombre de *frecuencia de media potencia*. El nombre se aplica a la frecuencia a la que cualquier magnitud de una función de red, ya sea de punto impulsor o de transferencia, se reduce a 0.707 de su valor máximo.

Volviendo ahora a la ecuación (13-7), se observa que (1) la frecuencia $\omega = 1/RC$ es la frecuencia de media potencia de la gráfica de respuesta de frecuencia y (2) $1/RC$ es la recíproca de la constante de tiempo T de la red (por ejemplo, a una entrada escalón), y que la ubicación del polo dentro del plano s , tiene signo negativo, $\sigma = -1/RC$. Por tanto, se tiene una conexión simple entre los dos tipos de respuesta para esta red, que se resume en la expresión $T = 1/\omega_{hp}$.

Lugares geométricos complejos 427

Ahora, las ecuaciones del tipo de la expresión (13-7) describen un cierto número de redes RC o RL de dos elementos. Para dichas redes, la ecuación (13-8) se puede expresar en la forma estándar

$$G_{12}(j\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_{hp})} \quad (13-12)$$

y para esta expresión se puede preparar una gráfica universal de la magnitud y de la fase. Esto se hará en la sección 13-5 en coordenadas logarítmicas.

13-3. LUGARES GEOMETRICOS COMPLEJOS

Si se da una función de red $G(j\omega)$ que tiene la forma general de la ecuación (13-5) o (13-6) se pueden determinar las partes reales e imaginarias identificadas por la ecuación (13-1), o la magnitud y la fase de la ecuación (13-2), en función de ω . Al variar ésta, un punto que representa a $G(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ se desplaza sobre el plano complejo $G(j\omega)$ y se dice que describe un *lugar geométrico*. Un lugar geométrico es la gráfica en coordenadas rectangulares de $G(j\omega)$, $R(\omega)$ y $X(\omega)$, o en coordenadas polares $M(\omega)$ y $\phi(\omega)$ —sólo una gráfica, pero dos interpretaciones— siendo ω el parámetro. En la figura 13-4 se presentan algunas de las características de estos lugares geométricos. Cada punto del lugar geométrico se puede considerar como un fasor que se extiende desde el origen hasta el punto, con una magnitud M y un ángulo ϕ , y el lugar geométrico es, simplemente, la trayectoria de las "puntas" de los fasores.

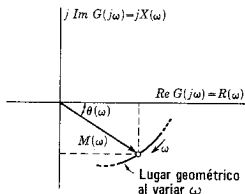


Figura 13-4. El lugar geométrico de la punta del fasor de magnitud M y fase θ conforme varía ω .

Es evidente que los lugares geométricos complejos que se acaban de describir incluyen todos los datos de las gráficas de magnitud y fase de la sección anterior, pero nada más. Siendo éste el caso, conviene señalar aquí que existen varias razones por las que se prefiere usar un método y no el otro. La gráfica de lugares geométricos puede ser una forma más eficiente o explícita de representar la información. Además, estos lugares geométricos complejos se utilizan para aplicar el criterio

de Nyquist que se verá en la sección 13-6. A continuación se demostrará el trazo de los lugares geométricos complejos por medio de varios ejemplos.

EJEMPLO 2

Como primer ejemplo, véase la red que se usó en el ejemplo 1, la que aparece en la figura 13-2. Para $G_{12}(j\omega)$ de la ecuación (13-8), el lugar geométrico es el que se indica en la figura 13-5, que se inicia en $1 + j0$ para $\omega = 0$ y traza un lugar geométrico semicircular hasta el origen, conforme ω tiende a ∞ . El hecho de que el lugar geométrico sea una circunferencia se puede ver racionalizando la ecuación (13-11) para obtener:

$$\text{Re } G_{12} + j \text{Im } G_{12} = \frac{1}{1 + R^2 C^2 \omega^2} - j \frac{RC\omega}{1 + R^2 C^2 \omega^2} \quad (13-13)$$

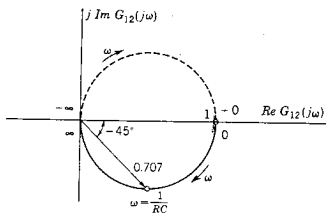


Figura 13-5. Gráfica del lugar geométrico de la red de la figura 13-2; la línea continua que corresponde a $\omega > 0$. El lugar geométrico completo es una circunferencia de radio $1/2$.

Eliminando el parámetro ω , se obtiene la siguiente relación entre $\text{Re } G_{12}$ e $\text{Im } G_{12}$:

$$(\text{Re } G_{12} - \frac{1}{2})^2 + (\text{Im } G_{12})^2 = (\frac{1}{2})^2 \quad (13-14)$$

que es la ecuación de una circunferencia de radio $1/2$ y cuyo centro está en $\text{Re } G_{12} = 1/2$, $\text{Im } G_{12} = 0$. La mitad superior de la circunferencia de la figura 13-5 se obtiene para frecuencias negativas. Obsérvese que el lugar geométrico para frecuencias negativas es la *imagen* de las frecuencias positivas, ya que la parte real tiene una simetría par y la imaginaria una simetría impar. Se seguirá la práctica de señalar con línea punteada el lugar geométrico, para la frecuencia negativa.

EJEMPLO 3

Si se intercambian el resistor y el capacitor de la red RC del ejemplo 2, la red de dos puertos resultante, que se ilustra en la figura 13-6, tiene la función de transferencia

$$G_{12}(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + (1/RC)} \quad (13-15)$$

Siguiendo el mismo procedimiento del ejemplo 1, se determinan los siguientes puntos del lugar geométrico:

ω	$G_{12}(j\omega)$
0	0 a $+90^\circ$
$1/RC$	0.707 a $+45^\circ$
∞	1 a 0°

El lugar geométrico completo se muestra en la figura 13-7, junto con las gráficas equivalentes de $M(\omega)$ y de $\phi(\omega)$.

Comparando los resultados de los ejemplos 1 y 3 se observa que la red de la figura 13-2 tiene una salida en la que la fase se atrasa en

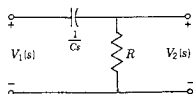


Figura 13-6. Red RC del ejemplo 3.

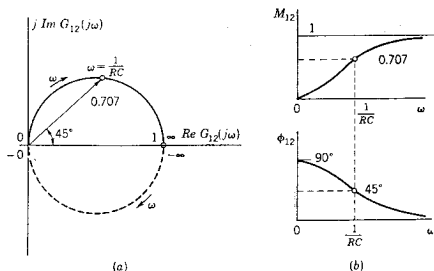


Figura 13-7. Gráfica del lugar geométrico de la función de transferencia G_{12} de la red de la figura 13-6 y las gráficas correspondientes de magnitud y fase.

relación con la de la entrada para todos los valores de ω , en tanto que en la red de la figura 13-6 la fase del voltaje de salida se adelanta a la de la entrada a todas las frecuencias. En algunas aplicaciones estas redes se denominan redes de atraso y redes de adelanto, respectivamente. Las variaciones de magnitud de los dos $G_{12}(j\omega)$ en función de ω son inversas; para una magnitud constante del voltaje de entrada, el

voltaje de salida de la red de la figura 13-2 disminuye con la frecuencia y para el de la figura 13-6 aumenta al incrementarse la frecuencia.

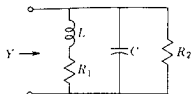


Figura 13-8. Red que se analiza en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4

El siguiente ejemplo muestra que, en algunos casos de estructuras de redes, se pueden combinar sublugares geométricos para partes de la red, a fin de determinar un lugar geométrico compuesto para la red completa. Sea la red que se ilustra en la figura 13-8. Esta red se puede considerar compuesta de tres subredes: R_1L , C , y R_2 . Tales subredes están conectadas en paralelo por lo que las admitancias se pueden sumar para determinar la admitancia de punto impulsor; por tanto,

$$Y(j\omega) = Y_{RL}(j\omega) + Y_C(j\omega) + Y_R(j\omega) \quad (13-16)$$

Los lugares geométricos de estas tres funciones se puede sumar punto por punto (una suma fasorial) para dar el lugar geométrico compuesto para $Y(j\omega)$. Para la primera subred,

$$Y_{RL}(j\omega) = \frac{1/L}{j\omega + (R_1/L)} \quad (13-17)$$

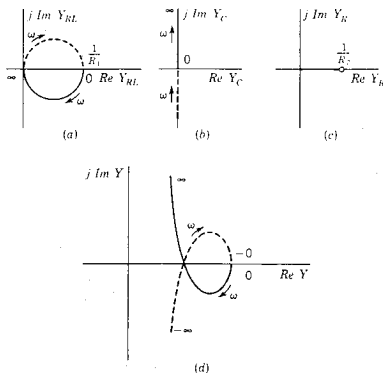


Figura 13-9. Gráficas individuales de lugares geométricos de (a) la rama R_1L , (b) la rama C , (c) la rama R_2 (el lugar geométrico es un solo punto) y (d) el lugar geométrico completo de Y que se encuentra sumando los lugares geométricos de las tres ramas paralelas.

lo cual significa que el lugar geométrico de Y_{RL} es el de la figura 13-5, excepto por la escala y la frecuencia de media potencia, y se ilustra en (a) de la figura 13-9. Ahora, $Y_C = j\omega C$, de tal manera que el lugar geométrico queda confinado al eje imaginario, en tanto que $Y_R = 1/R_2$, que no varía con la frecuencia. Estos lugares geométricos se ilustran en (b) y (c) de la figura 13-9. El lugar geométrico compuesto para la red de la figura 13-8 se muestra en la figura 13-9(d) para un conjunto de valores de elementos.

El método de este ejemplo se aplica cuando la immitancia de punto impulsor se puede expresar como suma de admitancias o de impedancias. Para redes más complejas, también puede ser necesario calcular $G_{12}(j\omega)$ para un cierto número de valores de ω , utilizando suficientes valores de ω , de tal modo que se pueda obtener con precisión la gráfica del lugar geométrico.

13-4. GRÁFICAS A PARTIR DE FASORES EN EL PLANO s

Cualquier función de red $G(s)$ tiene la forma de un cociente de polinomios, cada uno de los cuales se puede expresar como el producto de factores de la forma

$$(s - s_r) \quad (13-18)$$

en donde s_r es o bien un polo o un cero. En el estado senoidal permanente, $s = j\omega$ y el factor típico se convierte en

$$(j\omega - s_r) \quad (13-19)$$

En el plano s , cada uno de los términos $j\omega$ y s_r son fasores y, en este caso, el interés se enfoca en la *diferencia* de estos dos fasores, la cual es también un fasor. En general, s_r es complejo en tanto que $j\omega$ es imaginario. Los dos fasores y su diferencia se ilustran en la figura 13-10. En (a) de esta figura se observan los fasores componentes y su suma; en (b) de la figura 13-10 se presenta un diagrama fasorial *poligonal* que es más apropiado para las necesidades presentes. La diferencia fasorial ($j\omega - s_r$) es un fasor dirigido de s_r a $j\omega$. Ahora, conforme aumenta la frecuencia, el fasor ($j\omega - s_r$) cambia en longitud y en ángulo. Si una función de red incluye varios factores de este índole, algunos en el numerador y otros en el denominador, la variación de los factores individuales, cada uno de los cuales cambia de una manera determinada por la posición de s_r con respecto al eje imaginario.

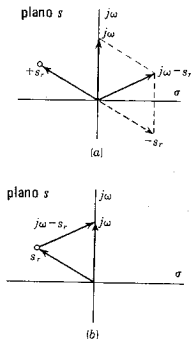


Figura 13-10. (a) Trazo y (b) sentido del fasor ($j\omega - s_r$), que es de s_r a $j\omega$.

EJEMPLO 5

Para ilustrar el uso de fasores en el plano s al determinar la variación de magnitud y de fase en función de ω , considérese la admitancia de un circuito RL en serie, que es

$$Y(s) = \frac{1}{L} \frac{1}{[s + (R/L)]} \quad (13-20)$$

Esta admitancia tiene un polo en $s = -R/L$ y un cero en ∞ . El trazo del fasor $[j\omega - (-R/L)]$ con respecto a esta ubicación de los polos se ilustra en la figura 13-11. En la figura 13-12 se ilustran 3 posiciones del fasor cuando la frecuencia aumenta de ω_1 a ω_2 a ω_3 . Sea

$$L \left(j\omega + \frac{R}{L} \right) = M(\omega) e^{j\phi(\omega)} \quad (13-21)$$

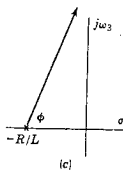
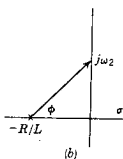
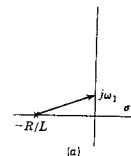


Figura 13-12. Ilustración del cambio en la longitud del fasor conforme aumenta ω , donde $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$. La variación de $Y(j\omega)$ se determina a partir de la ecuación (13-22).

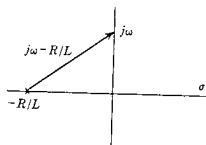


Figura 13-11. Representación fasorial de $(j\omega + R/L)$.

Entonces, la admitancia se puede determinar a partir de la ecuación

$$Y(j\omega) = \frac{1}{M(\omega)} e^{-j\phi(\omega)} \quad (13-22)$$

Se observa claramente que la magnitud varía de $1/R$ a 0 conforme ω varía de 0 a ∞ ; de la misma manera, la fase cambia de 0° a -90° conforme ω varía de 0 a ∞ . La representación del lugar geométrico complejo de esta variación se ilustra en la figura 13-13.

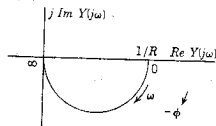


Figura 13-13. El lugar geométrico complejo de $Y(j\omega)$ para valores que se obtienen de acuerdo con la técnica que se ilustra en la figura 13-12.

EJEMPLO 6

Véase el siguiente circuito RLC en serie, que tiene la impedancia de punto impulsor

$$Z(s) = Ls + R + \frac{1}{Cs} \quad (13-23)$$

y la admitancia es la recíproca de $Z(s)$; es decir,

$$Y(s) = \frac{1}{L} \left[\frac{s}{s^2 + (Rs/L) + (1/LC)} \right] \quad (13-24)$$

o bien

$$Y(s) = \frac{1}{L} \left[\frac{s}{(s - s_a)(s - s_a^*)} \right] \quad (13-25)$$

en donde

$$s_a, s_a^* = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (13-26)$$

En esta ecuación se siguieron las convenciones del capítulo 6, en donde ω_n es la frecuencia natural de la red y ζ es la relación de amortiguamiento. En este ejemplo se considera sólo el caso oscilatorio con $\zeta < 1$. Para este caso, los polos se localizan sobre un círculo de radio ω_n y una línea que va del polo al origen establece un ángulo $\theta = \cos^{-1}\zeta$ con el eje real negativo. Como se ilustra en la figura 13-14, existe un solo cero que se localiza en el origen.

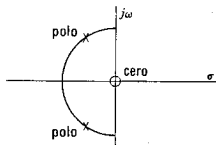


Figura 13-14. Los polos y el cero de $Y(s)$ dados por la ecuación 13-24.

La respuesta de frecuencia se determina haciendo que ω tome varios valores, cuatro de los cuales se muestran en la figura 13-15. La magnitud y la fase se calculan expresando cada factor de la ecuación (13-25) en la forma de la ecuación (13-22), o sea

$$Y(j\omega) = \frac{M_0}{M_a M_a^*} e^{j(\phi_0 - \phi_a - \phi_a^*)} \quad (13-27)$$

Es evidente que el valor máximo de $|Y(j\omega)|$ se produce cerca de la frecuencia a la que M_a tiene un valor mínimo. La frecuencia que hace que M_a tenga un valor mínimo es aquella en el punto de mayor

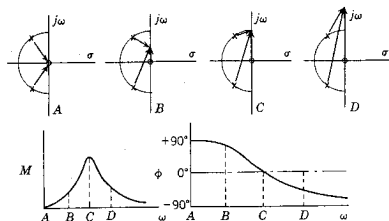


Figura 13-15. Fasores que determinan la respuesta de frecuencia, ilustrados para cuatro valores distintos de ω .

acercamiento a uno de los polos conjugados. En ese rango de frecuencias, M_a cambia con gran rapidez y, al mismo tiempo, M_a^* y M_0 cambian con lentitud. La frecuencia correspondiente a $|Y(j\omega)|$ máxima se define como la *frecuencia de resonancia*. Puesto que $I(j\omega)$ varía directamente con $Y(j\omega)$, la frecuencia de resonancia es también la frecuencia para máxima $I(j\omega)$.

La magnitud de $Y(j\omega)$ se puede expresar en la forma

$$|Y(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + [\omega L - (1/\omega C)]^2}} \quad (13-28)$$

y, de acuerdo con esta ecuación, es evidente que $|Y(j\omega)|$ tiene un valor máximo de $(1/R)$ cuando

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \text{ó} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_n \quad (13-29)$$

es decir, la resonancia se produce a $\omega = \omega_n$ (y no en el punto opuesto al polo sobre el eje $j\omega$). En la figura 13-16 se muestra una ampliación de los diferentes fasores para la condición de resonancia. Los ángulos de fase de los polos a $j\omega_n$ se identifican como ϕ_a y ϕ_a^* . El fasor de 0 a $j\omega_n$ se encuentra a lo largo del eje $j\omega$ y, por tanto, tiene un ángulo de fase constante de $+90^\circ$. La suma de ϕ_a y ϕ_a^* es igual a 90° porque el triángulo ABC es rectángulo (ya que está inscrito dentro de un semicírculo). El ángulo total de fase, que es

$$\phi_0 - \phi_a - \phi_a^* = +90^\circ - (+90^\circ) = 0^\circ \quad (13-30)$$

tiene, por ende, un valor cero. El ángulo de fase de $Y(j\omega)$ es 0° en resonancia. La magnitud de $Y(j\omega)$ en resonancia es $1/R$ y $I(j\omega)$ en resonancia es V/R .

El valor Q del circuito o, simplemente Q , de un circuito RLC en serie, se define como

$$Q = \frac{\omega_n L}{R} = \frac{1}{2} \frac{\omega_n}{R/2L} \quad (13-31)$$

Ahora, la cantidad $R/2L$ es la misma que $\zeta\omega_n$ de acuerdo con la ecuación (13-26). Por tanto, la Q del circuito se define como

$$Q = \frac{1}{2} \frac{\omega_n}{\zeta\omega_n} = \frac{1}{2} \times \frac{\text{la longitud } OA}{\text{la longitud } EB} \quad (13-32)$$

en función de las cantidades que se indican en la figura 13-16. En consecuencia, la Q del circuito se puede tomar directamente de la gráfica a escala de los polos y ceros de la función de immitancia correspondiente a un circuito RLC . Es posible escribir la Q del circuito en cualquiera de las dos formas siguientes:

$$Q = \frac{1}{2\zeta} \quad (13-33)$$

$$= \frac{1}{2 \cos \theta} \quad (13-34)$$

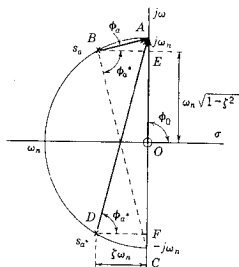


Figura 13-16. Fasores trazados para la condición especial de resonancia.

en donde θ es el ángulo que forma con el eje $-\sigma$ la línea OB (u OD) de la figura 13-16. De acuerdo con estas tres últimas ecuaciones, se pueden derivar dos conclusiones, que son:

- (1) Mientras más cerca estén los polos s_a y s_a^* del eje $j\omega$, tanto mayor será el valor de Q . (Esto se infiere, ya que Q varía inversamente con la distancia EB .)
- (2) El valor de Q varía inversamente con la relación de amortiguamiento ζ . A un elevado valor de Q corresponde un valor reducido de la relación de amortiguamiento. En consecuencia, un circuito RLC en serie, con R pequeña tiene una Q elevada.

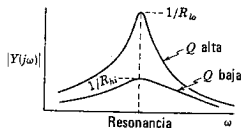


Figura 13-17. Forma general de la respuesta $|Y(j\omega)|$ para valores grandes y pequeños de Q .

En la figura 13-17 se ilustran varias gráficas de la magnitud de $Y(j\omega)$ para algunos valores de Q .

Otra forma de indicar el valor Q de un circuito es por medio de las frecuencias de *media potencia*. La corriente a la frecuencia de resonancia tiene la magnitud V/R . Cuando la corriente tiene la magnitud

$$I = \frac{V}{\sqrt{2}R} \quad (13-35)$$

la potencia es *la mitad* de la de resonancia. A las frecuencias de media potencia, la magnitud de la admitancia $Y(j\omega)$ es $(1/\sqrt{2}R)$; esto requiere que

$$\sqrt{R^2 + [\omega L - (1/\omega C)]^2} = \sqrt{2}R \quad (13-36)$$

o bien

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \pm R \quad (13-37)$$

Dicha ecuación se reduce a la forma

$$\omega^2 \pm \frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0 \quad (13-38)$$

Los valores de ω que satisfacen esta ecuación son

$$\omega = \pm \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + (1/LC)} \quad (13-39)$$

o bien, en términos de la relación de amortiguamiento y la frecuencia natural no amortiguada,

$$\omega = \omega_n(\pm \zeta \pm \sqrt{\zeta^2 + 1}) \quad (13-40)$$

Sean los dos valores positivos de la frecuencia dados por la ecuación (13-40), ω_1 y ω_2 .

$$\omega_1, \omega_2 = \omega_n(\sqrt{\zeta^2 + 1} \pm \zeta) \quad (13-41)$$

De la ecuación (13-41) se derivan sencillamente dos resultados importantes. En primer lugar, el producto

$$\omega_1\omega_2 = \omega_n^2 \quad (13-42)$$

que significa que ω_n es la media geométrica de las dos frecuencias ω_1 y ω_2 . La diferencia de estas dos frecuencias se define como el ancho de banda B , que es

$$B = \omega_2 - \omega_1 = 2\omega_n \zeta = \frac{\omega_n}{Q} \quad (13-43)$$

o sea que el ancho de banda varía inversamente con el valor Q del circuito.

En muchas redes que se utilizan como *selectores* es muy pequeña la relación de amortiguamiento ζ , de tal manera que ζ^2 es despreciable en comparación con 1. Tomando como base esta suposición, las dos frecuencias de media potencia son

$$\omega_2 = \omega_n + \zeta\omega_n \quad (13-44)$$

y

$$\omega_1 = \omega_n - \zeta\omega_n \quad (13-45)$$

La cantidad $(\zeta\omega_n)$ es la distancia EB de la figura 13-16 o la distancia del eje $j\omega$ al polo s_a (o s_a^*). La ubicación de las frecuencias de media potencia se ilustra en la figura 13-18: un círculo de radio $\zeta\omega_n$ con centro en $0 + j\omega_n$ cruza el eje imaginario a las frecuencias de media potencia. Como lo identifica la ecuación (13-43), este rango de frecuencias es el ancho de banda.

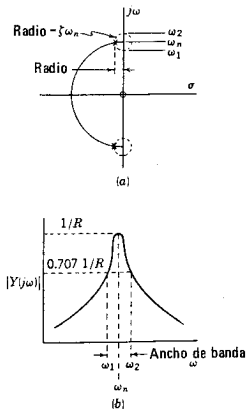


Figura 13-18. El ancho de banda queda definido por el intervalo de frecuencia, $\omega_2 - \omega_1$, y también por una circunferencia de radio $\zeta\omega_n$, para el caso de Q elevada, como se ilustra en la figura.

EJEMPLO 7

El último ejemplo de esta sección se escogió para demostrar algo nuevo en relación con las gráficas de lugares geométricos complejos. La red que aparece en la figura 13-19(a) se conoce con el nombre de *celosía simétrica*. Algunas de las propiedades de este tipo particular de celosía se vieron ya en el capítulo 10. Para el presente estudio se observa que, por medio de análisis de rutina, la función de transferencia de relación de voltaje tiene la forma

$$G_{12}(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{s^2 - s + 1}{s^2 + s + 1} = \frac{(s - s_1)(s - s_1^*)}{(s - s_a)(s - s_a^*)} \quad (13-46)$$

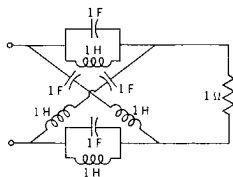
Los dos ceros tienen los valores siguientes:

$$s_1, s_1^* = +\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (13-47)$$

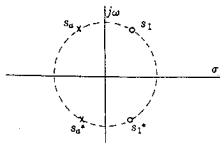
y los polos se localizan en

$$s_a, s_a^* = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (13-48)$$

Estos polos y ceros se ilustran en la figura 13-19(b), y en este ejemplo están ubicados sobre un círculo unitario y se localizan simétricamente con respecto tanto al eje real como al imaginario. Se dice que los polos y los ceros ubicados de esta manera forman un *quad*.



(a)



(b)

Figura 13-19. (a) Celosía simétrica y (b) los polos y los ceros de G_{12} para esta red. Estos dos polos y dos ceros constituyen un *quad*.

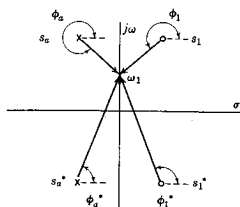


Figura 13-20. Fasores usados para determinar la respuesta de magnitud y fase de G_{12} para la red de la figura 13-19(a).

Los miembros del quad de la mitad izquierda del plano son los polos y los miembros de la mitad derecha del plano son los ceros.

Como se indicó en ejemplos anteriores de esta sección, la respuesta de frecuencia se puede encontrar mediante fasores que se trazan desde los polos y los ceros a diferentes puntos sobre el eje imaginario, según se muestra en la figura 13-20. De acuerdo con esta figura, se observa que la magnitud de $(j\omega - s_1)$ es siempre igual a la magnitud de $(j\omega - s_a)$; de igual manera, la magnitud de $(j\omega - s_1^*)$ es siempre igual a la de $(j\omega - s_a^*)$. Por tanto, se ha descubierto que

$$\left| \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} \right| = 1 \quad (13-49)$$

En otras palabras, se ha demostrado que la magnitud del voltaje de salida es *siempre* igual a la magnitud del voltaje de entrada *para todas las frecuencias*. No es sorprendente que ésta se conozca como red de *paso completo*.

Al calcular la fase se determinan las contribuciones positivas de los *fasores de ceros* y las contribuciones negativas de los *fasores de polos*:

$$\phi = \phi_1 + \phi_1^* - \phi_a - \phi_a^* \quad (13-50)$$

en donde los ángulos se identifican en la figura 13-20. Cuando los fasores se desplazan en forma ascendente por el eje imaginario, se observa que la fase de $G_{12}(j\omega)$ principia en 0° a una frecuencia cero y se hace más negativa conforme aumenta la frecuencia y se acerca a 360° . El cambio de fase característico de la función de transferencia aparece ilustrado en la figura 13-21, junto con la gráfica de lugares geométricos complejos.

En resumen, para entradas senoidales esta red tiene la propiedad de que todo lo que entra sale sin verse afectado en lo que respecta a la magnitud, pero con la fase distorsionada.⁴ Dichas redes tienen aplicación en la compensación de líneas telefónicas.

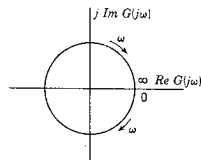
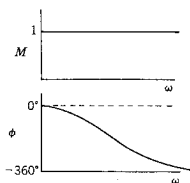


Figura 13-21. Respuesta de magnitud y fase de la red de la figura 13-19(a) mostrando las características de "paso completo".

⁴ ¡Algunos de mis amigos han presentado información similar respecto a esto!

13-5. DIAGRAMAS DE BODE

H. W. Bode⁵ utilizó ampliamente en sus estudios una escala logarítmica para la magnitud de las funciones de red, así como la variable frecuencia. Por esta razón, las gráficas logarítmicas que se estudian en esta sección se denominan *gráficas* o *diagramas de Bode*. El logaritmo natural de

$$G(j\omega) = M(\omega)e^{j\phi(\omega)} \quad (13-51)$$

es la función compleja

$$\ln G(j\omega) = \ln M(\omega) + j\phi(\omega) \quad (13-52)$$

En esta ecuación, $\ln M(\omega)$ es la *ganancia* o la *ganancia logarítmica* en nepers, y ϕ es la función de *ángulo* en radianes. La unidad que se acostumbra para la ganancia es el decibel (db); en esta unidad⁶

$$\text{Ganancias en decibele} = 20 \log M(\omega) \quad (13-53)$$

De la misma forma, la unidad que se acostumbra para el ángulo ϕ es el grado. La conversión a estas unidades se puede lograr mediante las ecuaciones:

$$\text{Número de decibele} = 8.68 \times \text{número de nepers} \quad (13-54)$$

$$\text{Número de grados} = 57.3 \times \text{número de radianes} \quad (13-55)$$

En este punto se introduce una variable logarítmica de frecuencia

$$u = \log \omega \quad \text{ó} \quad \omega = 10^u \quad (13-56)$$

De acuerdo con tal variable, dos intervalos de frecuencia dados por la ecuación

$$u_2 - u_1 = \log \omega_2 - \log \omega_1 = \log \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (13-57)$$

tienen un uso muy difundido. Estos intervalos son la *octava* para la que $\omega_2 = 2\omega_1$, y la *década* con $\omega_2 = 10\omega_1$. Las pendientes de líneas rectas en el sistema de coordenadas de las gráficas de Bode se expresarán en función de estos dos intervalos.

Volviendo a la ecuación (13-6) para $G(j\omega)$, se supondrá por ahora que todos los polos y los ceros son distintos (no repetidos). Si el

⁵ *Network Analysis and Feedback Amplifier Design* (D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J., 1945), páginas 316 y siguientes, o H. W. Bode, "Relations between attenuation and phase in feedback amplifier design", *Bell System Tech. J.*, 19, 421-454 (1940). Bode era miembro del personal técnico de Bell Telephone Laboratories y más tarde se unió al profesorado de la Universidad de Harvard.

⁶ A lo largo de esta obra, \log designa la base 10 y \ln la base $e = 2.718$.

primer término del numerador se modifica haciendo que $z_1 = -1/T_1$, un número real, se tiene entonces que

$$j\omega - z_1 = \frac{1}{T_1}(1 + j\omega T_1) \quad (13-58)$$

El logaritmo de esta ecuación es

$$\ln(j\omega - z_1) = \ln \frac{1}{T_1} + \ln|1 + j\omega T_1| + j \tan^{-1} \omega T_1 \quad (13-59)$$

Los dos primeros términos de la ecuación se expresan en decibels como sigue:

$$20 \log \frac{1}{T_1} + 20 \log |1 + j\omega T_1| \text{ db} \quad (13-60)$$

los dos últimos términos se pueden expresar en grados como sigue:

$$\phi = 57.3 \tan^{-1} \omega T_1 \quad (13-61)$$

Todos los factores del numerador tendrán esta forma, con $z_i = -1/T_i$. Para el denominador, se hará que $p_1 = -1/T_a$, $p_2 = -1/T_b$, etcétera. Entonces, la magnitud de $G(j\omega)$ en decibels está dada por la suma

$$20 \log \frac{a_0 T_a T_b \dots T_m}{b_0 T_1 T_2 \dots T_n} + 20 \log |1 + j\omega T_1| + \dots + 20 \log |1 + j\omega T_n| \\ - 20 \log |1 + j\omega T_a| - \dots - 20 \log |1 + j\omega T_m| \text{ db} \quad (13-62)$$

y el ángulo en grados es

$$57.3 \tan^{-1} \omega T_1 + 57.3 \tan^{-1} \omega T_2 + \dots + 57.3 \tan^{-1} \omega T_n \\ - 57.3 \tan^{-1} \omega T_a - \dots - 57.3 \tan^{-1} \omega T_m \quad (13-63)$$

Este resultado revela que, además del primer término de la ecuación (13-62), que es una constante, todos los demás tienen la misma forma y difieren sólo en el valor de T_i —tanto para la magnitud como para la fase. Se puede considerar que el segundo término de la ecuación (13-62) y el primero de la ecuación (13-63) son típicos y se les estudiará detalladamente. Una vez que esto se haga, se determinará la magnitud total y las funciones de fase mediante una simple suma de tales términos.

Magnitud del factor de primer orden. La expresión de la magnitud es

$$|G_1| = 20 \log |1 + j\omega T_1| = 20 \log (1 + \omega^2 T_1^2)^{1/2} \quad (13-64)$$

Para un valor pequeño de ω , es decir, $\omega T_1 \ll 1$, G_1 se acerca a la asíntota de línea recta

$$|G_1| \approx 20 \log 1 = 0 \text{ db} \quad (13-65)$$

que tiene una magnitud cero y una pendiente también de cero. Para un valor grande de ω , $\omega T_1 \gg 1$, $|G_1|$ tiende a otra asíntota de línea recta

$$|G_1| \approx 20 \log \omega T_1, \text{ db} \quad (13-66)$$

En las coordenadas de la gráfica de Bode la pendiente de la línea recta se determina observando que la magnitud cambia 6 db de $\omega T_1 = 1$ a $\omega T_1 = 2$ (o cualquier otra octava), dando una pendiente de 6 db/octava, o cambia 20 db de $\omega T_1 = 1$ a $\omega T_1 = 10$ (o cualquier otra década), correspondiente a una pendiente de 20 db/década.

La frecuencia $\omega = 1/T_1$ se denomina frecuencia de *punto de ruptura* o *frecuencia de ruptura*, y a veces *frecuencia de esquina*. Este es un nombre nuevo para una cantidad conocida que antes se presentó como la recíproca de la constante de tiempo y también como frecuencia de media potencia. De acuerdo con la ecuación (13-64), el valor de G_1 a la frecuencia de ruptura es

$$|G_1| = 20 \log 2 \text{ db} \approx 3 \text{ db} \quad (13-67)$$

Queda todavía otra convención por introducir aquí. Las gráficas de segmentos de líneas rectas dadas por las ecuaciones (13-65) y (13-66) constituyen la *curva asintótica*, que se distingue de la respuesta de la magnitud verdadera dada por la ecuación (13-64). Los valores de las dos respuestas para varias frecuencias se señalan en la tabla 13-1. De acuerdo con estos valores, se puede elaborar la gráfica que aparece en la figura 13-22, y a continuación se describirá la técnica para dibujar la respuesta de magnitud verdadera.

TABLA 13-1.

ω	Magnitud verdadera	Magnitud asintótica	Diferencia
$1/2T$	1 db	0 db	1 db
$1/1.31T$	2 db	0 db	2 db
$1/T$	3 db	0 db	3 db
$1.31/T$	4.3 db	2.3 db	2 db
$2/T$	7 db	6 db	1 db

De acuerdo con la tabla 13-1 y la figura 13-22, se observa que una técnica sencilla para trazar la respuesta de magnitud verdadera se describe en los siguientes pasos: (1) conociendo T , determine el punto de ruptura. (2) A partir del punto de ruptura, trace las dos líneas asintóticas, una de pendiente cero para las frecuencias bajas, y una con pendiente 6 db/octava para las frecuencias más altas. (3) En el punto de ruptura, la respuesta verdadera se ve desplazada en 3 db de la

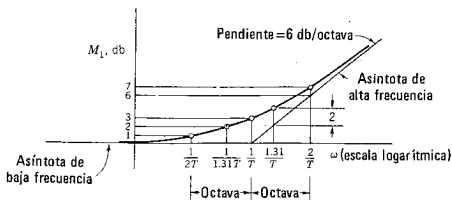


Figura 13-22. La respuesta de magnitud dada por la ecuación 13-64, muestra la curva verdadera y las asíntotas de baja y alta frecuencia. Los cinco puntos de la curva verdadera están ubicados convenientemente en función de las rectas de las asíntotas.

intersección de las asíntotas; a una octava por debajo y a una octava por encima del punto de ruptura, la verdadera curva está desplazada en 1 db en relación con las líneas asíntóticas. Si es necesario, se pueden localizar los puntos de diferencia de 2 db de la tabla 13-1. (4) Si el factor proviene de un polo en vez de un cero en $G(j\omega)$, todos los valores son negativos incluyendo la pendiente.

EJEMPLO 8

En este ejemplo se construirá una gráfica de Bode para la función de red

$$G(j\omega) = \frac{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_3)}{(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_4)} \quad (13-68)$$

Primero se determinan las frecuencias de ruptura de $\omega_i = -1/T_i$, una transformación que se ilustra por una rotación en el plano s en la figura 13-23. Usando las coordenadas de Bode, se trazan las cuatro líneas asíntóticas de ± 6 db/octava, como se muestra en la figu-

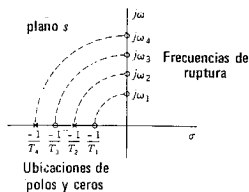


Figura 13-23. Ilustración de la relación simple entre las ubicaciones de polos y ceros en el eje real, y las frecuencias de ruptura.

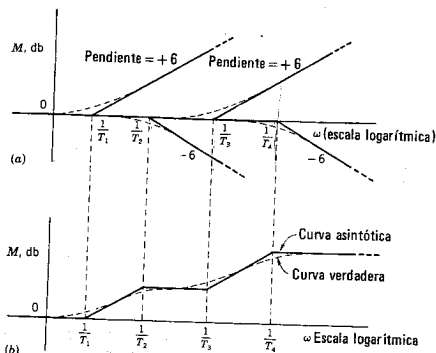


Figura 13-24. (a) Las respuestas individuales de los cuatro factores de la ecuación (13-68), y (b) su suma que da la respuesta para la magnitud de $G(j\omega)$.

ra 13-24(a). Por último, las respuestas se suman como lo requiere la ecuación (13-62), dando la respuesta asintótica de la figura 13-24(b). En este esqueleto, la respuesta verdadera se determina sumando las respuestas verdaderas para cada uno de los factores, dando el resultado que representa la línea punteada. Como se ve, el procedimiento es sencillo.

Fase del factor de primer orden. De acuerdo con la ecuación (13-63), el primer término es

$$\phi_1 = 57.3 \tan^{-1} \omega T_1 \quad (13-69)$$

Para esta función, los valores que se dan en la tabla 13-2 sirven para hacer una gráfica como la que se muestra en la figura 13-25.

TABLA 13-2.

ω	$57.3 \tan^{-1} \omega T$
0	0°
$1/2T$	26.6°
$1/\sqrt{3}T$	30°
$1/T$	45°
$\sqrt{3}T$	60°
$2T$	63.4°
∞	90°

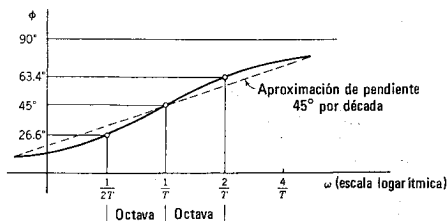


Figura 13-25. La fase dada por la ecuación (13-69) muestra tres valores que se usan para construir la respuesta. La línea punteada representa una aproximación útil.

Una aproximación a la curva de fase que se utiliza a veces consiste en una línea recta con una pendiente de 45° por década, que pasa por 45° para $\omega = 1/T$, como se indica por medio de la línea punteada de la figura 13-25. La diferencia máxima entre esta aproximación y la curva verdadera es de menos de 6° desde $\omega = 0.1/T$ hasta $\omega = 10/T$. Los valores de ϕ_1 se multiplican por -1 si el factor se origina de un polo en $G(s)$.

El factor s en $G(s)$ —un polo o un cero en el origen— tiene una respuesta de magnitud dada por $|G_0| = 20 \log \omega \text{ db}$ para todas las ω . La ecuación se multiplica por el factor $+1$ para un cero y -1 para un polo. La contribución de fase de este factor es $\pm 90^\circ$, utilizando la misma convención del signo: $+1$ para un cero y -1 para un polo.

Factores de segundo orden. Si $G(s)$ tiene polos y ceros que son conjugados complejos, entonces el factor $(1 + sT_i)$ se substituye por un factor de segundo orden que se puede expresar en la forma

$$G_2 = 1 + 2\zeta sT + s^2T^2 \quad (13-70)$$

en donde ζ es la relación de amortiguamiento que se vio en el capítulo 6. De acuerdo con esto, las funciones de magnitud y fase son

$$M = 10 \log [(1 - \omega^2T^2)^2 + (2\zeta\omega T)^2] \quad (13-71)$$

y

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2T^2} \quad (13-72)$$

En la figura 13-26 se ilustran las gráficas de $M(\omega)$ y $\phi(\omega)$ de tales ecuaciones, teniendo a ζ como parámetro. Tomando como base las curvas y las ecuaciones, se pueden hacer varias observaciones útiles

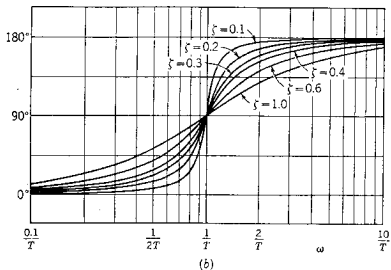
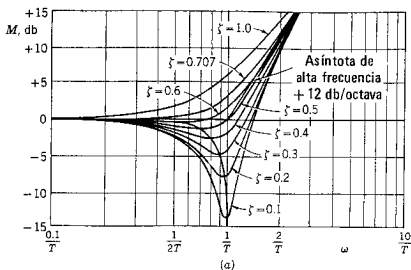


Figura 13-26. Respuestas de magnitud y fase dadas por las ecuaciones (13-71) y (13-72) para varios valores de ζ .

concernientes al uso de las curvas para factores de segundo orden a construir los diagramas de Bode:

- (1) La asíntota de baja frecuencia es la línea de 0 db, como en el caso del factor de primer orden.
- (2) La asíntota de alta frecuencia es

$$|G_2| \approx 40 \log \omega T \text{ db} \quad (13-73)$$

que es una recta cuya pendiente es 12 db/octava o 40 db/década.

- (3) La frecuencia de ruptura, la intersección de las asíntotas de baja y alta frecuencia, es $\omega = 1/T$ para todas las ζ .
- (4) A la frecuencia de ruptura, $G_2(j\omega)$ tiene la magnitud

$$M_1(1/T) = 20 \log 2\zeta \text{ db} \quad (13-74)$$

TABLA 13-3.

ζ	$20 \log 2\zeta \text{ db}$	ζ	$20 \log 2\zeta \text{ db}$
0	$-\infty$	0.4	-2
0.05	-20	0.5	0
0.1	-14	0.6	+1.5
0.2	-8	0.707	+3
0.3	-4.5	1.0	+6

En la tabla 13-3 se presentan algunos valores de esta ecuación que son útiles para construir diagramas de Bode.

- (5) La fase varía desde 0° , a frecuencias bajas, hasta 180° , a frecuencias altas, con el valor de 90° a la frecuencia de ruptura para todas las ζ . Las características de fase cambian bruscamente cerca de la frecuencia de ruptura; tanto más brusco es este cambio, cuanto más pequeño es el valor de ζ .
- (6) Todas las ecuaciones que se dan aquí son para factores de cero. Para factores de polo, multiplique todas las ecuaciones por -1 .

Al elaborar gráficas de Bode, las diferentes curvas de magnitud y fase se pueden graficar en papel semilogarítmico de tamaño y tipo convenientes. Luego se puede usar papel de gráfica delgado del mismo tipo y se sobrepone al otro para trazar las curvas a la frecuencia de ruptura apropiada.

EJEMPLO 9

Supóngase que la función de transferencia de una red de dos puertos se determina como sigue:

$$G(s) = \frac{s}{(1 + 0.5s)(1 + 0.12s + 0.04s^2)} \tag{13-75}$$

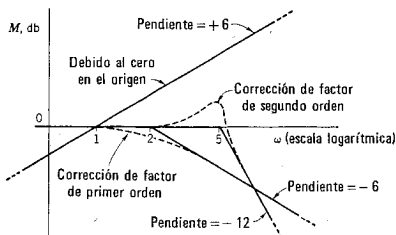


Figura 13-28. Gráficas de los diferentes factores de la ecuación (13-75) que se usan para determinar la respuesta de magnitud.

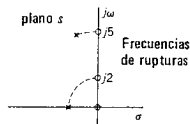


Figura 13-27. Se muestra la relación de las ubicaciones de los polos con las frecuencias de ruptura para la $G(j\omega)$ del ejemplo 9. La frecuencia de ruptura para un polo complejo se encuentra trazando una circunferencia a través de él, con centro en el origen, que intercepte el eje imaginario.

y se requiere trazar gráficas de Bode para la magnitud y la fase correspondientes. Para el factor de primer orden, se observa que la ruptura de frecuencia es $\omega_1 = 2$, en tanto que para el factor de segundo orden, $\omega_2 = 5$ y $\zeta_2 = 0.3$. Véase la figura 13-27. Las curvas asintótica y verdadera para las magnitudes de cada uno de los factores se ilustran en la figura 13-28, y éstas se suman para dar la característica de magnitud total de la figura 13-29. En la figura 13-29 se presenta una suma similar de las características de fase que da la respuesta de fase (línea punteada).

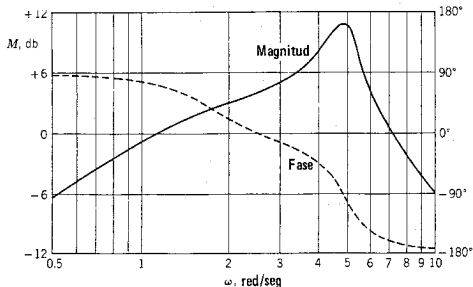


Figura 13-29. La respuesta de magnitud y fase para la función de transferencia dada por la ecuación (13-75).

13-6. EL CRITERIO DE NYQUIST

A continuación se estudia un criterio que tiene el mismo objetivo que el de Routh-Hurwitz del capítulo 10, es decir, la estabilidad del sistema que se estudia. El criterio de Routh-Hurwitz se relacionaba directamente con las raíces de la ecuación característica del sistema. En el criterio de Nyquist se emplea un planteamiento distinto al utilizar los conceptos del estado permanente senoidal correspondientes a este capítulo y al 12. Originalmente lo formuló en 1932 Harry Nyquist⁷ de los Bell Telephone Laboratories. Aunque aquí se presentará el criterio de Nyquist como un método para el análisis por computadora de un sistema, como fue el caso del criterio de Routh-Hurwitz, es importante observar que su utilidad en la práctica se relaciona con

⁷ H. Nyquist, "Regeneration Theory", *Bell System Tech. J.*, 11, 126-147 (1932).

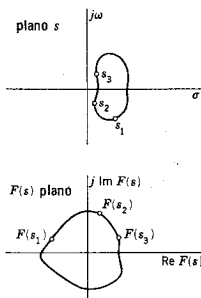


Figura 13-30. Una ilustración del mapeo de un contorno en el plano s a otro en el plano $F(s)$.

el hecho de que se puede aplicar a través de mediciones senoidales de rutina que es posible efectuar en el laboratorio.⁸

La operación básica al aplicar el criterio de Nyquist es un mapeo del plano s al plano $F(s)$. Con el término mapeo se quiere indicar que un conjunto de valores de s (por ejemplo, s_1 , s_2 y s_3) tiene, para una $F(s)$ determinada, un conjunto correspondiente de valores de $F(s)$, es decir, $F(s_1)$, $F(s_2)$ y $F(s_3)$. Estos tres puntos —y un número infinito de otros más— se ilustran en la figura 13-30. En este caso un contorno arbitrario en el plano s se “mapea” en el contorno correspondiente en el plano $F(s)$. En la figura 13-31 se muestra un ejemplo específico. El mapeo se hace para valores imaginarios de s ; es decir, $s = j\omega$ para $\omega \geq 0$. La función específica es

$$F(s) = \frac{1}{s(T+1)} \quad (13-76)$$

Otro ejemplo de una operación de mapeo, no tan difícil como la anterior, consiste en lo siguiente: supóngase que dos funciones se relacionan mediante la ecuación

$$F(s) = P(s) + 1 \quad (13-77)$$

es decir, la función $P(s)$ más una constante (unidad) es igual a la función $F(s)$. Una gráfica típica en los dos planos sería la que se muestra en la figura 13-32. Es evidente que la transformación traslada la gráfica una unidad hacia la izquierda.

⁸ Kuh, Ernest S. y R. A. Rohrer, *Theory of Linear Active Networks* (Holden-Day, Inc., San Francisco, 1967), páginas 561-578. Spence, Robert, *Linear Active Networks* (John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1970), páginas 175-189.

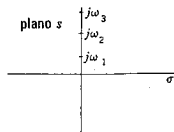


Figura 13-31. Mapeo de los puntos sobre el eje imaginario del plano s al plano $F(s)$ para $F(s) = 1/[s(T+1)]$.

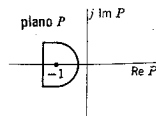
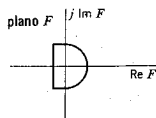


Figura 13-32. Un mapeo definido por la ecuación $F(s) = P(s) + 1$.

450 Gráficas de la respuesta de frecuencia

A continuación, supóngase que $F(s)$ se factoriza para encontrar sus polos y sus ceros, que son los que se dan en la ecuación

$$F(s) = K \frac{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)}{(s - s_a)(s - s_b) \dots (s - s_m)} \quad (13-78)$$

en donde s_1, s_2, \dots, s_n son los ceros y s_a, s_b, \dots, s_m son los polos. Estos polos y ceros se representan en una gráfica del plano s como se muestra en la figura 13-33(a) (un arreglo arbitrario como ejemplo). En la figura 13-33(b) se aísla un solo cero, s_1 . Tal cero proviene del término $(s - s_1)$ de la ecuación (13-78). A una frecuencia particular s_a , este término tiene el valor $(s_a - s_1)$, que se puede expresar en forma polar como sigue:

$$(s_a - s_1) = M_1 e^{j\phi_1} \quad (13-79)$$

en donde M_1 es la magnitud y ϕ_1 es el ángulo de fase del fasor $(s_a - s_1)$. Esta magnitud y fase se ilustran en el plano s de la figura 13-33(b). Cualquier otro término de la ecuación (13-78) se puede expresar en forma similar; por ejemplo,

$$(s_a - s_b) = M_2 e^{j\phi_2} \quad (13-80)$$

Cuando todos los términos se expresan de este modo, la ecuación (13-78) toma la forma que es una generalización de la ecuación (13-27),

$$M_e e^{j\phi_t} = |F(s)| e^{j \text{Ang } F(s)} = \frac{KM_1 M_2 M_3 M_4 \dots e^{j\phi_t}}{M_a M_b M_c M_d \dots} \quad (13-81)$$

en donde

$$\phi_t = \phi_1 + \phi_2 + \dots - \phi_a - \phi_b - \dots \quad (13-82)$$

Esta última ecuación indica que la fase total a una frecuencia determinada s_a para la función $F(s)$ se puede determinar sumando la fase de los "fasores de cero" y restando la fase de los "fasores de polo"; en otras palabras,

$$\begin{aligned} \text{Ang } F(s) = & \text{Ang}(s - s_1) + \text{Ang}(s - s_2) \\ & + \dots - \text{Ang}(s - s_a) - \dots \end{aligned} \quad (13-83)$$

para cualquier valor de s .

En la figura 13-34 se muestra el plano s con dos ceros, s_1 y s_2 , y el mapeo de un contorno C (s_a es un punto sobre el contorno). Véase el efecto de s_1 (haciendo caso omiso de s_2) conforme s_a se mueve a lo largo de C en el sentido de las manecillas del reloj. Después de una vuelta completa al contorno cerrado C , la fase del término fasorial $(s - s_1)$ ha aumentado -2π radianes. A continuación, vea las consecuencias que tiene desprestigiar s_1 , al recorrer el mismo contorno cerrado C en el mismo sentido que las manecillas del reloj. En este caso

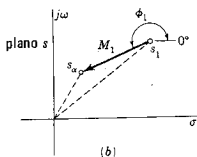
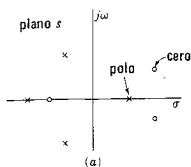


Figura 13-33. (a) Una configuración de polos y ceros en el plano s , y (b) un fasor trazado de un cero s_1 al punto s_a .

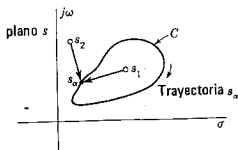


Figura 13-34. Un contorno en el plano s que encierra a s_1 , pero no a s_2 .

no se tiene una ganancia neta en la fase del término fasorial ($s - s_2$). En resumen, si el contorno cerrado circunda un cero, al recorrer la trayectoria cerrada en el sentido de las manecillas del reloj la función cambia de fase en -2π radianes; si no hay un cero circundado, no hay cambio de fase. Se puede llegar exactamente a la misma conclusión en el caso de un polo, excepto en que la fase cambia $+2\pi$ radianes.

A continuación supóngase que se escoge un contorno en el plano s de la figura 13-33 de tal modo que se tengan P polos y Z ceros circundados, cuando el contorno se recorre en el sentido de las manecillas del reloj. El cambio neto en la fase de la función $F(s)$ estará dado por la ecuación

$$\Delta \text{Ang } F(s) = 2\pi(P - Z) \text{ radianes} \quad (13-84)$$

Ahora se tratará otra vez el mapeo del plano s al plano $F(s)$. Se examinará el comportamiento de la gráfica $F(s)$ en el plano complejo, conforme se recorre el contorno cerrado en el plano s . Un incremento en la fase de $F(s)$ se manifiesta en el plano $F(s)$ por una circunvolución del origen por cada incremento de 2π radianes. Es más, cada cero circundado dará origen a una circunvolución del origen en sentido contrario al de las manecillas del reloj, al igual que cada polo que se circunda producirá una circunvolución en el sentido de las manecillas del reloj. Si el contorno no circunda ni polos ni ceros—o si circunda el mismo número de polos y ceros—el contorno en el plano $F(s)$ no circundará al origen. En resumen, si el contorno cerrado C en el plano

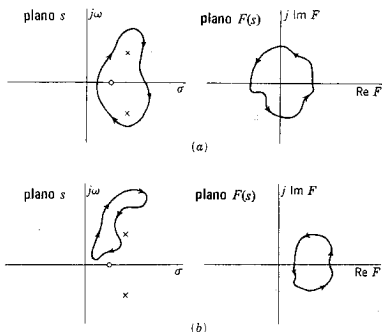


Figura 13-35. Dos mapeos del plano s al plano $F(s)$, que ilustran la regla $\Delta\phi = 2\pi(P - Z)$.

s circunda P polos y Z ceros cuando se recorre en el sentido de las manecillas del reloj (o negativo), el contorno correspondiente en el plano $F(s)$ al origen $(P - Z)$ veces en sentido contrario al de las manecillas del reloj (o positivo). En la figura 13-35 se dan dos ejemplos para ilustrar esta conclusión.

Los principios que se han desarrollado se aplicarán a continuación a un sistema de ciclo cerrado representado por el diagrama de bloque de

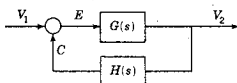


Figura 13-36. Representación en diagrama de bloques de un sistema de ciclo cerrado, una de cuyas partes tiene la función de transferencia $G(s)$ y la otra $H(s)$.

la figura 13-36. El álgebra de diagramas de bloque se define de tal modo que la "entrada" al bloque, multiplicada por la función de transferencia, es igual a la "salida" de dicho bloque. Entonces, para las conexiones que se indican en la figura, se tienen las tres ecuaciones:

$$E(s) = V_1(s) - C(s) \quad (13-85)$$

$$C(s) = H(s)V_2(s) \quad (13-86)$$

y

$$V_2(s) = G(s)E(s) \quad (13-87)$$

De estas tres ecuaciones, se pueden eliminar $E(s)$ y $C(s)$ para determinar $V_2(s)$ en función de $V_1(s)$, en la forma de la función de transferencia general

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (13-88)$$

Los polos y los ceros de las dos funciones $1 + GH$ y GH se deben tomar en cuenta en la derivación del criterio de Nyquist. Sea

$$1 + G(s)H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = K \frac{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)}{(s - s_a)(s - s_b) \dots (s - s_m)} \quad (13-89)$$

$$G(s)H(s) = K' \frac{(s - s_a)(s - s_b) \dots (s - s_m)}{(s - s_a)(s - s_b) \dots (s - s_m)} \quad (13-90)$$

Obsérvese que las dos funciones tienen los *mismos polos*. En la ecuación (13-89) el orden del polinomio $P(s)$ es n y el orden de $Q(s)$ es m . Al derivar el criterio de Nyquist, las órdenes se restringen al caso $n \leq m$, de modo que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)H(s) = 0 \quad \text{o una constante} \quad (13-91)$$

Es importante distinguir los diferentes polos y ceros, que se tabulan como sigue:

$$s_1, s_2, \dots, s_n \text{ son ceros de } [1 + G(s)H(s)].$$

$$s_a, s_b, \dots, s_m \text{ son ceros de } [1 + G(s)H(s)].$$

$$s_a, s_b, \dots, s_m \text{ son también los polos de } G(s)H(s).$$

$$s_a, s_b, \dots, s_m \text{ son los ceros de } G(s)H(s).$$

Las raíces s_1, s_2, \dots, s_n son de primordial interés en este caso, debido a que son los ceros de la ecuación $1 + GH = 0$, que es la ecuación característica del sistema de ciclo cerrado. Tales raíces *no deben tener partes reales positivas* para que sea estable el sistema que representan. Obsérvese que de acuerdo con la ecuación (13-88) los ceros de $1 + GH$ son los polos de V_2/V_1 .

Al estudiar estabilidad, el interés específico reside en los ceros del polinomio $1 + GH$ con partes reales positivas. Esto sugiere que se escoja un contorno en el plano s que incluya toda la mitad derecha del plano, como se ilustra en la figura 13-37. Este contorno circundará todos los ceros en cuestión. El contorno se traza en el sentido 1-2-3-4-1, principiando en $s = -j\infty$, evitando el origen ($s = 0$) por ahora, y continuando a $s = +j\infty$, y de ahí, trazando un círculo de radio infinito, hasta el punto inicial. El citado contorno se recorre en el sentido de las manecillas del reloj (o negativo). El contorno en el plano s se puede mapear en el plano $1 + GH$ o en el plano GH [la relación sencilla entre estos mapeos se vio en la ecuación (13-77)]. Si cualquiera de los polos o los ceros de $1 + GH$ queda circundado en la mitad derecha del plano s , entonces (1) el lugar geométrico en el plano $1 + GH$ circundará al origen, o bien (2) el lugar geométrico en el plano GH circundará al punto $-1 + j0$.

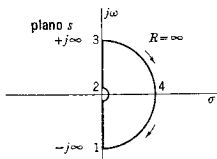


Figura 13-37. Un contorno particular en el plano s que evita el origen, pero circunda toda la mitad derecha del plano s .

Sea X = el número de ceros de $1 + GH$ con partes reales positivas, P = el número de polos de $1 + GH$ con partes reales positivas [también el número de polos de (GH) con partes reales positivas], R = número de circunvoluciones o vueltas netas en sentido contrario al de las mane-

cillas del reloj, que circunden al punto $-1 + j0$ en el plano GH o al origen en el plano $1 + GH$; entonces

$$R = P - X \quad (13-92)$$

Puesto que X , el número de ceros de $1 + GH$ o el número de polos de V_2/V_1 con partes reales positivas *debe ser igual a cero* para que el sistema sea estable, el sistema con la ecuación característica $1 + GH = 0$ es estable si y sólo si

$$R = P \quad (13-93)$$

En la mayoría de los casos $P = 0$ y el criterio se reduce al requisito de que $R = 0$ para que sea estable.

Para aplicar el criterio de Nyquist grafique el lugar geométrico $G(s)H(s)$ para el rango de frecuencias $-\infty < \omega < \infty$. Si R es el número neto de vueltas o circunvoluciones en sentido contrario al de las manecillas del reloj⁹ del punto $-1 + j0$ y P es el número de polos de $G(s)H(s)$ con partes reales positivas (y por tanto en la mitad derecha del plano), el sistema es estable sólo cuando $R = P$.

Hasta ahora se ha evitado cualquier problema que se pueda originar debido a que un polo de $G(s)H(s)$ esté en el origen o se tengan varios polos en dicho origen. En realidad, hay una manera práctica de tomar en cuenta estos polos en el origen, que merecen especial atención. Para ilustrar el problema, véase la función de transferencia

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(sT + 1)} \quad (13-94)$$

que se grafica en la figura 13-38 para las frecuencias en el rango $-\infty < \omega < +\infty$. La gráfica está completa excepto por un detalle. Los

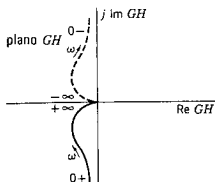


Figura 13-38. Gráfica parcial de $G(j\omega)H(j\omega)$ dada por la ecuación (13-94).

⁹ Para encontrar el valor de R imagine un fisor con un extremo sujeto firmemente al punto $-1 + j0$ señalando en sentido contrario a dicho punto. Luego el extremo de este fisor trazará el lugar geométrico principiando en $-\infty$, pasando por -0 y $+0$ y terminando en $+\infty$. Cuente el número neto de vueltas de este fisor en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Este es el valor de R . Una vuelta en el sentido de las manecillas del reloj se designa mediante un número negativo para R .

puntos (+0) y (-0) se deben unir (como si fueran el mismo punto). Si el plano geométrico se cierra por la mitad derecha del plano, el sistema es estable, ya que $R = 0$; sin embargo, si el lugar geométrico se cierra en el otro sentido, por la mitad izquierda del plano, entonces $R = 1$ y el sistema es inestable. Como se puede ver, se trata de un punto vital.

Conforme s se hace pequeño, sólo el polo en el origen tiene efecto en la función de transferencia $G(s)H(s)$. Por tanto, para valores pequeños de s , la función de transferencia se puede expresar como sigue:

$$(G(s)H(s)) = \frac{K}{s^n} \quad (13-95)$$

en donde n es el orden (o multiplicidad) de los polos en el origen. Para la trayectoria semicircular que se ilustra en la figura 13-39 la ecuación del lugar geométrico del fasor en el plano s es

$$(s - 0) = \delta e^{j\theta} \quad (13-96)$$

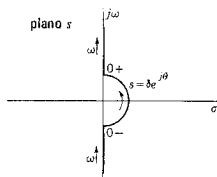


Figura 13-39. Ampliación de la región del origen en el contorno que se ilustra en la figura 13-37, indicando el contorno que evita al origen.

en donde δ es el radio del semicírculo y θ es el ángulo del fasor $(s - 0)$ dirigido del origen a un punto en el círculo. Conforme δ tiende a 0, la función de transferencia tiene el valor límite

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^n} e^{-jn\theta} = \infty e^{-jn\theta} \quad (13-97)$$

Así, conforme θ de la figura 13-39 varía de $-\pi/2$ a $+\pi/2$, la fase de $G(s)H(s)$ varía de $n\pi/2$ a $-n\pi/2$. En resumen, los n polos en el origen de la función de transferencia $G(s)H(s)$ producen $n/2$ rotaciones en el sentido de las manecillas del reloj con un radio infinito del fasor del lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$.

Aplicando esta regla al ejemplo de la ecuación (13-94) se observa que $n = 1$ produce $1/2$ rotación en el sentido de las manecillas del reloj del fasor del lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$ al ir de $s = -0$ a $s = +0$. De acuerdo con esta información, se puede completar la gráfica de la figura 13-38, el resultado se muestra en la figura 13-40.

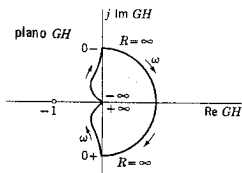


Figura 13-40. Terminación de la gráfica de $G(j\omega)H(j\omega)$ que se ilustra en la figura 13-38, dando atención al cierre correspondiente a valores cercanos a $s = 0$.

Para hacer la gráfica de Nyquist sólo es necesario tomar en cuenta valores positivos de ω . Puesto que la parte real de $G(j\omega)H(j\omega)$ es par y la parte imaginaria es impar, se infiere que

$$\begin{aligned} \text{Im } G(-j\omega)H(-j\omega) &= -\text{Im } G(+j\omega)H(+j\omega) \\ \text{Re } G(-j\omega)H(-j\omega) &= +\text{Re } G(+j\omega)H(+j\omega) \end{aligned} \quad (13-98)$$

La gráfica para valores negativos de ω se puede hacer reflejando la gráfica correspondiente a las frecuencias positivas sobre el eje real del plano GH .

Si la función de transferencia $G(s)H(s)$ no tiene polos en la mitad derecha del plano (y se pueden utilizar con ventaja los criterios de Routh-Hurwitz para hacer esta determinación), de tal modo que $P = 0$ en la ecuación (13-93), se puede utilizar una regla práctica. Recorra ("camine") de $\omega = 0$ a $\omega = +\infty$ sobre la gráfica de Nyquist. Si el punto $-1 + j0$ se encuentra a la *derecha* del punto (ω) más cercano de $G(j\omega)H(j\omega)$ a $-1 + j0$, el sistema es *inestable*; si está a la *izquierda*, el sistema es *estable* (sólo si $P = 0$).

Supóngase que un sistema es estable. Se puede pedir a continuación cierta medida de la estabilidad relativa. Para el caso $P = 0$, una circunvolución de $-1 + j0$ por el lugar geométrico indica un sistema inestable. Si el lugar geométrico atraviesa por $-1 + j0$, entonces el sistema presentará oscilaciones sostenidas. En caso de que no haya circunvolución, entonces el sistema es estable. En el caso de que no quede circundado, parece factible que mientras más se aleje la gráfica del lugar geométrico del punto $-1 + j0$ tanto más estable será el sistema. Una medida de la estabilidad relativa la dan dos números que se emplean con frecuencia en las especificaciones de un sistema: el *margen de ganancia* y el *margen de fase*.

En la figura 13-41 se observa que el lugar geométrico cruza la línea de 180° a una distancia A del origen, en donde $A < 1$. La distancia del punto A al punto -1 se define como el *margen de ganancia*. Se trata de la cantidad en que la ganancia se deba incrementar para que el sistema sea inestable. Esta cantidad debe ser $1/A$ para que $1/A \times A = 1$. En unidades logarítmicas, esto es $20 \log A$ db. Si se traza una circunferencia con el origen del plano GH como centro y

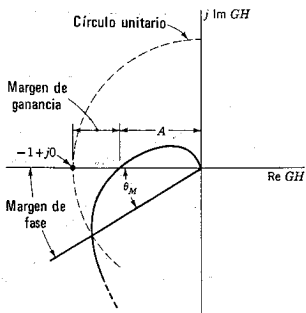


Figura 13-41. Lugar geométrico en el plano $G(s)H(s)$ usado para definir el margen de ganancia y el margen de fase.

con un radio unidad, entonces el punto de intersección de esta circunferencia con el lugar geométrico unido con el origen por una recta define el *margen de fase* θ_M , como se ilustra en la figura. Un sistema con un margen de ganancia de 2 y un margen de fase de 30° es estable; otro sistema con un margen de ganancia de 4 y un margen de fase de 45° será relativamente más estable.

La gráfica de Bode correspondiente a la figura 13-41 se ilustra en la figura 13-42. Dos puntos importantes de las gráficas de Bode son

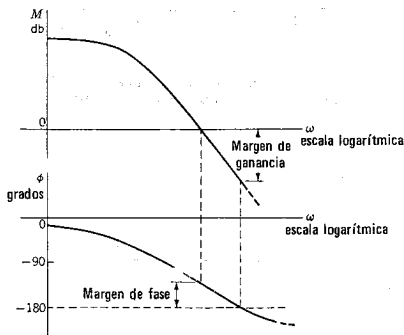


Figura 13-42. Gráfica de Bode correspondiente al lugar geométrico que se ilustra en la figura 13-41.

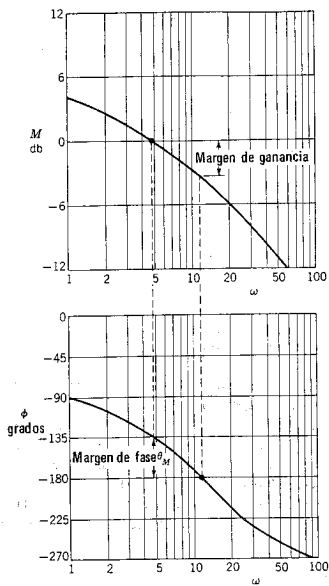


Figura 13-43. Gráfica de Bode que se usa para ilustrar la determinación del margen de ganancia y el margen de fase.

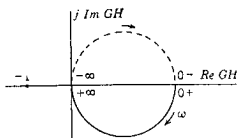


Figura 13-44. La función $GH = K/(sT + 1)$ graficada para $s = j\omega$ para todos los valores de ω .

(1) el punto en que el lugar geométrico cruza la línea de 0 db en la gráfica de magnitud y (2) el punto en que el lugar geométrico cruza la línea de 180° en la gráfica de fase. El trazo con el que se determinan el margen de ganancia y el margen de fase en la gráfica de Bode se ilustra mediante las líneas punteadas de la figuras 13-42 y 13-43.

A continuación se darán varios ejemplos para ilustrar la aplicación del criterio de Nyquist al estudio de estabilidad.

En la figura 13-44 se muestra la gráfica de la función de transferencia $GH = K/(sT + 1)$ para todas las frecuencias. La gráfica es la de una circunferencia de diámetro K . Para todos los valores de K , el lugar geométrico no circunda al punto $-1 + j0$, y se dice que el sistema es *incondicionalmente estable*. No hay nada que se pueda hacer para lograr que sea inestable.

En la figura 13-45 se muestra el lugar geométrico de una función de transferencia que se demostrará que es *condicionalmente estable*. Para la gráfica particular que se presenta en la figura no existe una circunvolución de $-1 + j0$, de manera que el sistema es estable. Sin embargo, si K aumenta, el lugar geométrico se amplifica con respecto al sistema de coordenadas en que está graficado. Un valor mayor de K hará que el lugar geométrico pase por el punto $-1 + j0$ y el sistema representado por dicho lugar geométrico será inestable en el sentido de que tiene una oscilación sostenida. Un valor todavía mayor de K hará que el punto $-1 + j0$ quede por completo circundado y el sistema será inestable. Por tanto, un sistema condicionalmente estable es aquel que es estable para ciertos valores de K e inestable para otros.

El lugar geométrico que se ilustra en la figura 13-46 es similar al de la figura 13-45 pero un poco más complicado. La asíntota de alta frecuencia es 180° en vez de 270° . Como se indica, el lugar geométrico representa un sistema estable. No obstante, aumentando K (amplificando el lugar geométrico) el lugar geométrico circundará a $-1 + j0$ y el sistema se hará inestable. Obsérvese que un valor todavía mayor de K no dará como resultado una circunvolución y, por tanto, se tendrá un sistema estable. El sistema representado por esta gráfica es condi-

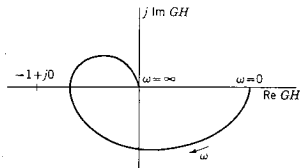


Figura 13-45. Lugar geométrico de una función de transferencia que representa a una red (o sistema) condicionalmente estable.

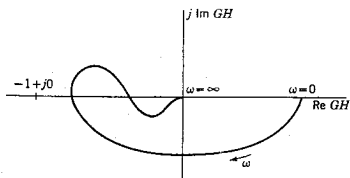


Figura 13-46. Gráfica del lugar geométrico de una función de transferencia que representa a una red (o sistema) condicionalmente estable, que es más compleja que la que se ilustra en la figura 13-45.

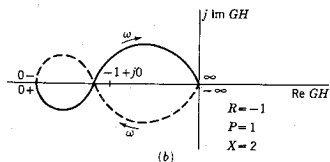
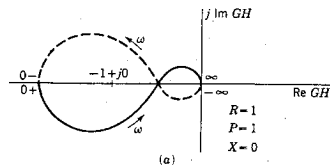


Figura 13-47. Dos gráficas del lugar geométrico de funciones de transferencia que contienen un factor $(s - a)$ para a positiva en $G(s)H(s)$.

cionalmente estable, con dos rangos de ganancia que producen estabilidad y un rango que produce inestabilidad.

Las gráficas del lugar geométrico de la figura 13-47 representan una función de transferencia que contiene un factor como $(s - a)$ que para un valor positivo de a tiene un polo o un cero en la mitad derecha del plano s . Se ha llegado a asociar un polo en la mitad derecha del plano con inestabilidad; pero a continuación se demostrará que no es necesariamente éste el caso cuando se trata de un sistema de ciclo cerrado. Para el lugar geométrico de la figura 13-47(a) se observa que

$R = 1$ y se indica que $P = 1$. Utilizando la ecuación $R = P - X$, se ve que $X = 0$ y que el sistema es estable. En la figura 13-47(b) se representa el lugar geométrico de un sistema similar. Sin embargo, en este caso, el punto $-1 + j0$ queda "dentro" del contorno, que está más cerca del origen. De acuerdo con la gráfica, se descubre que $R = -1$ y, puesto que $P = 1$, se infiere que $X = 2$ y el sistema es inestable con dos polos de la función de transferencia de ciclo cerrado en la mitad derecha del plano.

El lugar geométrico graficado en la figura 13-48 es distinto de los que se presentaron antes como ejemplo, en que la asíntota de baja frecuencia es -90° en vez de 0° . Esto se origina debido a que hay un polo en el origen de la función de transferencia GH ; por ejemplo,

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+a)(s+b)} \quad (13-99)$$

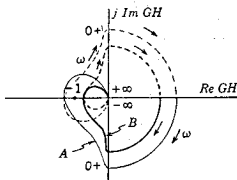


Figura 13-48. Gráfica del lugar geométrico de $G(s)H(s)$ del tipo dado por la ecuación (13-99).

Tales funciones de transferencia a menudo ocurren en sistemas de control debido a la presencia de un "elemento integrador" en el ciclo; pero ocurren con menos frecuencia en las redes. Las gráficas indican dos lugares geométricos. Para el valor de K que produce el lugar geométrico B , $R = 0$ y, puesto que $P = 0$, el sistema es estable. No obstante, si se incrementa K para obtener el lugar geométrico identificado como A , entonces $P = 0$ y $R = -2$, lo cual da $X = 2$ e implica un sistema inestable. Por tanto, este sistema es *condicionalmente estable*.

BIBLIOGRAFIA

- CHIRLIAN, PAUL M., *Basic Network Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969, capítulo 6.
- GRAY, PAUL E. y CAMPBELL L. STARLE, *Electronic Principles - Physics, Models and Circuits*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1969, capítulo 20.
- KUH, ERNEST S. y R. A. ROHRER, *Theory of Linear Active Networks*. Holden-Day, Inc., San Francisco, 1967. Véase el análisis del criterio de Nyquist en la sección 4 del capítulo 11.

- PERKINS, WILLIAMS R. y JOSE B. CRUZ, Jr., *Engineering of Dynamic Systems*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1969, capítulo 8.
- SCOTT, RONALD E., *Linear Circuits*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1960, capítulo 18.
- THORNTON, RICHARD D., C. L. SEARLE, D. O. PEDERSON, R. B. ADLER y E. J. ANGELO, Jr., *Multistage Transistor Circuits*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1965, capítulo 4.

EJERCICIOS PARA COMPUTADORA DIGITAL

El tema de las gráficas de respuesta de frecuencia es apropiado para usar la computadora digital a fin de evitar cálculos tediosos. Estos temas se tratan en las referencias citadas en el apéndice E-9. Se recomiendan especialmente los capítulos 9 y 10, Huelman, referencia 7 del apéndice E-10, y los capítulos 3 y 11 de Ley, referencia 11 del apéndice E-10.

PROBLEMAS

- 13-1. Grafique la variación de (a) la magnitud, (b) la fase, (c) la parte real y (d) la parte imaginaria de las siguientes funciones de red, donde ω tanto $\omega > 0$ como $\omega < 0$:

(a) $1 + j2\omega$

(b) $\frac{1}{1 - j2\omega}$

(c) $\frac{(1 - 2\omega^2) + j\omega}{1 + j2\omega}$

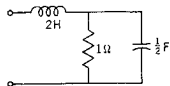


Fig. P13-2.

- 13-2. Sea la red RLC de un puerto que se muestra en la figura. Para esta red, determine las funciones de punto impulsor $Z(j\omega)$ y $Y(j\omega)$. Para cada una de estas funciones grafique la magnitud, la fase, la parte real y la imaginaria en función de la frecuencia para $\omega > 0$ y $\omega < 0$.
- 13-3. Para la red de dos puertos de la siguiente figura determine la función de transferencia de relación de voltajes, $G_{12}(j\omega) = V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$. Grafique la variación de esta función con ω de acuerdo con los dos métodos que se utilizan en la figura 13-7.

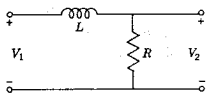


Fig. P13-3.

- 13-4. La red de dos puertos de la figura que sigue es de tipo RL. Repita las gráficas especificadas en el problema 13-3.

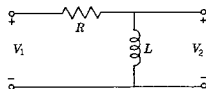


Fig. P13-4.

- 13-5. Repita el problema 13-3 para la red RC de dos puertos que se ilustra en la figura

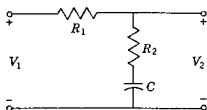


Fig. P13-5.

- 13-6. Demuestre que la gráfica del lugar geométrico de la ecuación (13-15) que se ilustra en la figura 13-7 es una semicircunferencia con centro en $G_{12}(j\omega) = 0.5 + j0$ para el rango de frecuencias $0 < \omega < \infty$.
- 13-7. Considere la gráfica del lugar geométrico que se pidió en el problema 13-15. Demuestre que este lugar es una circunferencia para el rango de frecuencias $-\infty < \omega < \infty$. Determine el centro de la circunferencia y su radio.
- 13-8. Estudie el circuito en RLC en serie que se ilustra a continuación. (a) Suponga que esta red está conectada a una fuente de voltaje senoidal. Grafique la variación de la magnitud de la corriente y la fase con la frecuencia. (b) Suponga que la misma red se conecta a una fuente de corriente con una forma de onda senoidal. Grafique la variación del voltaje que se aplica a los tres elementos utilizando las mismas coordenadas que en la parte (a). Los valores de los elementos se dan en ohms, farads y henrys.

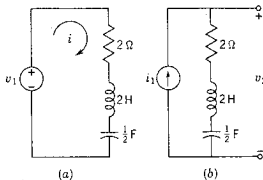


Fig. P13-8.

- 13-9. En la figura se muestra una red que funciona como filtro de paso bajo. Para esta red, determine la función de transferencia V_2/I_1 y grafique la magnitud y la fase como una función de la frecuencia para esta relación.

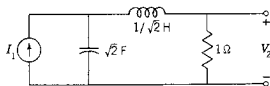


Fig. P13-9.

- 13-10. La red que se muestra en la figura tiene una función similar a la que se vio en el problema 13-9; es decir, se trata de un filtro de paso bajo. Para esta red, determine la función de transferencia V_2/I_1 y grafique la magnitud y la fase en función de la frecuencia.

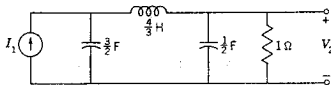


Fig. P13-10.

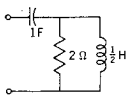


Fig. P13-12.

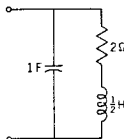


Fig. P13-13.

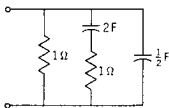


Fig. P13-14.

- 13-11. Se analiza una red y se encuentra que su función de transferencia es

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

Para esta función, grafique la magnitud y la fase en función de la frecuencia para el rango $0 < \omega < 4$.

- 13-12. Para la red RLC que se ilustra en la siguiente figura grafique (a) el lugar geométrico de la función de impedancia y (b) el lugar geométrico de la función de admitancia.
- 13-13. Grafique (a) el lugar geométrico de la admitancia y (b) el lugar geométrico de la impedancia para la red RLC que se ilustra a continuación.
- 13-14. La red de cuatro elementos que se muestra en la figura que sigue se debe analizar para determinar (a) el lugar geométrico de la impedancia de la red y (b) el lugar geométrico de la función de admitancia de la red.
- 13-15. Para la red de la figura siguiente grafique (a) el lugar geométrico de la función de impedancia y (b) el lugar geométrico de la función de admitancia.

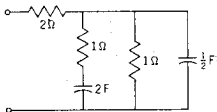
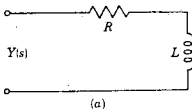


Fig. P13-15.

- 13-16. La red RL que se ilustra a continuación en (a) tiene tales valores de elementos que la fase del voltaje medida con respecto a la de la corriente es la que se muestra en (b) de la figura. De acuerdo con estos datos, determine las ubicaciones de polos y ceros de $Y(s)$.



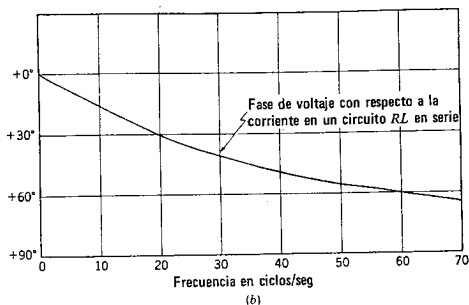


Fig. P13-16.

- 13-17. La figura que sigue ilustra la variación de la magnitud de la corriente en función de ω para una red RLC en serie, a la que se aplica un voltaje senoidal de magnitud constante. Con base en dicha figura, determine las ubicaciones de los polos y los ceros de la admitancia de la red.

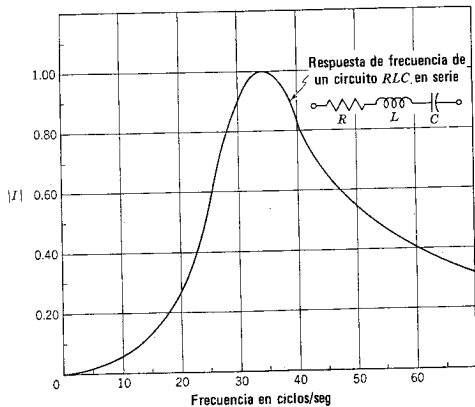


Fig. P13-17.

- 13-18. La configuración de polos-ceros que se muestra en la figura representa la función de admitancia para el circuito RLC en serie. De acuerdo con la

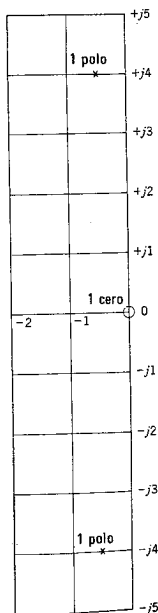


Fig. P13-18.

configuración de polos y ceros; determine: (a) la frecuencia natural no amortiguada ω_n , (b) la relación de amortiguamiento ζ , (c) el valor Q del circuito, (d) el ancho de banda (en los puntos de media potencia), (e) la frecuencia verdadera de oscilación de la respuesta transitoria, (f) el factor de amortiguamiento de la respuesta transitoria, (g) la frecuencia de resonancia, (h) los valores de parámetro (en función de L si los valores no se pueden determinar de otra manera). (i) Dibuje la magnitud de la admitancia $|Y(j\omega)|$ en función de la frecuencia. (j) Si la escala de frecuencia se amplía por un factor de 1000, ¿cómo cambian los valores de los parámetros R , L y C ?

- 13-19. En la siguiente figura se muestran dos configuraciones de polos y ceros de cierta función de transferencia. Utilice un procedimiento gráfico para determinar la variación de la amplitud de la función de red correspondiente a las dos configuraciones. Superponga las dos gráficas en el mismo sistema de coordenadas.

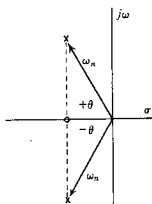


Fig. P13-22.

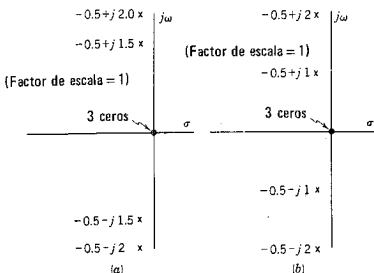


Fig. P13-19.

- 13-20. Demuestre que el ancho de banda B varía inversamente con la Q del circuito, para un circuito RLC en serie.
- 13-21. Demuestre que, para una red RLC en serie, el producto de $|Y|_{\max}$ y el ancho de banda B es igual a $1/L$, siendo L la inductancia.
- 13-22. Los dos polos y ceros que se señalan en el plano s del siguiente dibujo corresponden a la función de transferencia de una red de dos pares de terminales, $G(s) = V_2(s)/V_1(s)$. El cero se encuentra sobre el eje real en una posición que corresponde a la misma parte real de los polos. Los polos tienen posiciones que corresponden a $\zeta = 0.707$ ($\theta = 45^\circ$); ω_n es la distancia del origen a los polos; tal como se indica. En este problema se investigará el efecto del cero finito por computaciones con y sin el cero. (a) El ancho de banda del sistema se modifica a partir de la definición que se da en el capítulo con el rango de frecuencias de $\omega = 0$ al punto de media potencia. Compute el ancho de banda del sistema con la configuración de polos-ceros antes indicada; compute el ancho de banda al eliminar el cero. ¿En qué caso es mayor el ancho de banda y en qué factor? Se sugiere elaborar una construcción gráfica.
- 13-23. El valor de Q de una red RLC en serie en resonancia es 10. La amplitud máxima de la corriente a la frecuencia de resonancia es 1 amp cuando la

Problemas 467

amplitud máxima del voltaje que se aplica es 10 V. Si $L = 0.1$ H, determine el valor de C en microfarads.

- 13-24. Una bobina que se está probando se puede representar por el modelo de L en serie con R . La bobina se conecta en serie con un capacitor calibrado, y luego se conecta a ella un generador de onda senoidal de 10 V de amplitud máxima y una frecuencia $\omega = 1000$ radianes/seg. El capacitor se hace variar y se encuentra que la corriente es máxima cuando $C = 100 \mu\text{F}$. De la misma manera, cuando $C = 12.5 \mu\text{F}$, la corriente es 0.707 del valor máximo. Encuentre el valor Q de la bobina para $\omega = 1000$ radianes/seg.
- 13-25. Se encuentra que la red de la figura tiene la impedancia de punto impulsor:

$$Z(s) = \frac{10^6(s+1)}{(s+1+j100)(s+1-j100)}$$

De acuerdo con estos datos, determine los valores de R_1 , R_2 , L y C .

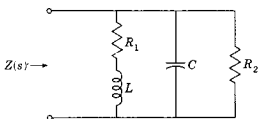


Fig. P13-25.

- 13-26. Para la siguiente función de red, grafique la respuesta de magnitud asintótica de línea recta y la respuesta de fase. Utilice papel semilogarítmico de 4 ó 5 ciclos.

$$G(s) = \frac{100}{s(1+0.01s)(1+0.001s)}$$

- 13-27. Se da función de red

$$G(s) = \frac{(1+0.1s)(1+0.01s)}{(1+s)(1+0.001s)}$$

Grafique la respuesta de magnitud asintótica en línea recta y la respuesta de fase. Use papel semilogarítmico de 4 ó 5 ciclos.

- 13-28. Haga la gráfica de la respuesta de magnitud asintótica de línea recta y el ángulo de fase para la función de red

$$G(s) = 100 \frac{s^2}{(1+0.17s)(1+0.53s)}$$

Use papel semilogarítmico de 3 ó 4 ciclos.

- 13-29. (a) Grafique la respuesta de magnitud asintótica de línea recta y (b) determine la respuesta real (o verdadera) de la función de red:

$$G(s) = 1000 \frac{(1+0.25s)(1+0.1s)}{(1+s)(1+0.025s)}$$

(c) En el mismo sistema de coordenadas, grafique la respuesta de fase. Use papel semilogarítmico de 4 ó 5 ciclos para esta gráfica.

- 13-30. Repita el problema 13-29 para las siguientes funciones de red:

(a) $G(s) = 50 \frac{(1+0.025s)}{s(1+0.05s)}$

$$(b) G(s) = \frac{1000s}{(1 + 0.01s)(1 + 0.0025s)}$$

$$(c) G(s) = 180 \frac{s(1 + 0.01s)}{(1 + 0.05s)(1 + 0.001s)}$$

- 13-31. (a) Grafique la respuesta de magnitud asintótica de línea recta, y (b) determine la curva de respuesta real (o verdadera) para la función de red

$$G(s) = 120 \frac{(1 + 0.2s)}{s(s^2 + 2s + 10)}$$

(c) Grafique la respuesta de fase en el mismo sistema de coordenadas. Utilice papel semilogarítmico de 3 ó 4 ciclos.

- 13-32. Repita el procedimiento del problema 13-31 para las siguientes funciones de red:

$$(a) G(s) = 1000 \frac{s}{(1 + 0.001s)(1 + 4 \times 10^{-2}s + 10^{-4}s^2)}$$

$$(b) G(s) = \frac{100s}{(1 + s + 0.5s^2)(1 + 0.4s + 0.2s^2)}$$

- 13-33. Se pide construir una función de red $G(s)$ que satisfaga las siguientes especificaciones: la curva asintótica debe tener una respuesta de baja frecuencia con una pendiente de 0 db/octava y la respuesta de alta frecuencia con una pendiente de -24 db/octava. La frecuencia de ruptura entre estas dos pendientes se encuentra para $\omega = 1$ radián/seg. A ninguna frecuencia la diferencia entre la respuesta asintótica y la verdadera debe exceder de ± 1 db.

- 13-34. En la siguiente figura se muestran dos segmentos de recta que tienen pendientes de ± 6 db/octava. Las asíntotas de alta y baja frecuencia se extienden indefinidamente y la función de red que representa la respuesta tiene sólo factores de primer orden. Encuentre $G(s)$ y evalúe al multiplicador constante de la función.

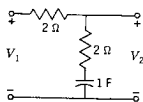


Fig. P13-36.

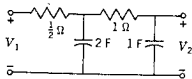


Fig. P13-37.

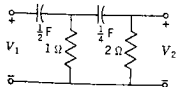


Fig. P13-38.

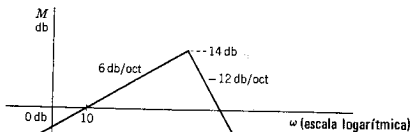


Fig. P13-34.

- 13-35. Repita el problema 13-34 si la respuesta se cambia sólo debido a que la asíntota de alta frecuencia tiene ahora una pendiente de -18 db/octava.
- 13-36. Para la red de dos puertos que se muestra determine V_2/V_1 y grafique la respuesta de magnitud (gráfica de Bode) mostrando tanto la curva asintótica como la verdadera.
- 13-37. Prepare una gráfica de Bode para la función de red V_2/V_1 para la red que se muestra en la figura.
- 13-38. Prepare una gráfica de Bode para la función de transferencia de relación de voltajes $G_{12} = V_2/V_1$ para la red de dos puertos que se muestra.

13-39. En la figura se muestra una red RLC . Grafique la función de transferencia $G_{12} = V_2/V_1$ mostrando tanto la curva asintótica como la verdadera correspondientes a esta red de dos puertos.

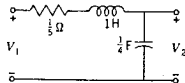


Fig. P13-39.

13-40. Estudie las siguientes funciones de transferencia:

(a) $G(s)H(s) = K \frac{s-1}{s+1}$

(b) $G(s)H(s) = K \frac{s+1}{s-1}$

(c) $G(s)H(s) = \frac{K}{s(1+0.05s)}$

Para cada una de estas funciones: (a) grafique $G(j\omega)H(j\omega)$ en el plano complejo GH , desde $\omega=0$ hasta $\omega=\infty$, con $K=1$. (b) Determine el rango de valores de K que den como resultado un sistema estable, aplicando el criterio de Nyquist.

13-41. Para la gráfica del lugar geométrico que se ilustra en la figura 13-45 dibuje las gráficas correspondientes de Bode para la magnitud y la fase, haciendo alguna suposición en lo que respecta a la escala de frecuencias. Calcule los márgenes de ganancia y fase e indíquelos en las gráficas de Bode.

13-42. Repita el problema 13-41 para la gráfica del lugar geométrico que se ilustra en la figura 13-48.

13-43. Principiando con la gráfica del lugar geométrico que aparece en la figura del problema 13-45, dibuje las gráficas correspondientes de magnitud y fase empleando las coordenadas de Bode. Establezca alguna suposición respecto a la escala de frecuencias a lo largo del lugar geométrico. Indique en la figura los márgenes de ganancia y fase.

13-44. La gráfica de Nyquist de la siguiente figura corresponde a un sistema para el que $P=0$. Analice dicho sistema aplicando el criterio de Nyquist, señalando si el sistema es estable, condicionalmente estable o inestable.

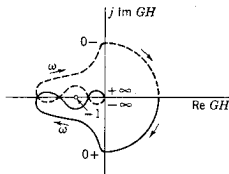


Fig. P13-44.

13-45. La gráfica del lugar geométrico de la figura corresponde a un sistema para el que $P=0$. Se especifica que $A=-0.75$, $B=-1.3$ y $C=-2$.

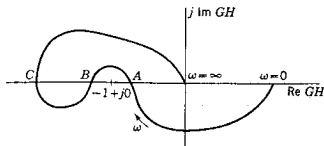


Fig. P13-45.

470 *Gráficas de la respuesta de frecuencia*

Suponiendo que la gráfica se hace para una ganancia K , indique el rango de valores de ganancia para los que el sistema será (a) estable y (b) inestable.

13-46. Repita el problema 13-45 si $P=1$.

13-47. La figura que sigue representa una gráfica del lugar geométrico de un sistema para el que $P=0$. ¿Es estable este sistema? Determine su respuesta a esta pregunta aplicando el criterio de Nyquist. Repita para los casos en que $P=1$ y $P=2$.

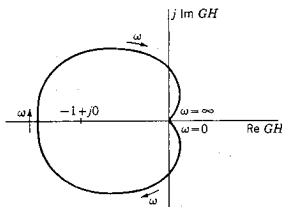


Fig. P13-47.

13-48. La gráfica del lugar geométrico que se muestra en la siguiente figura se ha formulado para un sistema con $P=2$ y dos polos con partes reales positivas. Aplique a este sistema el criterio de Nyquist con el fin de determinar su estabilidad.

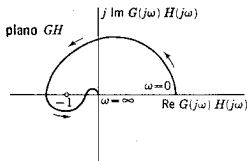


Fig. P13-48.

13-49. La gráfica del lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$ que se muestra en la figura que sigue se hizo para un sistema con $P=0$. Para este sistema, aplique el criterio de Nyquist para estudiar la estabilidad del sistema.

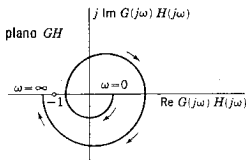


Fig. P13-49.

- 13-50. En la figura que se ilustra a continuación aparece una gráfica del lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$ para $\omega=0$ a $\omega=\infty$. A partir de esta gráfica, determine todos los datos que pueda investigar respecto a $G(s)H(s)$ en forma de un cociente de polinomio en s .

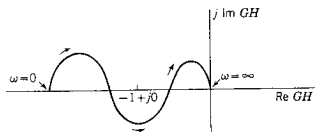


Fig. P13-50.

- 13-51. En la figura que sigue se muestra un sistema de retroalimentación para el que se desarrolló el criterio de Nyquist. Para este problema, sea $H=1$ y

$$G(s) = \frac{K}{(s-a)(s+2)(s+3)}$$

Utilice el criterio de Nyquist para estudiar este sistema en lo que respecta a su estabilidad en el caso en que $a=1$.



Fig. P13-51.

- 13-52. Repita el problema 13-51 si $a=2$.
 13-53. Repita el problema 13-51 si $a=4$.
 13-54. Un sistema se describe mediante las funciones de transferencia que se relacionan con el sistema de la figura P13-51,

$$G(s) = \frac{10^5}{(s+2)(s+10)(s+20)}$$

y $H=1$. Aplique el criterio de Nyquist para determinar si el sistema es estable.

- 13-55. Repita el procedimiento del problema 13-54 para la $G(s)$ que se da, pero para una nueva función de transferencia de retroalimentación,

$$H(s) = \frac{s+20}{20}$$

Esto produce la cancelación en el producto $H(s)G(s)$ y es una forma de *compensación* de un sistema para mejorar su estabilidad. Escriba algunos comentarios acerca de la efectividad de esta función de compensación.

- 13-56. En la figura se muestra el modelo de un amplificador de retroalimentación. Para este sistema, identifique $G(s)$ y $H(s)$ como en la figura P13-51 y exprese cada una de ellas como un cociente de polinomio en s . ¿Puede oscilar este sistema? Aplique el criterio de Nyquist para responder a esta pregunta y para hacer un estudio general de la estabilidad del sistema.

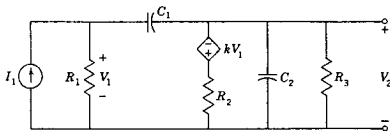


Fig. P13-56.

CAPITULO 14

14 *Potencia de entrada, transferencia de potencia y pérdida de inserción*

En el capítulo 1 se introdujeron los parámetros de circuitos, en función de los conceptos básicos de energía y carga. En éste se analiza más a fondo el importante papel de la energía y su derivada en el tiempo, la potencia, para el análisis y el diseño de redes, y se aplica a redes de uno y dos puertos que funcionan en estado permanente senoidal. Estos estudios son importantes porque la energía cuesta dinero y, por tanto, la transferencia eficiente de la energía de una fuente a la carga (o toma) es vital para el ingeniero. Además, se sabe que una limitación en el diseño del equipo —cuyo tamaño puede variar desde el de un motor de un tren de laminación hasta el de un diminuto diodo o transistor de silicio— es la cantidad de calor que se puede disipar sin producir daños mecánicos.

El orden en que los temas se analizan en este capítulo se puede describir utilizando los modelos de la figura 14-1. En primer lugar se verán las relaciones de potencias para una red general de un puerto,

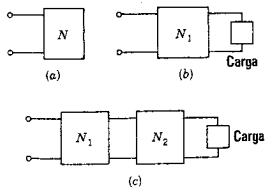


Figura 14-1. Configuraciones de una red general que se estudian en este capítulo: (a) red de un puerto, (b) red de dos puertos que termina en una carga y (c) la red de (b) con otra red N_2 insertada en cascada.

como la que se ilustra en (a), que puede contener cualquier número o conexión de elementos. En la parte (b) de la misma figura una porción de la red se identifica como la *carga* y el resto de ella se convierte en red de dos puertos; el problema consiste aquí en estudiar la transferencia de potencia de la fuente a la carga. Por último, se ampliará el estudio de la transferencia de potencia para abarcar el efecto de insertar una nueva red en cascada con una de dos puertos, como se ilustra en (c) de la figura 14-1, y determinar la pérdida (o ganancia) de potencia en la carga debido a esta inserción.

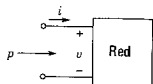


Figura 14-2. Red de un puerto en los sentidos de referencia de i y v , para definir la p positiva.

14-1. ENERGIA Y POTENCIA

Considérese la red de un puerto de la figura 14-2. Las relaciones de energía y potencia para esta red de un puerto, que se escriben a continuación, se aplican a elementos que son lineales o no lineales, activos o pasivos. La energía que absorbe la red del tiempo t_1 al t_2 es

$$w = \int_{t_1}^{t_2} v(t)i(t) dt \quad \text{J (joules)} \quad (14-1)$$

La rapidez con que se absorbe la energía es la potencia que se expresa por

$$p = \frac{dw}{dt} = v(t)i(t) \quad \text{W (watts)} \quad (14-2)$$

como se derivó en las ecuaciones (1-5) y (1-6). La convención para el sentido de referencia del flujo de energía se ilustra en la figura 14-2. Para las referencias de voltaje y corriente que se muestran, una p positiva indica un flujo de energía hacia la red y una p negativa señala que el flujo de energía sale de ella. Por supuesto, el sentido de este flujo puede cambiar con el tiempo y dependerá sólo del signo de p . Si la referencia del voltaje o la corriente se invierte, también sucede lo mismo con la referencia para el flujo de energía.

A continuación se especificarán los resultados generales de las ecuaciones (14-1) y (14-2) para el caso de un solo elemento lineal en la red de la figura 14-2 y también para el caso en que el voltaje y la corriente sean senoidales y que la red se encuentre en estado permanente.

Para el resistor $v = Ri$ y la energía que absorbe

$$w_R = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{v^2(t)}{R} dt \quad (14-3)$$

y la potencia

$$p_R = Ri^2(t) = \frac{v^2(t)}{R} \quad (14-4)$$

Para una corriente senoidal, $i = I_m \text{ sen } \omega t$ y para $t_1 = 0$, la ecuación (14-3) da

$$\begin{aligned} w_R &= \int_0^{t_1} R I_m^2 \text{ sen}^2 \omega t \, dt = \frac{R I_m^2}{2} \int_0^{t_1} (1 - \cos 2\omega t) \, dt \\ &= \frac{R I_m^2}{2} \left(t - \frac{\text{sen } 2\omega t}{2\omega} \right) \text{ J} \end{aligned} \quad (14-5)$$

para cualquier tiempo, $t = t_2$. De igual manera, de acuerdo con la ecuación (14-4) se tiene que

$$p_R = R I_m^2 \text{ sen}^2 \omega t = \frac{R I_m^2}{2} (1 - \cos 2\omega t) \text{ W} \quad (14-6)$$

La variación en función del tiempo de las cuatro cantidades, v_R , i_R , w_R y p_R , se ilustra en la figura 14-3. Se observará que p_R varía con una frecuencia que es el doble de la frecuencia de v_R e i_R , que tanto p_R como w_R son siempre positivas y que w_R aumenta a un valor muy grande con el transcurso del tiempo.

La energía que entra a un inductor para almacenarse se puede terminar substituyendo $v = L \, di/dt$ en la ecuación (14-1), lo cual da

$$\begin{aligned} w_L &= \int_{i_1}^{i_2} L \frac{di}{dt} i \, dt = \int_{i_1}^{i_2} L i \, di \\ &= \frac{1}{2} L (i_2^2 - i_1^2) \text{ J} \end{aligned} \quad (14-7)$$

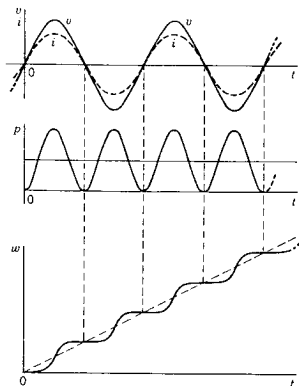


Figura 14-3. Variación de v , i , p y w para un resistor, con excitación senoidal.

en donde i_1 e i_2 son las corrientes para t_1 y t_2 . Si se hace que $i_1 = 0$ para $t_1 = 0$, y si $i_2 = I_m \text{ sen } \omega t$, entonces,

$$w_L = \frac{1}{2}LI_m^2 \text{sen}^2 \omega t = \frac{1}{4}LI_m^2(1 - \cos 2\omega t) \quad (14-8)$$

y la potencia es

$$\begin{aligned} p_L &= (LI_m\omega \cos \omega t)(I_m \text{sen } \omega t) \\ &= LI_m^2\omega \text{sen } \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2}LI_m^2\omega \text{sen } 2\omega t \quad \text{W} \end{aligned} \quad (14-9)$$

Las cuatro cantidades v_L , i_L , w_L y p_L para el caso de un inductor se ilustran en la figura 14-4. También en este caso w_L y p_L varían con una frecuencia que es el doble de la frecuencia de v_L e i_L , pero en esta ocasión el valor máximo de w_L es el mismo para cada ciclo.

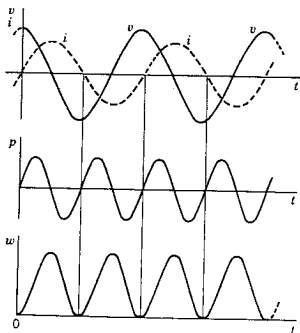


Figura 14-4. Variación de v , i , p y w para un inductor, con excitación senoidal.

Por último, la energía que entra a un capacitor para su almacenamiento se determina substituyendo $i = C dv/dt$ en la ecuación (14-1), para obtener

$$\begin{aligned} w_C &= \int_{t_1}^{t_2} C \frac{dv}{dt} v dt = \int_{v_1}^{v_2} C v dv \\ &= \frac{1}{2}C(v_2^2 - v_1^2) \quad \text{J} \end{aligned} \quad (14-10)$$

en donde v_1 y v_2 son los voltajes para t_1 y t_2 . De nuevo se hace que $v_1 = 0$ para $t_1 = 0$ y $v_2 = V_m \text{ sen } \omega t$, de tal manera que

$$w_C = \frac{1}{2}CV_m^2 \text{sen}^2 \omega t = \frac{1}{4}CV_m^2(1 - \cos 2\omega t) \quad (14-11)$$

y la potencia es

$$\begin{aligned} p_C &= (V_m \sin \omega t)(CV_m \omega \cos \omega t) \\ &= CV_m^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} CV_m^2 \omega \sin 2\omega t \end{aligned} \quad (14-12)$$

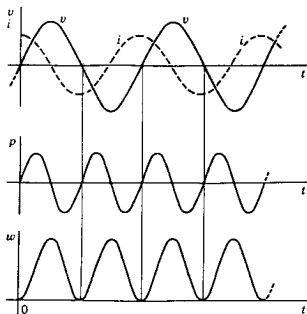


Figura 14-5. Variación de v , i , p y w para un capacitor, con excitación senoidal.

Las variaciones en el tiempo de v_C , i_C , p_C y w_C para el caso del capacitor se ilustran en la figura 14-5. Las relaciones que se muestran en esta figura son similares a las que se encontraron para el inductor.¹

La figura 14-6 recuerda que las ecuaciones (14-1), (14-2), (14-3), (14-4), (14-7) y (14-10) son generales y se aplican a la corriente y al voltaje en las terminales de punto impulsor de cualquier red de un puerto de la figura 14-2. La mayoría de las relaciones que se indican más adelante, en este capítulo, se especializan para el caso de estado permanente senoidal. ¡A menos que se satisfagan estas condiciones especiales, se deberán utilizar las relaciones generales!

A continuación se compararán los resultados obtenidos para los tres elementos con la restricción del estado permanente senoidal. En primer lugar se observará que las variaciones de energía y potencia del inductor y el capacitor tienen la misma forma. El valor medio de $p(t)$ en n períodos de duración T es la integral de $p(t)$ desde $t = 0$, hasta $t = nT$ dividida entre nT . Puesto que la integral es cero para cada

¹ Para determinar p_L se hace que $i_2 = I_m \sin \omega t$, mientras que para encontrar p_C , $v_2 = V_m \sin \omega t$. Si se hubiera hecho que $i_2 = I_m \sin \omega t$ para ambos casos, entonces p_C de la ecuación (14-12) se multiplicaría por -1 y el signo de la ecuación (14-11) sería $+$.

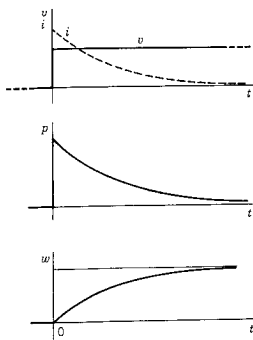


Figura 14-6. v e i no senoidales y las gráficas correspondientes de p y w .

ciclo, se observa que, para estos elementos, el valor medio de la potencia es cero:

$$[p_L(t)]_{\text{media}} = [p_C(t)]_{\text{media}} = 0 \quad (14-13)$$

Sin embargo, para el resistor la potencia media es la mitad del valor pico y

$$[p_R(t)]_{\text{media}} = \frac{1}{2} R I_m^2 \quad (14-14)$$

La energía es la integral de la potencia. Utilizando la convención de signos que se ilustra en la figura 14-2, se ve que, para una p positiva, se está proporcionando energía al inductor y al capacitor, para su almacenamiento. Cuando p es negativa, la energía se está devolviendo a la fuente. Por supuesto, se sabe que no se puede devolver más energía de la que se proporcionó y el hecho de que w vuelva al valor 0 en cada ciclo del voltaje y de la corriente significa que la energía proporcionada se devuelve por completo en cada ciclo para el inductor y el capacitor. Por tanto,

$$\Delta w_L \text{ por ciclo} = \Delta w_C \text{ por ciclo} = 0 \quad (14-15)$$

Ahora, la resistencia absorbe energía que se disipa en forma de calor (o se convierte en energía en otra forma). Si T es el período de v e i , entonces

$$\Delta w_R = R \int_0^T i^2(t) dt = \frac{1}{2} R I_m^2 T \quad (14-16)$$

es la energía suministrada en cada ciclo.

La red de un puerto de la figura 14-2 puede contener cualquier número de elementos de cada uno de los tres tipos. Puesto que la energía es una cantidad escalar y se conserva, la energía que se proporcione al puerto único w_t debe ser igual al total de energía almacenada más la que se disipa en la red. Entonces, si se tienen n elementos en la red de un puerto,

$$w_t = w_1 + w_2 + \dots + w_n \quad (14-17)$$

en donde cualquier término w_j es la energía almacenada o disipada correspondiente a dicho elemento. La potencia total se encuentra diferenciando la ecuación (14-17), lo cual da²

$$p_t = p_1 + p_2 + \dots + p_n \quad (14-18)$$

14-2. VALORES EFICACES O DE RAÍZ MEDIA CUADRÁTICA

El valor eficaz I_{ef} de una corriente periódica $i(t)$ se define como el valor constante de corriente que producirá la misma potencia en un resistor que la que produce como promedio la corriente periódica. La potencia en un resistor debida a una corriente constante I es

$$p = I^2 R \quad (14-19)$$

En el estado permanente senoidal, la potencia promedio o media en el resistor está dada por la ecuación (14-14) y es

$$p_{media} = [P_R(t)]_{media} = \frac{1}{2} R I_m^2 \quad (14-20)$$

Igualando p y p_{media} , $I = I_{ef}$ es

$$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (14-21)$$

Puesto que $p = V^2/R$ y $V_m = R I_m$ para el resistor, también se puede escribir

$$V_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad (14-22)$$

Para una corriente no senoidal pero periódica, $i(t)$ de período T , la potencia media es

$$P_{media} = \left[\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} R i^2(t) dt \right] \quad (14-23)$$

² Se puede escribir esta ecuación en forma compacta como sigue: $\sum_{k=1}^n v_k i_k$, o bien, en forma matricial, $v^T i$, en donde v e i son matrices columna y T indica que es transpuesta.

Otra vez, igualando P_{media} a p de la ecuación (14-9), se puede despejar I cuando $I = I_{ef}$, lo cual da

$$I_{ef} = \left[\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) dt \right]^{1/2} \quad (14-24)$$

Esta ecuación se puede considerar como la expresión que define el valor eficaz para cualquier función periódica. En consecuencia, el valor eficaz del voltaje de período T es

$$V_{ef} = \left[\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t) dt \right]^{1/2} \quad (14-25)$$

Las operaciones de las ecuaciones (14-24) y (14-25) incluyen la extracción de la raíz cuadrada y del valor medio (promedio) del cuadrado de la función $i^2(t)$ y se ha formulado un nombre descriptivo para el valor resultante, que es el de *raíz media cuadrática*, que se abrevia como rmc. Por tanto, se tiene una notación equivalente que se puede ilustrar para la onda senoidal utilizando las ecuaciones (14-21) y (14-22):

$$I_{rmc} = I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0.707 I_m \quad (14-26)$$

y

$$V_{rmc} = V_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \approx 0.707 V_m \quad (14-27)$$

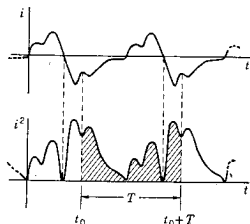
Una razón de la importancia del valor eficaz o rmc de una función periódica es que se construyen muchos voltímetros y amperímetros para tomar lecturas de estos valores. Cuando el voltaje de un enchufe se describe diciendo que es de 110 V, se implica que éste es su valor rmc; el valor máximo del voltaje es $\sqrt{2}$ mayor o 156 volts. Una convención que facilita la escritura de una ecuación en función del valor rmc se ilustra por medio de

$$v(t) = 110\sqrt{2} \text{ sen}(\omega t + \phi) \quad (14-28)$$

para el voltaje de un enchufe.

El valor rmc de una $i(t)$ no senoidal pero periódica se determina aplicando la ecuación (14-24), mediante las operaciones que se describen en la figura 14-7. En la figura se representa a $i(t)$ y el valor correspondiente de $i^2(t)$. La zona sombreada de la figura es la integral de i^2 durante un período. Si el número correspondiente a esta área se divide por la base T , al sacar la raíz cuadrada de este cociente, se obtiene el valor rmc para $i(t)$.

Figura 14-7. Formas de onda convenientes para la determinación del valor rmc o eficaz de una función no senoidal pero periódica.



EJEMPLO 1

La forma de onda que se ilustra en la figura 14-8 es la que produce un rectificador de media onda. No es necesario utilizar la ecuación (14-24) para determinar el valor rmc de esta corriente, puesto que se puede ver directamente que el área de $i^2(t)$ durante un período es la mitad de la de la onda senoidal regular. Así, utilizando la ecuación (14-26) se tiene que

$$I_{\text{rmc}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (I_{\text{rmc}} \text{ del seno}) = \frac{I_M}{2} \quad (14-29)$$

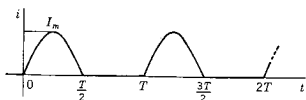


Figura 14-8. Onda senoidal con rectificación de media onda para la que se calculó el valor rmc en el ejemplo 1.

EJEMPLO 2

La forma de onda de la figura 14-9 se puede describir durante el período de 0 a 2 por medio de la expresión

$$i(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 1, & 1 < t < 2 \end{cases} \quad (14-30)$$

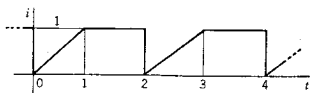


Figura 14-9. Forma de onda que se considera en el ejemplo 2.

Substituyendo los valores numéricos en la ecuación (14-24) se obtiene

$$I_{\text{rnc}} = \left[\frac{1}{2} \left(\int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 dt \right) \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + 1 \right) \right]^{1/2} \quad (14-31)$$

$$= 0.816 \text{ amp}$$

14-3. POTENCIA MEDIA Y POTENCIA COMPLEJA

Se ha demostrado que la potencia media en un resistor es

$$P_{\text{media}} = \frac{1}{2} I_m^2 R = \frac{1}{2} V_m^2 \frac{1}{R} \quad \text{W} \quad (14-32)$$

Esto se puede expresar ahora en función del voltaje y la corriente rnc como sigue:

$$P_{\text{media}} = I_{\text{rnc}}^2 R = \frac{V_{\text{rnc}}^2}{R} \quad \text{W} \quad (14-33)$$

En esta sección se determinan algunas fórmulas equivalentes para P_{media} y también se generaliza P_{media} para potencia compleja.

La red de un puerto de punto impulsor, suponiendo que no contiene fuentes independientes. Esta impedancia es

$$Z(j\omega) = R + jX = |Z| e^{j\theta_z} \quad (14-34)$$

En este caso se observa que

$$R = \text{Re } Z(j\omega) = |Z| \cos \theta_z \quad (14-35)$$

de tal modo que la ecuación (14-33) se convierte en

$$P_{\text{media}} = I_{\text{rnc}}^2 |Z| \cos \theta_z = V_{\text{rnc}} I_{\text{rnc}} \cos \theta_z \quad (14-36)$$

que es una expresión especialmente conveniente para P_{media} . En esta ecuación $\cos \theta_z = fp$ se define como el *factor de potencia*, con la convención de que se diga que es *adelantado* si la corriente está adelantada con respecto al voltaje y *atrasado* si la corriente está atrasada con respecto al voltaje. Por tanto, un factor de potencia de 0.8 atrasado implica que la corriente está atrasada con respecto al voltaje por $\cos^{-1} 0.8 = 36.8^\circ$

A continuación se determinará la ecuación (14-36) a partir de los fasores de voltaje y corriente, V e I , que se supone *están a escala de valores rnc*, mediante una división entre $\sqrt{2}$. Sean estos fasores

$$I = I e^{j\omega t} \quad \text{y} \quad V = V e^{j\omega t} \quad (14-37)$$

de tal manera que

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V}{I} e^{j(\beta - \alpha)} \quad (14-38)$$

Comparando las fases de las ecuaciones (14-34) y (14-38) se determina

$$\beta - \alpha = \theta_z \quad (14-39)$$

que es el ángulo de la ecuación (14-36). Ahora, el ángulo del producto de V e I es $\beta + \alpha$. Puesto que se requiere $\beta - \alpha$, el producto apropiado es el de V y el conjugado de I . Por tanto, se ve que la ecuación (14-36) se puede escribir como sigue:

$$P_{\text{media}} = \text{Re } \mathbf{V I}^* \quad (14-40)$$

La experiencia ha mostrado que al hacer cálculos de potencia conviene definir una parte imaginaria de $\mathbf{V I}^*$ que se identifica como Q ; por tanto,

$$Q = \text{Im } \mathbf{V I}^* \quad (14-41)$$

y la suma fasorial es

$$\mathbf{S} = P_{\text{media}} + jQ = \mathbf{V I}^* \quad (14-42)$$

en donde \mathbf{S} se conoce como *potencia* (o *fasor*) *compleja*. Puesto que $Q = \text{Im } \mathbf{S} = \text{Im } \mathbf{V I}^*$, se puede escribir en una forma similar a la ecuación (14-36), que es

$$Q = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \text{ sen } \theta_z \text{ vars} \quad (14-43)$$

Esta cantidad se conoce como *potencia reactiva*. La unidad de la potencia reactiva es el *volt-ampère reactivo*, o *var*. A Q se le asigna un signo para distinguir la potencia reactiva para el inductor de la del capacitor; la del inductor es positiva y la del capacitor es negativa. La unidad para la magnitud de la potencia compleja de la ecuación (14-42) que es

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \text{ va} \quad (14-44)$$

es el *volt-ampère*, o simplemente *va*. También se conoce con el nombre de potencia aparente, siendo el producto de la lectura del voltímetro y la lectura del amperímetro.

Existen otras expresiones útiles para resolver problemas de potencia. A partir de $\mathbf{I} = \mathbf{Y V}$,

$$\mathbf{S} = \mathbf{V I}^* = \mathbf{V V}^* \mathbf{Y}^* = |\mathbf{V}|^2 \mathbf{Y}^* \quad (14-45)$$

484 Potencia entrada, transferencia potencia, pérdida inserción

Si se hace que $Y = G + jB$, de tal modo que $Y^* = G - jB$, se observa que

$$P_{\text{media}} + jQ = |V|^2 (G - jB) \quad (14-46)$$

Igualando las partes real e imaginaria se obtiene

$$P_{\text{media}} = V_{\text{rnc}}^2 G \quad W \quad (14-47)$$

y

$$Q = -V_{\text{rnc}}^2 B \quad \text{vars} \quad (14-48)$$

De manera similar

$$S = VI^* = I I^* Z = |I|^2 Z \quad (14-49)$$

Puesto que $Z = R + jX$ se obtiene

$$P_{\text{media}} = I_{\text{rnc}}^2 R \quad W \quad (14-50)$$

y

$$Q = I_{\text{rnc}}^2 X \quad \text{vars} \quad (14-51)$$

Por supuesto, se sobreentiende que todos los voltajes y todas las corrientes están en valores rnc, pero el subíndice rnc se incluye en estas ecuaciones para darles mayor realce.

A continuación se da otro grupo de relaciones útiles por razones similares a las que se dieron para llegar a la ecuación (14-18) de la sección 14-1. La potencia media es una cantidad escalar que es siempre positiva. El total de potencia media que se proporciona a una red de un puerto a partir de la fuente es la suma de las P_{media} de cada elemento de la red. En consecuencia,

$$P_{\text{media Total}} = P_{\text{media}_1} + P_{\text{media}_2} + \dots + P_{\text{media}_n} \quad (14-52)$$

si se tienen n elementos en la red. La potencia reactiva se puede sumar de un modo similar, a condición de que se tome en cuenta el signo de cada valor. Por tanto,

$$Q \text{ Total} = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n \quad (14-53)$$

La suma de las últimas dos ecuaciones da el resultado general

$$S \text{ Total} = S_1 + S_2 + \dots + S_n \quad (14-54)$$

EJEMPLO 3

La red que se muestra en la figura 14-10 está excitada por una fuente de corriente

$$i_1 = 5\sqrt{2} \text{ sen } 2t \quad (14-55)$$

y opera en estado permanente. En primer lugar, se determinará la impedancia de punto impulsor de la red, de un puerto, como se indica en la parte (b) de esta figura. El resultado es $Z(j2) = 3 + j/3$. Entonces

$$P_{\text{media}} = I_{\text{rnc}}^2 \text{Re } Z = 25 \times 3 = 75 \text{ W} \quad (14-56)$$

$$Q = I_{\text{rnc}}^2 \text{Im } Z = 25 \times \frac{1}{3} = 25/3 \text{ vars} \quad (14-57)$$

y

$$S = 75 + j\frac{25}{3}, \quad |S| = 75.4 \text{ va} \quad (14-58)$$

de tal manera que

$$V_{\text{rnc}} = \frac{75.4}{5} = 15.1 \text{ V} \quad (14-59)$$

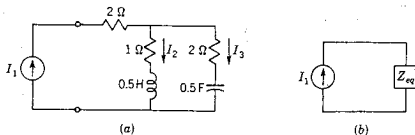


Figura 14-10. Red del ejemplo 3.

El factor de potencia es

$$\text{fp} = \cos \theta_z = \cos \tan^{-1} \frac{1}{3} = 0.994 \text{ adelantado} \quad (14-60)$$

Obsérvese que el análisis se puede completar de acuerdo con la suma de la ecuación (14-54). Las tres corrientes de rama de la red que se pueden determinar mediante un análisis de rutina. Son

$$I_1 = 5, \quad I_2 = \frac{10\sqrt{5}}{6}, \quad \text{e} \quad I_3 = \frac{10\sqrt{2}}{6} \text{ amp} \quad (14-61)$$

La potencia media total se encuentra sumando la potencia en los tres resistores, lo cual da

$$P_{\text{media Total}} = 50 + \frac{500}{36} + \frac{400}{36} = 75 \text{ W} \quad (14-62)$$

Del mismo modo, la potencia reactiva da la suma siguiente:

$$Q_{\text{Total}} = \frac{500}{36} - \frac{200}{36} = \frac{25}{3} \text{ vars} \quad (14-63)$$

lo cual concuerda con las ecuaciones (14-56) y (14-57).

14.4. PROBLEMAS DE OPTIMIZACION DE LA TRANSFERENCIA DE POTENCIA

En esta sección se estudian varios problemas que se encuentran al optimizar la transferencia de la potencia media, de la fuente a la carga. Se supondrá que cierta porción de la red se identifica como *la carga*, que consiste en uno o más elementos y esa carga se conecta a la fuente a través de una red de dos puertos, como la que se ilustra en la figura 14-11(a). En muchos casos será conveniente tomar en cuenta la red equivalente de Thévenin de la red y la fuente, como se vio en el capítulo 9 y como se ilustra en (b) de la figura.

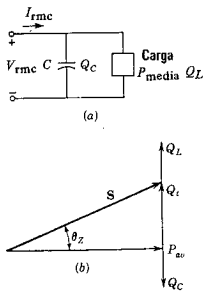


Figura 14-12. (a) Red y (b) el diagrama fasorial correspondiente a la corrección del factor de potencia.

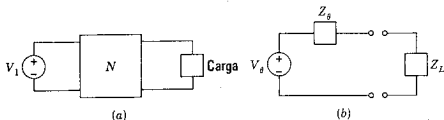


Figura 14-11. Una red de dos puertos con carga y su red equivalente de Thévenin.

Corrección del factor de potencia. El problema de la corrección del factor de potencia se puede describir en función de la red de la figura 14-12. Se supone que la carga es fija (o determinada) y la potencia en la carga es $P_{\text{media}} + jQ_L$. La carga industrial típica es resistiva e inductiva, lo que significa que Q_L es positiva. En este caso el objetivo consiste en introducir en la red un valor negativo de Q_C para anular parte de Q_L o toda ella. Esto se logra por medio de un capacitor que se conecta en paralelo, para que el voltaje terminal en la carga permanezca invariante. Puesto que

$$|S| = \sqrt{P_{\text{media}}^2 + Q_t^2} = V_{\text{r}mc} I_{\text{r}mc} \quad (14-64)$$

en donde $Q_t = Q_L - Q_C$, se observa que, al reducir Q_t , se reduce el producto $V_{\text{r}mc} I_{\text{r}mc}$, de tal manera que, para un voltaje terminal fijo, la corriente en la carga combinada se reducirá también. Considerado desde otro punto de vista, la Compañía de Luz y Fuerza cobra por P_{media} y por Q_t , ya sea directamente o en términos de una multa

Problemas de optimización de la transferencia de potencia 487

por un valor elevado de Q_L . Por tanto, es económicamente ventajoso reducir Q_L .

El factor de potencia es una medida de la magnitud relativa de Q_L y P_{media} , ya que

$$\theta_z = \tan^{-1} \frac{Q_L}{P_{media}} \quad (14-65)$$

El factor de potencia es el coseno de este ángulo, o bien

$$fp = \cos \theta_z = \frac{P_{media}}{V_{rms} I_{rms}} = \frac{P_{media}}{\sqrt{P_{media}^2 + Q_L^2}} \quad (14-66)$$

Por tanto, un factor de potencia cercano a la unidad implica que $|Q_L| \ll P_{media}$ mientras que un factor de potencia cercano a cero implica que $P_{media} \ll |Q_L|$. Utilizando la ecuación (14-66) se puede determinar el factor de potencia antes de la corrección y también especificar el valor de Q_L que se requiere para producir el factor de potencia deseado. El problema concluye determinando $Q_C = Q_L - Q_L$, y puesto que

$$Q_C = -V_{rms}^2 B_C = -V_{rms}^2 \omega C \quad (14-67)$$

y se determina el valor del capacitor a partir de

$$C = \frac{Q_C}{-V_{rms}^2 \omega} \quad (14-68)$$

En la parte (b) de la figura se ilustra un diagrama fasorial presentando a los componentes de la potencia compleja para la red de la figura 14-12(a).

EJEMPLO 4

Para una carga que opera a un voltaje específico, $P_{media} = 500$ W y $Q = 500$ vars. El factor de potencia es $\cos \tan^{-1} 1 = 0.707$ atrasado (de acuerdo con el signo positivo de Q). Se desea corregir el factor de potencia a 0.9 atrasado, conectando un capacitor como se hizo en la figura 14-12. De acuerdo con la ecuación (14-66), Q_L debe ser 244 vars, lo cual significa que $Q_C = 244 - 500 = -256$ vars, que debe proporcionar el capacitor. La capacitancia requerida se puede determinar a partir de la ecuación (14-68), cuando se especifican V_{rms} y ω .

Adaptación de impedancias para máxima transferencia de potencia.

Primero se vuelve a dibujar la red de la figura 14-11(b) en la forma que se indica en la figura 14-13, utilizando la notación que se seguirá durante el resto del capítulo.

En este caso V_1 y Z_1 son ya sea el voltaje del generador y la impedancia interna del generador, o bien el equivalente de Thévenin para una red de dos puertos más complicada, que puede contener

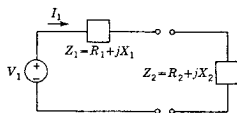


Figura 14-13. Red para la que se deben encontrar las condiciones para una máxima transferencia de potencia a R_2 .

fuentes internas. Se supondrá que la impedancia de la carga $Z_2 = R_2 + jX_2$ tiene una naturaleza tal que R_2 y X_2 se pueden hacer variar en forma individual. Se desea determinar el valor de R_2 y X_2 que proporcionen la máxima transferencia de potencia a la carga. La corriente fasorial es

$$I_1 = \frac{V_1}{Z_1 + Z_2} \quad (14-69)$$

cuya magnitud al cuadrado, si se multiplica por R_2 , da la potencia en la carga

$$P_2 = I_1^2 R_2 = \frac{V_1^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} \quad (14-70)$$

Primero se considerará que R_2 es una constante y se determinará el valor de X_2 que maximizará a P_2 , la potencia media en R_2 . Al derivar la ecuación (14-70) se obtiene

$$\frac{dP_2}{dX_2} = V_1^2 R_2 \left\{ \frac{-2(X_1 + X_2)}{[(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2]^2} \right\} \quad (14-71)$$

Para que esta derivada sea cero y, por tanto, P_2 sea máxima, es necesario que

$$X_2 = -X_1 \quad (14-72)$$

Substituyendo este valor en la ecuación (14-70) se obtiene

$$P_2 = \frac{V_1^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \quad (14-73)$$

Utilizando esta ecuación se puede verificar que $dP_2/dR_2 = 0$ requiere que

$$R_2 = R_1, \quad R_1 \text{ y } R_2 \text{ positiva} \quad (14-74)$$

Por tanto, la máxima transferencia de potencia se logra cuando los componentes reactivos de Z_1 y Z_2 se anulan y cuando los componentes reales son iguales. Las ecuaciones (14-72) y (14-74) se pueden combinar en un solo requisito que es

$$Z_2 = Z_1^* \quad (14-75)$$

Con las impedancias ajustadas en esta forma, se dice que existe un *pareo conjugado* de impedancias.

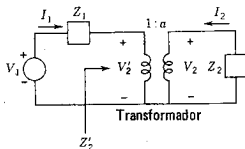


Figura 14-14. En esta red el transformador se puede ajustar para maximizar la potencia a $R_2 = \text{Re}Z_2$.

Ajuste de un transformador para máxima transferencia de potencia. Sea la red de la figura 14-14, que es semejante a la de la figura 14-13, con la diferencia de que se ha insertado un transformador entre la carga y la red de dos puertos representados por la fuente V_1 y la impedancia Z_1 . Se considerará que el transformador es *ideal* en el sentido de que se desprecia la inductancia y de magnetización y la inductancia local o de dispersión, así como de las pérdidas internas. Los voltajes y las corrientes de los dos devanados se relacionan en tal forma que $V_1 I_1 = -V_2 I_2$. El problema consiste en maximizar la potencia en la carga si sólo la relación de transformación del transformador es adaptable.

Sea a la relación del voltaje del secundario al primario para el transformador, lo cual significa que $V_2 = aV_2'$. La impedancia de punto impulsor del transformador, en Z_2 , es

$$Z_2' = \frac{1}{a^2} Z_2 \quad (14-76)$$

A continuación se escribe Z_2' en la forma

$$Z_2' = |Z_2'| e^{j\theta} = |Z_2'| \cos \theta + j |Z_2'| \sin \theta \quad (14-77)$$

Luego, la potencia media de R_2' se puede escribir en forma similar a la ecuación (14-70):

$$P_2 = I_1^2 |Z_2'| \cos \theta = \frac{V_1^2 |Z_2'| \cos \theta}{(R_1 + |Z_2'| \cos \theta)^2 + (X_1 + |Z_2'| \sin \theta)^2} \quad (14-78)$$

Ahora sólo la magnitud $|Z_2'|$ es ajustable, haciendo variar a . Si se forma $dP_2/d|Z_2'|$ y se iguala a cero, se obtiene la condición necesaria para P_2 máximo. Es decir, después de algunas simplificaciones algebraicas

$$|Z_2'| = \sqrt{R_1^2 + X_1^2} = |Z_1| \quad (14-79)$$

Entonces, de acuerdo con la ecuación (14-76), se tiene que

$$\frac{1}{a^2} |Z_2| = |Z_1| \quad (14-80)$$

490 Potencia entrada, transferencia potencia, pérdida inserción

lo cual significa que la elección de la relación de transformación

$$a = \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \quad (14-81)$$

hace máxima la potencia media en la carga. No obstante, este ajuste da un valor de P_2 que es menor que el que se obtiene por un pareo conjugado de Z_1 y Z_2 no reales.

Maximización de la eficiencia de transferencia de potencia. El por ciento de eficiencia de la transferencia de potencia se define como

$$\eta_t = \frac{P_2}{P_s} 100\% = \frac{P_2}{P_1 + P_2} 100\% \quad (14-82)$$

en donde P_1 es la potencia media en R_1 , P_2 es la potencia media en R_2 (la carga) y P_s es la potencia suministrada por la fuente. Es evidente que η_t es máxima cuando P_1 sea tan pequeña como sea posible.

Se recordará que para un pareo conjugado $R_1 = R_2$, de tal manera que, en estas condiciones, $\eta_t = 50\%$, lo que significa que P_s se comparte en igual forma entre los dos resistores. Una eficiencia de transmisión de esta índole se puede permitir en sistemas de comunicaciones, pero no se puede tolerar en un sistema de potencia. En sistemas de potencia que incluyen grandes bloques de potencia R_2 es grande en comparación con R_1 , lo cual significa que $P_1 \ll P_2$, de tal modo que la eficiencia sea alta.

14-5. PERDIDA DE INSERCIÓN

Para principiar este estudio del importante tema de la pérdida de inserción véase la red que se ilustra en la figura 14-14, en donde se ha "insertado" un transformador entre la carga y la fuente. Se tomará en cuenta sólo el caso resistivo, haciendo que $Z_1 = R_1$ y $Z_2 = R_2$. De acuerdo con la ecuación (14-81), se puede determinar la relación de transformación del transformador. Por tanto, cuando $a^2 = R_2/R_1$, los resistores parecen iguales para la fuente V_s y se ha maximizado la potencia media en R_2 . Este valor máximo de la potencia en R_2 se designa con el símbolo $P_{2\text{máx}}$ y se puede considerar como la *potencia disponible* para R_2 , en el sentido de que P_2 puede tener este valor en la mejor condición pero no puede ser mayor. El valor de la potencia disponible es

$$P_{2\text{máx}} = \left(\frac{V_s}{2}\right)^2 \frac{1}{R_1} = \frac{V_s^2}{4R_1} \quad (14-83)$$

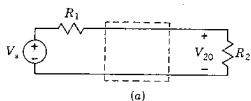
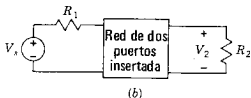


Figura 14-15. La red de resistencias que se ilustra en (a) se modifica por la inserción de una red de dos puertos (que es por lo general sin pérdidas o LC).



Si en el transformador de la figura 14-14 se tiene la red que se muestra en la figura 14-15(a). Para esta red

$$V_{20} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_s \quad (14-84)$$

y la potencia en la carga R_2 es

$$P_{20} = \frac{V_{20}^2}{R_2} = \frac{V_s^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \quad (14-85)$$

Al combinar las ecuaciones (14-83) y (14-85) se obtiene el resultado

$$P_{20} = \frac{4R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} P_2 \text{ máx} \quad (14-86)$$

Se observará que si $R_1 = R_2$, entonces $P_{20} = P_2 \text{ máx}$, lo que concuerda con los resultados de la sección 14-4.

Por último, se estudiará la red de la figura 14-15(b) con una red de dos puertos N insertada entre R_1 y R_2 . Si el voltaje de la carga es V_2 (que no se debe confundir con V_{20}), entonces

$$P_2 = \frac{V_2^2}{R_2} \quad (14-87)$$

La inserción de la red de dos puertos N hace que se reduzca la potencia media de R_2 , lo cual significa que existe una pérdida debido a esta inserción. Obsérvese que no se desprecia la posibilidad de una ganancia en la potencia transmitida a N , pero la ganancia se considerará que la inserción de N , como se hace en la figura 14-15(b), hace que se "refleje" una potencia que podría haber llegado a R_2 . Por definición, esta potencia media reflejada es

$$P_A = P_2 \text{ máx} - P_2 \quad (14-88)$$

La relación de P_R a $P_{2\text{máx}}$ se denomina, muy apropiadamente, el *coeficiente de reflexión* al cuadrado; por tanto,

$$\frac{P_R}{P_{2\text{máx}}} = \frac{P_{2\text{máx}} - P_2}{P_{2\text{máx}}} = 1 - \frac{P_2}{P_{2\text{máx}}} = |\rho|^2 \quad (14-89)$$

en donde $|\rho|^2$ es siempre positivo y

$$\rho(j\omega)\rho(-j\omega) = |\rho(j\omega)|^2 \quad (14-90)$$

y $\rho(j\omega)$ es el coeficiente de reflexión. Substituyendo las ecuaciones (14-87) y (14-83) en la (14-89), se tiene que

$$|\rho|^2 = 1 - \frac{4R_1}{R_2} \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2 \quad (14-91)$$

en donde V_2 y V_1 son magnitudes rmc de V_2 y V_1 .

Del mismo modo, la relación de P_2 a $P_{2\text{máx}}$ se conoce como el *coeficiente de transmisión* al cuadrado (¿qué más podía ser?), y es

$$|t(j\omega)|^2 = \frac{P_2}{P_{2\text{máx}}} = \frac{4R_1}{R_2} \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2 \quad (14-92)$$

Combinando las ecuaciones (14-91) y (14-92) se obtiene

$$|\rho(j\omega)|^2 + |t(j\omega)|^2 = 1 \quad (14-93)$$

En otras palabras, se retorna al postulado de definición:

$$\frac{\text{Potencia reflejada} + \text{potencia transmitida}}{\text{Potencia disponible}} = 1 \quad (14-94)$$

El efecto de insertar la red de dos puertos N en la figura 14-15(b) se caracteriza por la relación de P_{20} a P_2 , que es la relación de potencias de *antes* a *después* de la inserción. Por definición,³ se establece que

$$\frac{P_{20}}{P_2} = e^{2\alpha} \quad (14-95)$$

es la *relación de potencias a la inserción* y α es la *pérdida de inserción* en nepers. En términos de las variables de red,

$$\frac{P_{20}}{P_2} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)^2 \left[\frac{V_2(j\omega)}{V_2(j\omega)} \right]^2 \quad (14-96)$$

o bien

$$\frac{P_{20}}{P_2} = \frac{4R_1R_2}{(R_1 + R_2)^2} \frac{1}{|t(j\omega)|^2} \quad (14-97)$$

³ En la teoría de redes se adopta un punto de vista pesimista y se considera α positiva como pérdida y α negativa como ganancia. En la teoría de amplificadores se utiliza la convención contraria.

Por lo general se acostumbra expresar la pérdida de inserción en decibeles. Entonces

$$\alpha = 10 \log \frac{P_{20}}{P_2} \text{ db} \quad (14-98)$$

o bien, de acuerdo con la ecuación (14-96),

$$\alpha = 20 \log \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{V_1}{V_2} \right) \text{ db} \quad (14-99)$$

Este resultado es importante en el diseño de filtros o igualadores para sistemas de transmisión tales como líneas telefónicas.

EJEMPLO 5

Véase la red de la figura 14-16(a) para la que se desea determinar la pérdida de inserción. De acuerdo con un análisis de rutina, se encuentra que

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \quad (14-100)$$

Substituyendo este resultado en la ecuación (14-96), la relación de potencias a la inserción es

$$\frac{P_{20}}{P_2} = (1 - 2\omega^2)^2 + (2\omega - \omega^3)^2 = 1 + \omega^6 \quad (14-101)$$

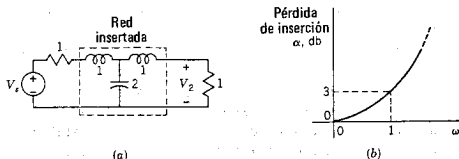


Figura 14-16. (a) Red que se estudia en el ejemplo 5 y (b) Pérdida de inserción calculada en la ecuación (14-102).

de manera que la pérdida de inserción se determina a partir de la ecuación (14-98) y es

$$\alpha = 10 \log (1 + \omega^6) \text{ db} \quad (14-102)$$

que aparece graficada en función de ω en la figura 14-16(b).

14-6. TEOREMA DE TELLEGEN

A continuación se volverá a ver la potencia instantánea que se estudió en la sección 14-1, y la potencia compleja, según se expuso en la sección 14-3, con el fin de introducir el teorema de Tellegen.⁴ Este teorema apareció en 1952, que es una fecha sorprendentemente tardía, en vista de sus importancia fundamental. Como se verá, el teorema de Tellegen tiene un número asombroso de aplicaciones en el estudio de circuitos eléctricos.

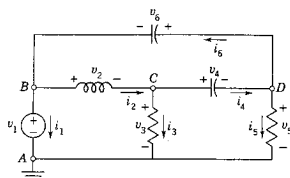


Figura 14-17. Red que se usa en el ejemplo 6 para ilustrar el teorema de Tellegen.

Véase la red que se ilustra en la figura 14-17. En ella se han seleccionado sentidos de referencia arbitrarios para todas las corrientes de rama y se indica el voltaje de rama correspondiente, asignándose el sentido de referencia positivo a la cola de la flecha de la corriente. Para esta red se seleccionará un conjunto de voltajes de rama, siendo el único requisito el que los voltajes satisfagan la ley de voltajes de Kirchhoff. A continuación se *seleccionará* un conjunto de corrientes de rama sin ninguna consideración de la elección anterior de los voltajes de rama, pero con el requisito de que en cada nodo se satisfaga la ley de corrientes de Kirchhoff. Luego se demostrará que esos voltajes y esas corrientes, arbitrariamente escogidos, satisfacen la ecuación

$$\sum_{k=1}^b v_k i_k = 0 \quad (14-103)$$

si se han satisfecho las leyes de voltajes y corrientes de Kirchhoff.

⁴ Este resultado fue anunciado por B. D. H. Tellegen en "A General Network Theorem with Applications", *Philips Research Reports*, 7, 259-269 (1952). Tellegen (1900-) trabaja con los Philips Research Laboratories, en Eindhoven, Holanda, y se ha jubilado como profesor de la Universidad Tecnológica de Delft.

EJEMPLO 6

En la red de la figura 14-17 se escogerá $v_1 = 4$ y $v_2 = 2$. Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff alrededor de la malla $ABCA$ se observa que se requiere que $v_3 = 2$. Del mismo modo, recorriendo la malla $ACDA$ se escoge $v_4 = 3$ y luego se requiere que $v_5 = -1$. En la malla $BCDB$ los valores seleccionados para v_2 y v_4 requieren que $v_6 = -5$. A continuación se aplica sucesivamente la ley de corrientes de Kirchhoff a los nodos B , C y D . En el nodo B , se hace que $i_1 = 2$, $i_2 = 2$ y luego se requiere que $i_6 = 4$. En el nodo C se escoge $i_3 = 4$ y luego se hace necesario que $i_4 = -2$. En el nodo D , i_4 e i_6 quedan seleccionados, de modo que es necesario que $i_5 = -6$. Efectuando las operaciones de la ecuación (14-103) se obtiene

$$(4)(2) + (2)(2) + (2)(4) + (3)(-2) \\ + (-1)(-6) + (-5)(4) = 0 \quad (14-104)$$

verificando la ecuación (14-103) para este ejemplo. Esta información se resume en la tabla 14-1, junto con otro conjunto de corrientes identificadas como i'_k , que satisfacen la ley de corrientes de Kirchhoff para la misma red. De acuerdo con la tabla se observa que la ecuación (14-103) se satisface para la suma de $v_k i'_k$.

Para demostrar que esta suma se aplica en forma general, véase la red de la figura 14-17, que se trazó de nuevo en la figura 14-18. Se

TABLA 14-1.

	Elemento					
Concepto	1	2	3	4	5	6
v_k	4	2	2	3	-1	-5
i_k	2	2	4	-2	-6	4
$v_k i_k$	8	4	8	-6	6	-20
i'_k	-1	3	2	1	-1	2
$v_k i'_k$	-4	6	4	3	1	-10

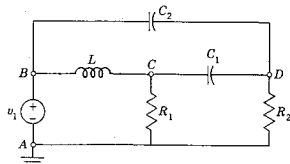


Figura 14-18. Red que se usa para demostrar el método de prueba general del teorema de Tellegen.

considerará esta red específica y luego se observará que lo que se hace para ella conduce al mismo resultado en general. En este estudio se utilizarán los voltajes y las corrientes de nodo a referencia, con subíndice doble para indicar el sentido; por ejemplo, para el inductor entre los nodos B y C , $v_2 i_2 = (v_B - v_C) i_{BC}$. Sumando un producto similar para cada uno de los seis elementos, se obtiene que

$$\sum_{k=1}^6 v_k i_k = v_B i_{AB} + (v_B - v_C) i_{BC} + v_C i_{CA} + (v_C - v_D) i_{CD} \\ + v_D i_{DA} + (v_D - v_B) i_{DB} \quad (14-105)$$

A continuación esta ecuación se reordena, factorizando con respecto a los voltajes de nodo a referencia. En consecuencia,

$$\sum_{k=1}^6 v_k i_k = v_B (i_{AB} + i_{BC} - i_{DB}) + v_C (-i_{BC} + i_{CA} + i_{CD}) \\ + v_D (-i_{CD} + i_{DA} + i_{DB}) \quad (14-106)$$

$$= v_B (\text{KCL en el nodo } B) + v_C (\text{KCL en el nodo } C) \\ + v_D (\text{KCL en el nodo } D) = 0 \quad (14-107)$$

en donde se utiliza la sigla KCL para indicar la ley de las corrientes de Kirchhoff. Cada producto se anula porque cada suma según la ley de las corrientes de Kirchhoff es igual a cero. Aunque éste ha sido un ejemplo específico, el procedimiento que se usa es idéntico al que se puede aplicar para una demostración general. Este es el procedimiento que se usa para establecer el teorema de Tellegen.

Supóngase que se tiene una red como la de la figura 14-18 compuesta de elementos activos y pasivos. Utilizando las dos leyes de Kirchhoff se puede *analizar* la red y determinar los voltajes y las corrientes de las ramas. Esos voltajes y esas corrientes difieren de los que se usaron anteriormente. Para esa situación, los términos y corrientes reales, que resultan de un determinado conjunto de excitaciones. Para esa situación, los términos de productos $v_k i_k$ se identifican como la *potencia instantánea* para al rama k ésima de la red. La ecuación (14-103) indica que la suma de las potencias instantáneas de las b ramas de la red debe ser igual a cero.

Como se vio en el capítulo 1, la potencia instantánea es igual a la rapidez en un instante dado con la que se suministra o consume la energía, $p(t) = dw(t)/dt$. La ecuación (14-103) establece que esta suma debe ser cero, que la energía se debe suministrar a una rapidez tal que sea precisamente igual a la rapidez con que se consume o transforma dicha energía en las resistencias y se almacena en los inductores y los capacitores. Si la red se divide en las dos partes que se ilustran en la figura 14-19, una parte con todas las fuentes de energía y la otra con todos los elementos pasivos, entonces se puede decir que la potencia que suministran o entregan las fuentes independientes de la red debe ser igual a la suma de la potencia que se absorbe (se disipa o se

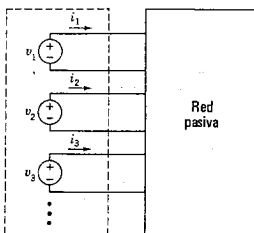


Figura 14-19. La red general se divide en una parte activa y otra pasiva, para estudiar la conservación de la potencia instantánea y de la potencia compleja.

almacena) en todas las demás ramas de la red. Todo esto queda implicado en la ecuación

$$\sum_{k=1}^b v_k i_k = 0 \quad (14-108)$$

A continuación se retorna a la potencia compleja, que se vio en la sección 14-3. Se demostró entonces que si se estudian redes lineales que operan en estado permanente senoidal, la potencia compleja está dada por la ecuación (14-42), que es

$$S = \mathbf{V} \mathbf{I}^* = P_{\text{media}} + jQ \quad (14-109)$$

Al analizar la red en el estado permanente senoidal, el voltaje que varía con el tiempo v_k se substituye con un voltaje fasorial \mathbf{V}_k ; del mismo modo, las corrientes que varían con el tiempo i_k se substituyen por fasores \mathbf{I}_k . Si la ley de voltajes de Kirchhoff se aplica al grupo de voltajes v_k entonces se aplica también al voltaje fasorial derivado \mathbf{V}_k ; asimismo, si la ley de corrientes de Kirchhoff se aplica al grupo de corrientes i_k , también se aplica al grupo de corrientes fasoriales \mathbf{I}_k , al igual que a los conjugados de estas corrientes \mathbf{I}_k^* . Por tanto, la ecuación (14-108) se puede escribir como sigue

$$\sum_{k=1}^b \mathbf{V}_k \mathbf{I}_k^* = \sum_{k=1}^b S_k = 0 \quad (14-110)$$

donde todos los voltajes y todas las corrientes fasoriales están en valores rmc. Aplicando este concepto a la red dividida en dos partes de la figura 14-19, la ecuación (14-110) implica entonces que la suma de las potencias complejas de las fuentes senoidales debe ser igual a la que se suministra a los elementos pasivos de la red. Esto se puede interpretar como la *conservación de la potencia compleja*.

Hasta ahora la exposición del teorema de Tellegen se ha relacionado sólo con redes lineales. Conviene hacer la observación de que, puesto que el teorema depende exclusivamente de las dos leyes de Kirchhoff, se puede aplicar a la clase muy general de redes concentradas compuestas de elementos lineales y no lineales, pasivos o activos, que varían con el tiempo y que no varían con él. Esta generalidad es una de las razones por las que el teorema de Tellegen es un instrumento poderoso. Algunas de las variaciones del teorema son las que siguen:

- (1) Se dan dos redes N_1 y N_2 , que tienen la misma gráfica con los mismos sentidos de referencia asignados a las ramas de ambas redes pero con diferentes valores y tipos de elementos. Sean v_{1k} e i_{1k} los voltajes y las corrientes de N_1 , y v_{2k} e i_{2k} , los voltajes y las corrientes de N_2 , en donde todos los voltajes y todas las corrientes satisfacen la ley correspondiente de Kirchhoff. En este caso, de acuerdo con el teorema de Tellegen,

$$\sum_{k=1}^b v_{k1} i_{k2} = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^b v_{k2} i_{k1} = 0 \quad (14-111)$$

- (2) De acuerdo con la ecuación (14-111), se observa que el voltaje y la corriente en los productos que se suman para todos los elementos pueden ser muy distintos, teniéndose como único requisito el que se satisfagan las dos leyes de Kirchhoff. Por ejemplo, si t_1 y t_2 son dos tiempos diferentes de observación, de todas maneras se infiere que

$$\sum_{k=1}^b v_k(t_1) i_k(t_2) = 0 \quad (14-112)$$

¡Y esto es apenas el principio de lo sorprendente que es en realidad el teorema de Tellegen!

BIBLIOGRAFIA

- CHIRLIAN, PAUL M., *Basic Network Theory*, McGraw-Hill Book Company Nueva York, 1969, capítulo 6.
- CRUZ, JOSE B. y M. E. VAN VALKENBURG, *Signals in Linear Circuits*, Houghton-Mifflin Co., Boston, 1974, capítulo 6.
- DIRECTOR, S. W., *Circuit Theory-The Computational Approach*. John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1974, capítulos 5 y 6.
- DESOER, CHARLES A. y ERNEST S. KUH, *Basic Circuit Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969. Véase la exposición del teorema de Tellegen.
- FRIEDLAND, B., OMAR WING y R. B. ASH, *Principles of Linear Networks*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1961, capítulo 7.
- HAYT, WILLIAM H., Jr. y JACK E. KEMMERLY, *Engineering Circuit Analysis*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1971, capítulo 11.
- MANNING, LAURENCE A., *Electrical Circuits*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1965, capítulo 8.
- WING, OMAR, *Circuit Theory with Computer Methods*, Rinehart & Winston, Inc., Nueva York, 1972, Véase el capítulo 7.

EJERCICIOS PARA COMPUTADORA DIGITAL

El análisis de potencia de una red requiere la determinación de todos los voltajes y las corrientes de la red. Esto se logra mediante un análisis ordinario de red, como se ve en los apéndices E-8.3 y E-8.4. Este análisis proporciona también una base para los estudios de red utilizando el teorema de Tellegen como se delinea en Director, referencia 5 del apéndice E-10.

PROBLEMAS

- 14-1. En la figura se ilustra la forma de onda de un voltaje v_1 que se aplica a las terminales de una red de un puerto con los sentidos de referencia que se señalan en la figura 14-2. En este problema se tomarán en cuenta varias posibilidades para la corriente hacia la red de un puerto. (a) Para $i_1(t)$ como se indica en la figura, grafique $p(t)$, $w(t)$ y determine la energía que absorbe la red por ciclo. (b) Repita la parte (a) para i_2 . (c) Repita la parte (a) para i_3 . (d) Repita la parte (a) para i_4 .

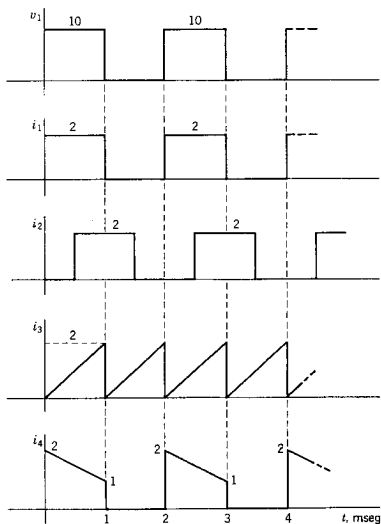
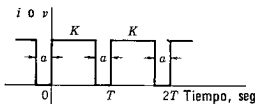


Fig. P14-1.

- 14-2. La forma de onda de la figura representa la corriente para $K = 10$ amp, en un resistor $R = 10$ ohms. (a) Para esta forma de onda dibuje $p_R(t)$ desde $t = 0$ hasta $t = 3T$ cuando $a = T/2$. (b) Grafique la energía $w_R(t)$ en el mismo intervalo que se especifica en (a). (c) Calcule la energía que se absorbe por ciclo en función de a .



Figs. P14-2 a 5.

- 14-3. La forma de onda de la figura representa la corriente para $K = 10$ amps en un capacitor $C = 2 \mu\text{F}$. Sea $a = T/2$, grafique $p_C(t)$ de $t = 0$ a $t = 3T$. (b) En las mismas condiciones que en (a), dibuje $w_C(t)$. Suponga que $v_C(0) = 0$.
- 14-4. La forma de onda de la figura representa al voltaje para $K = 100$ V de un inductor $L = 2$ mH. Sea $a = T/3$, grafique $p_L(t)$ desde $t = 0$ hasta $t = 3T$, si $i_L(0) = 0$. (b) En las mismas condiciones que en (a), trace $w_L(t)$.
- 14-5. Determine el valor eficaz de la forma de onda de corriente de la figura en función de a y K . Compruebe su resultado para $a = 0$ y $a = T$.
- 14-6. La forma de onda de la siguiente figura se conoce con el nombre de dientes de sierra. Determine el valor eficaz de $v(t)$.

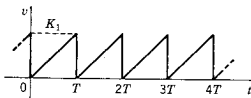


Fig. P14-6.

- 14-7. La forma de onda de la figura siguiente se compone de un tren de triángulos isósceles. Determine el valor eficaz de $v(t)$ de esta forma de onda.

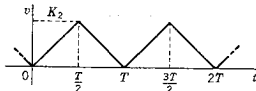


Fig. P14-7.

- 14-8. La forma de onda de la figura es semejante a la del problema 14-7, excepto en que la duración de la forma de onda triangular es menor que el período. Determine el valor eficaz de $v(t)$ para $k_1 < 1/2$. Compare este resultado con el del problema 14-7 para $k_1 = 1/2$.

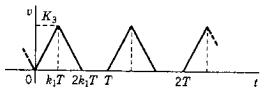


Fig. P14-8.

- 14-9. La forma de onda de este problema es semejante a las del problema 14-7, excepto en que los triángulos ya no son isósceles, a menos que $k_2 = 1/2$. Determine el valor eficaz de $v(t)$ para $0 < k_2 < 1$.

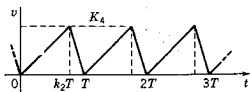


Fig. P14-9.

- 14-10. La forma de onda de la figura que sigue se identifica como una *onda rectificadora completa*, que se describe mediante la ecuación $v(t) = V_m |\cos \omega t|$. Determine el valor eficaz para $v(t)$.

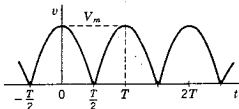


Fig. P14-10.

- 14-11. La forma de onda de la figura se denomina forma de *onda rectificadora de media onda*, siendo una función coseno cuando la función es positiva y cero cuando es negativa. Determine el valor eficaz de esta forma de onda.

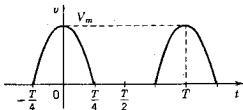


Fig. P14-11.

- 14-12. La forma de onda de la figura se deduce de una función seno y tiene valor cero cuando la función seno es negativa y también de $t=0$ a $t=k_3 T$, $k_3 < 1/2$ y para el intervalo correspondiente de cada periodo. Determine el valor eficaz de $v(t)$ en función de k_3 .

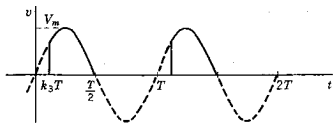


Fig. P14-12.

- 14-13. La forma de onda de la figura se conoce como *onda senoidal fraccionaria*. Se deduce sumando una constante negativa a la onda senoidal y luego definiéndola para que sea distinta de cero sólo cuando la función

502 *Potencia entrada, transferencia potencia, pérdida inserción*

resultante tiene un valor positivo. Determine el valor eficaz de esta forma de onda.

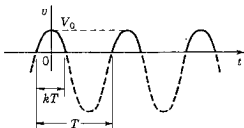


Fig. P14-13.

- 14-14. En la figura se muestra un tren de pulsos coseno al cuadrado, que se obtienen elevando al cuadrado la forma de onda rectificada de media onda del problema 14-11. Determine el valor eficaz de $v(t)$.

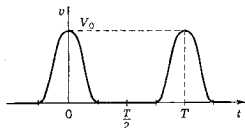


Fig. P14-14.

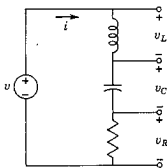


Fig. P14-15.

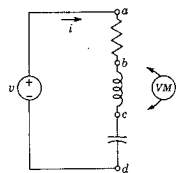


Fig. P14-16.

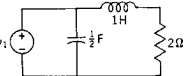


Fig. P14-20.

- 14-15. La red RLC conectada en serie de la figura opera en estado permanente senoidal. Si el valor eficaz del voltaje de la fuente es 1 V, y el valor eficaz de la corriente es 1 amp, $i(t)$ está atrasada en relación a $v(t)$ por 45° , $L = 1$ H y $\omega = 2$ radianes/seg, determine el valor eficaz del voltaje a través de cada uno de los tres elementos.
- 14-16. Se utiliza un voltímetro para medir el valor eficaz de los diferentes voltajes en la red RLC de la figura y se registran los siguientes valores: (a) el voltaje de a a c es 20 V. (2) El voltaje de b a d es 9 V. (3) El voltaje de a a d es de 15 V. Encuentre todas las lecturas de voltímetro posibles para mediciones que se hagan para cada uno de los tres elementos.
- 14-17. A una red RLC en serie se conecta una fuente senoidal de voltaje con un valor eficaz de 5 V. Cuando $C = 1/5$ F, el valor eficaz de la corriente es 1 amp y la potencia media es 3 W. Con la misma fuente de voltaje, operando al mismo voltaje y a la misma frecuencia, conectada a la red pero con el capacitor cargado, y para $C = 1/45$ F, el valor eficaz de la corriente y la potencia media son iguales a las anteriores. Determine el valor de L en henrys.
- 14-18. Véase la red de un puerto que se ilustra en la figura 14-2. Para esta red, suponga que $v = 150 \cos \omega t$ V e $i = 5 \cos(\omega t + 60^\circ)$ amp. Determine: (a) la potencia instantánea, $p(t)$, (b) P_{media} en watts, (c) Q en vars y (d) S en va.
- 14-19. Repita el problema 14-18 si $v = 100 \sin(\omega t - 30^\circ)$ V e $i = 10 \cos(\omega t + 45^\circ)$ amp.
- 14-20. La red de la figura opera en estado permanente senoidal con los valores de elementos que se dan y $v_1 = 100 \cos 2t$. Determine (a) la potencia compleja que genera la fuente, (b) la corriente eficaz en cada uno de los elementos pasivos y (c) la potencia compleja para cada elemento pasivo de la red.

- 14-21. En la red de la figura siguiente, $i_1 = 10^{-3} \text{ sen } 3000t$. Para los valores de elementos que se dan determine las cantidades especificadas en el problema 14-20.

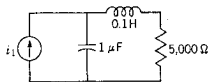


Fig. P14-21.

- 14-22. En la red que se muestra en la siguiente figura $v_1 = 10 \text{ cos } 2t \text{ V}$. Para los valores de elemento que se indican determine las cantidades que se pidieron en el problema 14-20.
- 14-23. En la red de la figura $v_1 = 440 \sqrt{2} \text{ cos } 377t$ y los valores de los elementos pasivos se especifican en la figura. Para esa red determine las cantidades requeridas en el problema 14-20.
- 14-24. En la red de la figura $v_1 = (\sqrt{2}/20) \text{ cos } 100t$ y se establece que $k = 30$ y $R_L = 1000$ ohms. Calcule la potencia media en el resistor R_L de la carga.

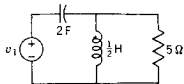


Fig. P14-22.

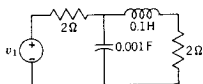


Fig. P14-23.

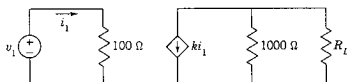


Fig. P14-24.

- 14-25. La fuente de corriente conectada a la red que se muestra a continuación se describe mediante la ecuación

$$i_1 = 5\sqrt{2} \text{ sen } 1000t$$

Determine la corriente eficaz en cada elemento, así como la potencia compleja para cada uno de los elementos de la red. Encuentre la potencia compleja total de la red.

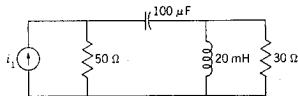


Fig. P14-25.

- 14-26. La potencia media transmitida a la planta que se muestra en la siguiente figura es de 250 kW y el factor de potencia es 0.707 atrasado. El generador es de forma de onda senoidal y su valor eficaz es 2300 V. Determine el valor de la capacitancia C de modo que: (a) el factor de potencia sea 0.866 atrasado, (b) el factor de potencia sea 1.0 y (c) el factor de potencia sea 0.866 adelantado. Sea $\omega = \text{radianes/seg}$.

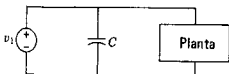


Fig. P14-26.

- 14-27. La planta de la figura del problema 14-24 tiene un valor nominal de 100 kva con un factor de potencia de 0.8 atrasado. El voltaje del sistema tiene un valor eficaz de 2000 V. Determine el valor de la capacitancia C necesaria para corregir el factor de potencia del sistema a: (a) 0.9 atrasado, (b) 1.0, (c) 0.9 adelantado. Sea $\omega = 377$ radianes/seg.
- 14-28. Una red RL en serie se conecta a una fuente de voltaje senoidal y el sistema opera en estado permanente. Si $R = 5$ ohms y $\omega L = 10$ ohms, ¿cuál debe ser la capacitancia de un capacitor que se conecte en paralelo con la combinación RL para producir un factor de potencia unitario para la red RLC , si $\omega = 377$ radianes/seg?
- 14-29. Para la red que se da a continuación determine el valor de R_L que haga que la potencia en R_L tenga el valor máximo. ¿Cuál será el valor de la potencia en estas condiciones?

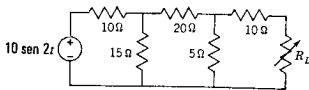


Fig. P14-29.

- 14-30. Para la red de la figura determine la impedancia Z_x de tal modo que se transfiera la máxima potencia de la fuente a la carga de impedancia Z_x .

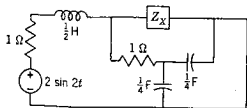


Fig. P14-30.

- 14-31. Sea la red del problema 9-31. Sea el resistor de 1 ohm en serie con la fuente controlada de corriente, el considerado como la carga. ¿Cuál debe ser el nuevo valor de esta carga para una máxima transferencia del potencia con $K_1 = -3$ y $\omega = 1$ radián/seg?
- 14-32. Para la red de la figura se conoce que $v_1 = 2\sqrt{2} \text{ sen } 2t$. Para los valores de elementos que se dan encuentre el valor de C que produzca la máxima potencia en la carga de 1 ohm.

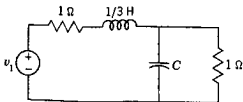


Fig. P14-32.

- 14-33. Para la siguiente red sea $C_1 = 1/10$ F. ¿Qué valor de C_2 producirá la máxima potencia transmitida a la carga, que es el resistor de 1 ohm? Sea $v_1 = \cos 2t$.

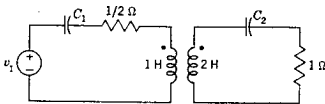


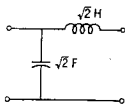
Fig. P14-33.

- 14-34. Véase la red del problema 14-33. En este caso se supondrá que $C_2 = 1/10$ F y C_1 será variable. ¿Qué valor de C_1 producirá la máxima potencia entregada a la carga que es el resistor de 1 ohm? Nuevamente $v_1 = \cos 2t$.
- 14-35. Sea un sistema que opera en estado permanente senoidal compuesto de una fuente de corriente conectada a dos subredes en paralelo, N_a y N_b . Estas redes están caracterizadas por sus funciones admitancia: $Y_a = G_a + jB_a = |Y_a| e^{j\theta_a}$ y $Y_b = G_b + jB_b = |Y_b| e^{j\phi_b}$. El problema que se debe resolver consiste en encontrar el máximo de la potencia a la subred N_b para diferentes situaciones restrictivas. Véanse los siguientes casos:

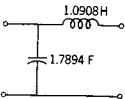
- (a) G_b y B_b pueden variar.
- (b) La magnitud de Y_b puede variar.
- (c) G_a y B_a pueden variar.
- (d) La magnitud de Y_a puede variar.

- 14-36. Véase el ejemplo 5 pero con una forma distinta para la función de transferencia V_2/V_1 que la que se usó en la ecuación (14-100). Para los dos polinomios denominadores (a) $s^2 + 2s + 1$ y (b) $s^3 + 3s^2 + 3s + 1$, determine una expresión para la pérdida de inserción, similar a la que establece la ecuación (14-102).
- 14-37. Estudie las redes LC de dos puertos que se muestran en la figura que sigue. Cada red se debe insertar entre los dos resistores de 1 ohm, como se indica en la figura 14-16(a). Para cada una de las tres redes, (a) determine una expresión para la pérdida de inserción y (b) grafique α en decibels en función de ω .

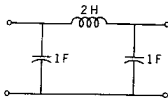
- 14-38. Las redes LC de dos puertos que se muestran en la siguiente figura se deberán insertar entre los dos resistores de 1 ohm, como se ilustra en la figura 14-16(a). Para cada una de estas cuatro redes, (a) determine una expresión para la pérdida de inserción α , y (b) gráfique α en decibels en función de ω , como se hizo en la figura 14-16(b).



(a)

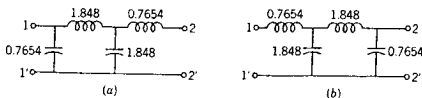


(b)



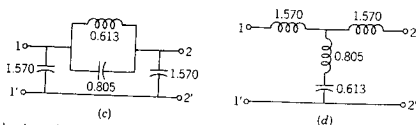
(c)

Fig. P14-37.



(a)

(b)



Todos los valores del elemento en H o F

Fig. P14-38.

- 14-39. La conexión que aparece en (a) de la siguiente figura representa una conexión *Y* de las fuentes de voltaje. Se dice que estos voltajes están en una secuencia trifásica cuando $V_1 = Ve^{j0}$, $V_2 = Ve^{-j2\pi/3}$ y $V_3 = Ve^{-j4\pi/3}$. En (b) de la misma figura se presenta la carga correspondiente conectada

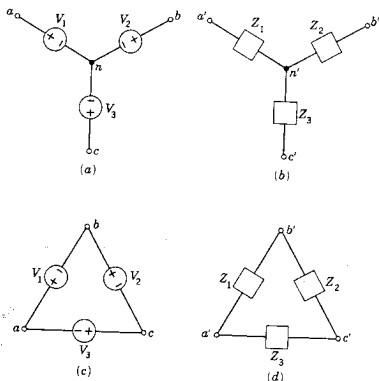


Fig. P14-39.

en *Y*. Se dice que la carga está balanceada si $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$. Para este problema conecte a a a' , b a b' , c a c' y n a n' y suponga que el sentido de referencia de la corriente va de la terminal sin prima a la terminal con prima.

- Para una carga balanceada, encuentre la corriente en cada línea, indicando tanto la magnitud como la fase con respecto a V_1 .
- Demuestre que la corriente de línea de n a n' , la llamada corriente en el neutro, es igual a cero.
- Demuestre que la magnitud de los voltajes de línea a línea (excluyendo el neutro) es $\sqrt{3}V$ y determine la fase de cada uno con respecto a V_1 .

Problemas 507

- (d) Si V_L e I_L son cantidades de línea y θ es factor de potencia correspondiente a cada impedancia de la carga, demuestre que la potencia total suministrada a la carga trifásica es

$$P_T = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$$

- 14-40. En (c) y (b) de la figura del problema 14-39 se muestra la *conexión delta* de voltajes y cargas. Suponga que los voltajes y las impedancias se definen tal como se presentan en el problema 14-39. Como ahí se indica, conecte las terminales sin prima a las terminales con prima y repita las partes (a), (c) y (d).
- 14-41. Para este problema se utilizan los voltajes trifásicos que se indican en (a) de la figura P14-39(a) conectados a una carga en *conexión delta* de (d) de la misma figura. Conecte a a a' , b a b' y c a c' y suponga que el sentido de referencia de las corrientes va de las terminales sin prima a las terminales con prima. Para los voltajes y las impedancias que se definen en el problema 14-39 repita las partes (a), (c) y (d).
- 14-42. Estudie el sistema descrito en el problema 14-39. Sea $V = 120$ V y $Z = 5 + j5\Omega$. Encuentre la potencia en cada carga y la potencia total en la carga trifásica.
- 14-43. Sea el sistema descrito en el problema 14-41 con el dato adicional de que existe resistencia en los conductores que conectan a las terminales sin prima con las que llevan prima, $R_W = 0.5\Omega$. Si $V = 120$ V, $Z_1 = 4 + j2$, $Z_2 = 4 - j2$, y $Z_3 = 4\Omega$, encuentre la potencia total que suministran las fuentes de voltajes trifásico.
- 14-44. Repita el problema 14-43 para los valores que se dan pero utilizando la conexión delta-delta que se describe en el problema 14-40.
- 14-45. En la siguiente figura se ilustra la manera cómo se conecta un watímetro a una red pasiva, para medir la potencia media que se suministra a la

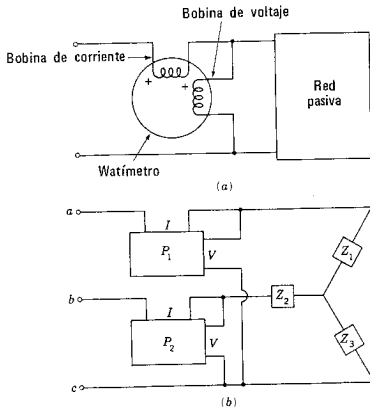


Fig. P14-45.

508 *Potencia entrada, transferencia potencia, pérdida inserción*

- red. La potencia se mide a veces en el sistema trifásico utilizando el *método de 2 watímetros*. Sean estos 2 watímetros conectados en el sistema trifásico de tal modo que cada uno tenga su bobina de corriente en sendas líneas y las bobinas de voltaje conectadas de línea a línea. Demuestre que el método es general y que la potencia total es la suma de las lecturas de los dos watímetros.
- 14-46. Aplique el método de los dos watímetros del problema 14-45 al sistema trifásico que se describe en el problema 14-43 y determine la lectura de cada medidor.
- 14-47. Aplique el método de dos watímetros del problema 14-45 al sistema trifásico que se describe en el problema 14-44 y determine la lectura de cada uno de los dos medidores.

CAPITULO 15

15 Series de Fourier y espectros continuos

15-1. SERIES DE FOURIER

En el capítulo 8 se estudiaron las respuestas en el dominio del tiempo de redes sometidas a entradas periódicas como la que se ilustra en la figura 15-1. Se encontró que la respuesta se puede determinar por la transformada inversa de Laplace del producto de la transformada de la señal de entrada y de la función de red apropiada. En este capítulo se verá sólo la respuesta de estado permanente a una entrada periódica que se inicia idealmente en el principio del tiempo y se destina a durar para siempre. Además, el interés se centra en la señal de entrada y la respuesta de la red, en función del *contenido de frecuencias*. La idea del contenido de frecuencias de las formas de onda de señales periódicas es particularmente útil en los problemas de ingeniería, como se verá un poco más adelante, y constituye la base de gran parte del lenguaje o la terminología especializada con que los ingenieros electricistas se comunican entre sí.

Cuando el matemático francés J. B. J. Fourier (1758-1830) estudiaba los problemas del flujo del calor (las aplicaciones eléctricas eran escasas en 1822), demostró que las funciones periódicas arbitrarias se podían representar mediante una serie infinita de senoídes de frecuencias armónicamente relacionadas. Varias de las palabras que se usan en este postulado requieren una mayor aclaración. Se dice que una señal $f(t)$ es periódica, con un período T , si $f(t) = f(t + T)$ para todos los valores de t . En la figura 15-2 se ilustran varias formas de onda de señales que satisfacen este requisito. En (a) se presenta un tren de pulsos, en (b) un tren de medias ondas senoídes (que se llaman rectificadas de media onda) y

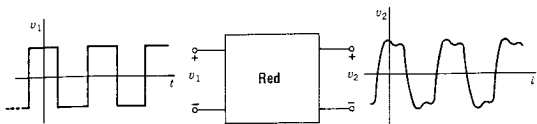


Figura 15.1 Ilustración del tipo de problema que se estudia en este capítulo: una entrada de onda cuadrada a una red de dos puertos produce una respuesta periódica $v_2(t)$.

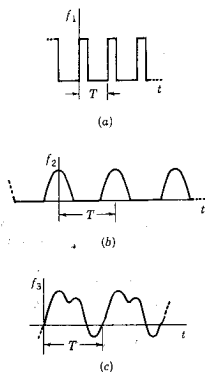


Figura 15.2. Tres formas de onda periódica, cada una con el período T identificado.

en (c) una señal periódica continua (pero irreconocible). Para el caso presente son muy interesantes las senoides

$$f_1(t) = \cos \frac{2n\pi}{T} t = \cos n\omega_0 t \quad (15-1)$$

y

$$f_2(t) = \sin \frac{2n\pi}{T} t = \sin n\omega_0 t \quad (15-2)$$

en donde n es cualquier entero (o cero). Se dice que la frecuencia de las senoides, $n\omega_0 = 2n\pi/T$, es la *nésima armónica* de la frecuencia fundamental, ω_0 . Por tanto, una onda periódica se puede describir de acuerdo con su frecuencia fundamental, su segunda armónica, su tercera armónica, etc., y cada una de estas frecuencias se relaciona sencillamente con el período T .

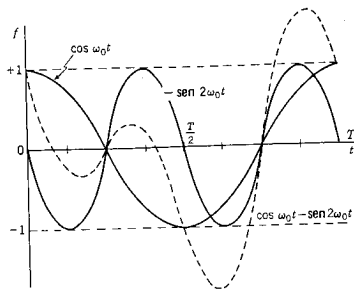


Figura 15-3. Ejemplo de la combinación de dos senoides de frecuencias armónicamente relacionadas para dar una función periódica no senoidal, que se representa por la línea punteada.

Si $f(t)$ es periódica y satisface las *condiciones de Dirichlet* que se verán en la sección 15-4, entonces la *serie de Fourier* es

$$+ b_1 \text{sen } \omega_0 t + \dots + b_n \text{sen } n\omega_0 t + \dots \quad (15-3)$$

En la figura 15-3 se ilustra la suma de dos términos de este tipo, para dar una función periódica como la que se presenta en ella para $a_1 = 1$, $b_2 = -1$, y todos los otros coeficientes iguales a cero. El *análisis de Fourier* consiste en dos operaciones: (1) la determinación de los valores de los coeficientes $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$, y (2) una decisión en lo que respecta a los términos que se deben incluir en una *serie truncada* de tal modo que la suma parcial represente la función con un error permisible. Si la convergencia de la serie es rápida, sólo se requerirán unos cuantos términos.

La serie de la ecuación (15-3) se puede escribir en un número de formas aparentemente distintas aunque equivalentes, una de las cuales se obtiene al determinar que para todos los valores de n

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \text{sen } n\omega_0 t = c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (15-4)$$

en donde

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{y} \quad \theta_n = -\tan^{-1} \frac{b_n}{a_n} \quad (15-5)$$

un resultado que se usó ya en el capítulo 6, en las ecuaciones (6-127) y (6-128).

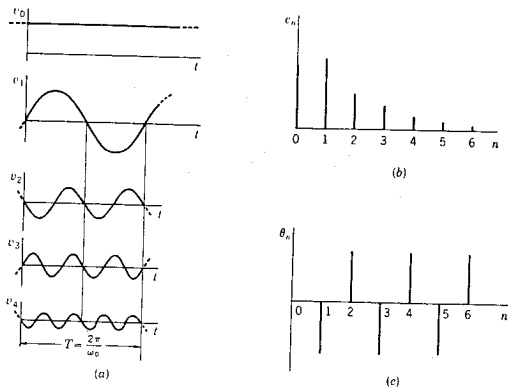


Figura 15-4. (a) Los términos de la serie de Fourier se ilustran en función del tiempo. Las formas de onda de (a) se pueden describir por el espectro de amplitud de (b) junto con el espectro de fase de (c).

Combinando pares de términos de la ecuación (15-3) se obtiene la fórmula equivalente para la serie de Fourier

$$f(t) = c_0 + c_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1) + \dots + c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + \dots \quad (15-6)$$

con $c_0 = a_0$ y todos los otros valores de c_n y θ_n definidos por las ecuaciones (15-5). El coeficiente c_n es la *amplitud* y θ_n la *fase* de la *n*ésima armónica.

Obsérvese que si se sabe que una serie de Fourier está construida en la forma de la ecuación 15-6, entonces el conjunto de números c_n y θ_n contiene toda la información que se requiere. En la figura 15-4 se presentan las gráficas mediante las cuales se puede ilustrar esta información. La gráfica de c_n en función de n o $n\omega_0$ (ya que las dos se relacionan mediante una simple escala lineal) se conoce como el espectro de amplitud; la gráfica de θ_n en función de n o $n\omega_0$ es el espectro de fase. Más adelante, en este capítulo, se especificará esta distinción, para diferenciar los espectros de líneas (o discretos) que se acaban de ver de los espectros continuos definidos para todas las frecuencias. En este capítulo se hace hincapié en el estudio de los espectros como medio para representar señales y resolver problemas de circuitos.

15-2. EVALUACION DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER¹

La evaluación de los coeficientes a y b de la ecuación (15-3) se logra al utilizar ecuaciones integrales simples que se pueden derivar aplicando la *propiedad de ortogonalidad* del conjunto de funciones comprendidas, es decir $\cos n\omega_0 t$ y $\sin m\omega_0 t$, para valores enteros de n y m . Estas funciones son *ortogonales* en el intervalo de t_0 a $t_0 + T$ para cualquier t_0 . Con frecuencia se empleará el valor $t_0 = 0$ ó $t_0 = -T/2$, pero se sobreentiende que se puede utilizar cualquier período, por lo que se substituirá t_0 a $t_0 + T$ con 0 a T en las ecuaciones que siguen.

En primer lugar, obsérvese que

$$\int_0^T \sin m\omega_0 t \, dt = 0, \quad \text{cualquier } m \quad (15-7)$$

y

$$\int_0^T \cos n\omega_0 t \, dt = 0, \quad \text{cualquier } n \neq 0 \quad (15-8)$$

ya que es cero el valor medio de una senoide en m o n ciclos completos de período T . Los tres términos de productos cruzados siguientes son también cero para las relaciones establecidas de m y n :

$$\int_0^T \sin m\omega_0 t \cos n\omega_0 t \, dt = 0, \quad \text{cualquier } m, n \quad (15-9)$$

$$\int_0^T \sin m\omega_0 t \sin n\omega_0 t \, dt = 0, \quad m \neq n \quad (15-10)$$

y

$$\int_0^T \cos m\omega_0 t \cos n\omega_0 t \, dt = 0, \quad m \neq n \quad (15-11)$$

Los valores distintos de cero para las integrales se producen cuando m y n son iguales; así

$$\int_0^T \sin^2 m\omega_0 t \, dt = \frac{T}{2}, \quad \text{cualquier } m \quad (15-12)$$

y

$$\int_0^T \cos^2 n\omega_0 t \, dt = \frac{T}{2}, \quad \text{cualquier } n \quad (15-13)$$

Este procedimiento de evaluación sigue un método descrito por los tres pasos siguientes: (1) Se multiplica la ecuación (15-3) en ambos

¹ Para un resumen de los métodos numéricos para evaluar los coeficientes de Fourier, véase *Reference Data for Radio Engineers*, 5.^a edición (Howard W. Sams & Co., Inc., Indianápolis, Ind., 1970).

miembros por un factor apropiado, (2) se integra la expresión resultante término por término para el intervalo de tiempo 0 a T y (3) se utilizan las ecuaciones (15-7) a (15-13) para evaluar las integrales, la mayoría de las cuales serán cero. Al aplicar este procedimiento a a_0 el factor multiplicador es 1 y la ecuación integral es

$$\int_0^T f(t) dt = a_0 \int_0^T dt + \int_0^T f_1(t) dt \quad (15-14)$$

en donde $f_1(t)$ se escribe en forma compacta para la siguiente suma:

$$f_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (15-15)$$

Esta división particular se hace debido a que el primer término del segundo miembro de la ecuación (15-14) tiene el valor $a_0 T$, en tanto que cada término de la suma infinita de $f_1(t)$, cuando se integra de 0 a T , tiene un valor cero según las ecuaciones (15-7) y (15-8). Igualando el primer miembro de la ecuación (15-14) a $a_0 T$ se tiene

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (15-16)$$

lo cual indica que a_0 es simplemente el valor medio de $f(t)$ en un período lo que a veces se conoce también como el valor cd de la señal.

El factor multiplicador para evaluar a_n es $\cos n\omega_0 t$ y el producto de este factor y la ecuación (15-3) integrada de 0 a T es

$$\int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt = \int_0^T a_0 \cos n\omega_0 t dt + \int_0^T f_1(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (15-17)$$

En este caso, todos los términos del segundo miembro de esta ecuación son nulos, excepto el que tiene la forma de la ecuación (15-13), que tiene el valor $T/2$. Así, se tiene que, para el coeficiente² a_n ,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (15-18)$$

Siguiendo el modelo que se estableció, la ecuación (15-13) se multiplica por $\sin n\omega_0 t$ y se integra para obtener

$$\int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt = \int_0^T a_0 \sin n\omega_0 t dt + \int_0^T f_1(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (15-19)$$

² Algunos autores escriben el primer término de la ecuación (15-3) como $a_0/2$, de tal manera que la ecuación (15-18) se reduce a la (15-16) para $n=0$. Según esta convención, a_0 es dos veces el valor medio de $f(t)$ durante un período.

ya la única integral distinta de cero es la del segundo término del lado derecho de esta ecuación, de la forma de la expresión (15-12), el cual tiene el valor $T/2$. En consecuencia, el valor b_n está dado por la ecuación

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt \quad (15-20)$$

ya se han evaluado todos los coeficientes de Fourier. El uso de las ecuaciones (15-16), (15-18) y (15-20) se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1

En la figura, 15-5 se muestra una señal de voltaje de onda cuadrada, que se desea representar por medio de una serie de Fourier. Esta forma de onda se escribe como sigue:

$$v(t) = \begin{cases} V, & 0 < t < T/4 \\ -V, & T/4 < t < 3T/4 \\ V, & 3T/4 < t < T \end{cases} \quad (15-21)$$

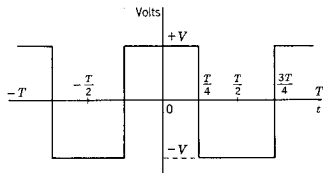


Figura 15-5. Onda cuadrada o rectangular de amplitud $2V$ con un período $T = 2\pi/\omega_0$.

Con sólo ver la onda cuadrada, se apreciará que el valor medio de un período es cero, de manera que se obtiene $a_0 = 0$ sin utilizar la ecuación (15-16). Con la ecuación (15-18) se puede obtener el valor de a_1 , para $n = 1$, de donde

$$a_1 = \frac{2}{T} \left(V \int_0^{T/4} \cos \omega_0 t \, dt - V \int_{T/4}^{3T/4} \cos \omega_0 t \, dt + V \int_{3T/4}^T \cos \omega_0 t \, dt \right) \quad (15-22)$$

$$= \frac{2V}{\omega_0 T} \left[\operatorname{sen} \frac{\omega_0 T}{4} - \left(\operatorname{sen} \frac{3\omega_0 T}{4} - \operatorname{sen} \frac{\omega_0 T}{4} \right) + \left(\operatorname{sen} \omega_0 T - \operatorname{sen} \frac{3\omega_0 T}{4} \right) \right] \quad (15-23)$$

Puesto que $\omega_0 t = 2\pi$, se obtiene para a_1 ,

$$a_1 = \frac{V}{\pi} (1 + 2 + 1) = \frac{4V}{\pi} \quad (15-24)$$

Aplicando el mismo procedimiento para todos los valores de n se encuentra que

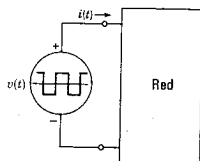
$$a_n = \begin{cases} \frac{+4V}{n\pi}, & n = 1, 5, 9, \dots \\ \frac{-4V}{n\pi}, & n = 3, 7, 11, \dots \\ 0, & n = \text{enteros pares} \end{cases} \quad (15-25)$$

$$b_n = 0, \quad \text{todos } n$$

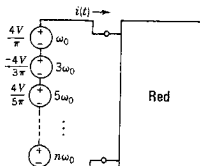
Por tanto, la serie de Fourier es

$$v(t) = \frac{4V}{\pi} (\cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t - \frac{1}{7} \cos 7\omega_0 t + \dots) \quad (15-26)$$

Esta suma de los voltajes armónicamente relacionados es igual a la onda cuadrada, como se ilustra en la figura 15-6, y para la red de generadores múltiples de (b) la respuesta total se puede determinar por superposición. Los espectros de amplitud y fase de la onda cuadrada se ilustran en la figura 15-7.



(a)



(b)

Figura 15-6. Por medio de la serie de Fourier, una función periódica como fuente de voltaje se puede substituir por n fuentes de voltajes senoidales en serie, las cuales tienen amplitudes dadas por los coeficientes de Fourier y de frecuencias armónicamente relacionadas, $n\omega_0$, donde n es un entero.

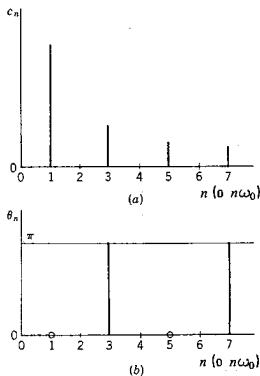


Figura 15-7. Los espectros de magnitud y fase para la forma de onda de la figura 15-5. Las gráficas se presentan en función de n pero pueden ser graficadas en función de $n\omega_0$, como se indica en la figura.

De acuerdo con las ecuaciones (15-25) y (15-26), se observa que la mayoría de los coeficientes de Fourier son cero. A continuación se muestra que ésta es una consecuencia de ciertas simetrías de la señal, y que esa información se puede determinar directamente, a partir de la forma de onda, con lo que se evita la necesidad de evaluar las integrales que deben tener un valor cero.

15-3. SIMETRÍAS DE FORMAS DE ONDA EN RELACION CON LOS COEFICIENTES DE FOURIER

En esta sección se estudiarán algunas propiedades interesantes de las señales periódicas y, asimismo, se derivarán reglas que simplifican la evaluación de los coeficientes de Fourier. Se dice que una función $f(t)$ que satisface la condición

$$f(t) = f(-t) \quad (15-27)$$

es una *función par*. Las funciones pares de especial interés para este estudio son las funciones $\cos n\omega_0 t$ y la constante a_0 , aunque existen muchas otras, tales como $|\sen t|$, t^n para n par y la onda cuadrada de la figura 15-8(a). Del mismo modo, si $f(t)$ satisface la ecuación

$$f(t) = -f(-t) \quad (15-28)$$

se dice que es una *función impar*. En este caso el interés reside en las funciones impares $\sen n\omega_0 t$. Otras funciones impares son t^n para n

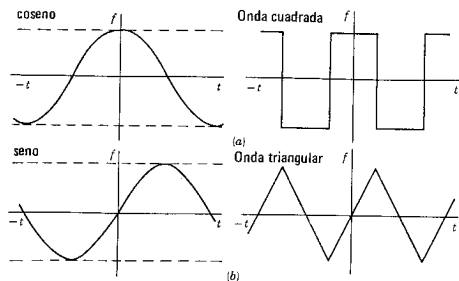


Figura 15-8. Ejemplo de (a) funciones pares y (b) funciones impares.

impar, $\theta = \tan^{-1} \omega$ del capítulo 13 y la onda triangular de la figura 15-8(b).

Las funciones elementales que se utilizan como ejemplos en la exposición son pares e impares. Si se suma cierto número de funciones pares, el resultado es par y la suma de funciones impares es también impar:

$$\text{Suma de funciones pares} = \text{función par} \quad (15-29)$$

$$\text{Suma de funciones impares} = \text{función impar} \quad (15-30)$$

Sin embargo, si una función impar se agrega a una suma par, el resultado no es par ni impar, sino que se dice que tiene una parte par y otra impar:

$$f(t) = f_p(t) + f_o(t) \quad (15-31)$$

en donde

$$f_p = \text{Par } f(t) \quad (15-32)$$

y

$$f_o = \text{Impar } f(t) \quad (15-33)$$

Ahora,

$$f(-t) = f_p(-t) + f_o(-t) \quad (15-34)$$

y, de acuerdo con los resultados de las ecuaciones (15-27) y (15-28),

$$f(-t) = f_p(t) - f_o(t) \quad (15-35)$$

Al sumar y restar las ecuaciones (15-31) y (15-35) se obtiene

$$f_s(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] \quad (15-36)$$

y

$$f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] \quad (15-37)$$

A continuación se aplican estos resultados a las ecuaciones para los coeficientes de Fourier. Puesto que el interés se centra en comparar $f(t)$ con $f(-t)$, se escoge el intervalo para la integración de $-T/2$ a $T/2$, correspondiendo a $t_0 = -T/2$ de la sección 15-2. Entonces, la ecuación (15-18) se puede escribir como sigue:

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f_e \cos n\omega_0 t \, dt + \int_{-T/2}^{T/2} f_o \cos n\omega_0 t \, dt \right] \quad (15-38)$$

y, de acuerdo con la ecuación (15-20),

$$b_n = \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f_e \sin n\omega_0 t \, dt + \int_{-T/2}^{T/2} f_o \sin n\omega_0 t \, dt \right] \quad (15-39)$$

Como en estas integrales se incluyen productos de funciones, se reconoce que

$$\text{Función impar} \times \text{función impar} = \text{función par} \quad (15-40)$$

$$\text{Función par} \times \text{función par} = \text{función par} \quad (15-41)$$

$$\text{Función par} \times \text{función impar} = \text{función impar} \quad (15-42)$$

y que para cualquier función par f_e

$$\int_{-t_0}^{t_0} f_e(t) \, dt = 2 \int_0^{t_0} f_e(t) \, dt \quad (15-43)$$

en tanto que para cualquier función impar f_o

$$\int_{-t_0}^{t_0} f_o(t) \, dt = 0 \quad (15-44)$$

para cualquier t_0 , aunque se usará $t_0 = T/2$. De acuerdo con estos resultados, se considerará a continuación cierto número de simetrías importantes que pueden existir en las funciones periódicas.

1. $f(t)$ es una función par. De acuerdo con la ecuación (15-29) se sabe que $f_o = 0$, implica que $b_n = 0$. Esto se observa también en la ecuación (15-39) con $f_o = 0$, puesto que $f_e \sin n\omega_0 t$ es impar para todos los valores de n y la integral es cero, por la ecuación (15-44). Aplicando las mismas condiciones a la ecuación (15-38) para a_n se obtiene de la ecuación (15-43):

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \quad (15-45)$$

y

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt \quad (15-46)$$

Por tanto, el desarrollo de la serie de Fourier de una función periódica par contiene sólo términos en coseno y una constante.

2. $f(t)$ es una función impar. Mediante un análisis similar, la ecuación (15-30) indica que $f_e = 0$, de manera que $a_n = 0$ y $a_0 = 0$. Esto se observa también en la ecuación (15-38), en donde $f_e = 0$ y $f_o \cos n\omega_0 t$ es impar para todos los valores de n , de tal manera que, de acuerdo con la ecuación (15-44), $a_n = 0$. Al aplicar estas condiciones a la ecuación (15-39) para b_n , se obtiene, utilizando la ecuación (15-43):

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t dt \quad (15-47)$$

En resumen, el desarrollo de la serie de Fourier de una función periódica impar contiene sólo términos en seno.

3. *Simetría de media onda.* Esta simetría se describe mediante la condición

$$f(t) = -f\left(t \pm \frac{T}{2}\right) \quad (15-48)$$

y se ilustra en la figura 15-9, indicando que la forma de onda cuando t aumenta de $-T/2$ a cero, es la negativa de la forma de onda cuando t aumenta de cero a $T/2$. Es evidente que esta forma de onda no es par

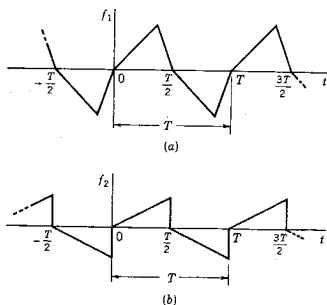


Figura 15-9. Ilustraciones de la simetría de media onda.

ni impar, de modo que debe ser ambas cosas. Para obtener expresiones para los coeficientes de Fourier, véanse las ecuaciones:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \quad (15-49)$$

y

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt \quad (15-50)$$

Ahora los cuatro integrandos de estas ecuaciones no son par ni impar para todos los valores de n . A continuación se delinea un método mediante el cual se puede mostrar que los integrandos son siempre impares para valores pares de n y siempre pares para valores impares de n .

En la figura 15-10 se ilustra una forma de onda $f(t)$ con simetría de media onda, como también $\sin n\omega_0 t$ para $n=1$ en (a) y para $n=2$ en (c); las dos formas de onda se deben multiplicar entre sí y luego integrar, como se especifica en la ecuación (15-50). En lo que respecta al valor de la integral, las funciones que se indican de $-T/2$ a 0 se pueden cambiar de un extremo a otro sin transformar la integral. Las formas de onda se modifican de esta manera en (b) y (d). Para la (b), se tiene que una función impar por otra función impar, da una función par, de manera que, de acuerdo con la ecuación (15-43), el valor b_1 es el doble de la ecuación (15-50), con los límites cambiados de 0 a $T/2$. Ahora, para el valor par $n=2$, (d) muestra que se tiene una función par por una función impar, dando una función impar, de modo que, de acuerdo con la ecuación (15-44), el valor es cero. Se puede aplicar el mismo método a las ecuaciones (15-49) y (15-50) para todos los valores de n , dando el resultado

$$a_0 = 0, \quad a_n = b_n = 0, \quad n \text{ par} \quad (15-51)$$

y

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \quad n \text{ impar} \quad (15-52)$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt, \quad n \text{ impar} \quad (15-53)$$

En resumen, el desarrollo de la serie de Fourier de una función periódica con simetría de media onda contiene sólo armónicas impares. El estudiante no tendrá ninguna dificultad para distinguir entre las funciones impares y las armónicas impares. Por ejemplo, $b_4 \sin 4\omega_0 t$ es una armónica par pero una función impar. ¿Y qué se puede decir respecto a $a_4 \cos 4\omega_0 t$?

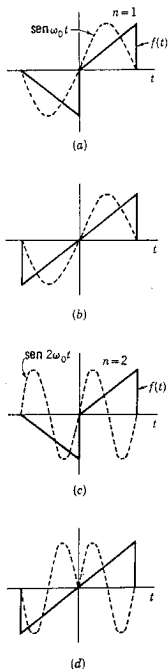





Figura 15-10. Formas de onda que se utilizan para ilustrar la conclusión de que las funciones periódicas con simetría de media onda contienen sólo armónicas impares.

TABLA 15-1. RESUMEN DE LAS CONDICIONES DE SIMETRÍA PARA FORMAS DE ONDA PERIÓDICAS

Nombre de la simetría	Condición	Ilustración	Propiedad	a_0	$a_n (n \neq 0)$	b_n
Par	$f(t) = f(-t)$		Sólo términos en coseno	*	$\frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt$	0
Impar	$f(t) = -f(-t)$		Sólo términos en seno	0	0	$\frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt$
Media onda	$f(t) = -f(t \pm \frac{T}{2})$		Sólo n impar	0	$\frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt$	$\frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt$

* $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \, dt$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, T es el período mínimo

EJEMPLO 2

En la figura 15-11 se muestra una forma de onda triangular o en dientes de sierra. Se trata de una función impar, de manera que las condiciones de simetría requieren que $a_n = 0$ para todos los valores de n , incluyendo $n = 0$. Para determinar los coeficientes b_n , se hacen las substituciones

$$v(t) = \begin{cases} \frac{4V}{T}t, & 0 < t < \frac{T}{4} \\ -\frac{4V}{T}t + 2V, & \frac{T}{4} < t < \frac{3T}{4} \end{cases} \quad (15-54)$$

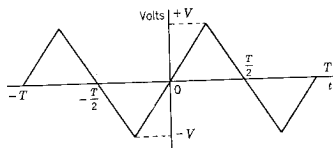


Figura 15-11. Forma de onda triangular que se analiza en el ejemplo 2.

en la ecuación (15-47), de lo cual se obtiene

$$v(t) = \frac{8V}{\pi^2} \left(\sin \omega_0 t - \frac{1}{3^2} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega_0 t - \dots \right) \quad (15-55)$$

Se observará que la amplitud de los coeficientes disminuye con mayor rapidez con n para este tipo de forma de onda, en comparación con la figura 15-5 descrita por la ecuación (15-26).

EJEMPLO 3

La forma de onda de señal que se muestra en la figura 15-12(a) no tiene ninguna de las simetrías que se han visto en esta sección, de manera que debe tener una parte impar y otra par, como en la ecuación (15-31). Utilizando las ecuaciones (15-36) y (15-37), las partes de la señal se determinan como se indica en (b) y (c) de esta figura. Estas son las formas de onda de los ejemplos 1 y 2, de manera que la serie de Fourier es sencillamente la suma de las ecuaciones (15-26) y (15-55). Esto ilustra una técnica muy útil en el análisis de las señales.

Volviendo a la forma de onda triangular de la figura 15-11, véase que la elección del tiempo de referencia $t = 0$ determina si $v(t)$ es una función par o impar. Como se muestra, se trata de una función impar; si se traslada a la derecha en $t = T/4$ unidades, se convierte en par.

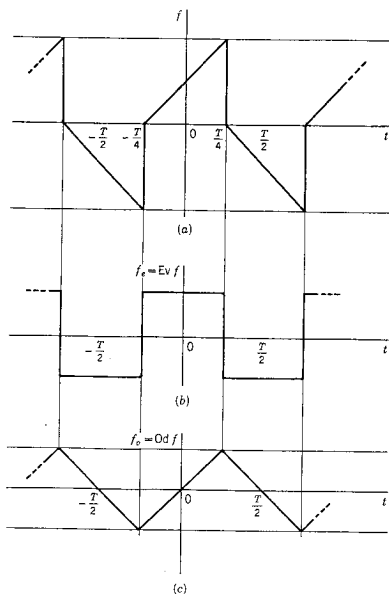


Figura 15-12. Una función que no es par ni impar se puede resolver en una parte par, f_e , y en una parte impar, f_o , de modo que $f = f_e + f_o$.

Ahora, la elección de un tiempo de referencia parece algo arbitrario y por lo menos al principio sorprende encontrar que en un caso se obtiene una serie coseno y en el otro una serie seno. ¿Qué sucede cuando se traslada el tiempo de referencia $t = 0$ y qué lineamientos se pueden utilizar para seleccionar este tiempo?

En primer lugar, el traslado de una forma de onda hacia arriba o hacia abajo con respecto a $f = 0$, o sea el eje horizontal, se logra cambiando a_0 . Si $f_2 = K_0 + f_1$, en la serie de Fourier para f_1 , K_0 , se combina sólo con a_0 . Por tanto, la suma de K_0 a una señal f_1 traslada la forma de onda resultante f_2 en sentido ascendente a K_0 unidades para valores positivos, en forma descendente a K_0 unidades para valores negativos. Inversamente, la selección del eje $f = 0$ o eje horizontal afecta sólo a a_0 .

Un cambio en el eje $t = 0$ o del tiempo de referencia, o bien un desplazamiento en el tiempo de la forma de onda, tiene un efecto diferente. Para un término típico de la ecuación (15-6),

$$f_n(t) = c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (15-56)$$

un traslado en el eje del tiempo tal que $t' = 0$ cuando $t = \tau$, hace que t de la ecuación (15-56) se substituya por $t' + \tau$, de modo que el término trasladado es

$$\begin{aligned} f_n(t') &= c_n \cos[n\omega_0(t' + \tau) + \theta_n] \\ &= c_n \cos(n\omega_0 t' + \phi_n) \end{aligned} \quad (15-57)$$

en donde

$$\phi_n = \theta_n + n\omega_0 \tau \quad (15-58)$$

Obsérvese que c_n , un término del espectro de magnitud, es igual para $f_n(t')$ que para $f_n(t)$; pero que el término del espectro de fase cambia de θ_n a ϕ_n . Ahora se ve que para la onda triangular con que se inició esta exposición una serie seno o una serie coseno podría representar tal función, ya que las funciones seno y coseno se relacionan entre sí por un cambio de fase de 90° . Al analizar la forma de onda para la que se debe seleccionar un tiempo de referencia se puede escoger dicho tiempo en tal forma que se facilite la determinación de los coeficientes de Fourier, preferiblemente haciendo que la función sea par o impar. No obstante, *la selección de $t = 0$ o el tiempo de referencia no afecta al espectro de magnitud, pero determina al espectro de fase.*

15.4. CONVERGENCIA EN SERIES TRUNCADAS

Las condiciones en las que se puede escribir la serie de Fourier para una función periódica, como en la ecuación (15-3), se conocen como *condiciones de Dirichlet*, en honor del matemático del mismo nombre, que fue el primero en descubrirlas. Estas condiciones requieren que, en cada período, la función (1) tenga un número finito de discontinuidades, (2) posea un número finito de máximos y mínimos y (3) sea absolutamente convergente

$$\int_0^T |f(t)| dt < \infty \quad (15-59)$$

En este estudio se supone que las condiciones son continuas y se excluyen funciones de impulso y las derivadas de estas funciones.³

³ Para un ejemplo de los tipos de operaciones posibles cuando se permiten impulsos y dobletes, véase F. F. Kuo, *Network Analysis and Synthesis*, 2.^a edición (John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1966), páginas 58-63.

Tampoco aparecen funciones tales como $\text{sen}(1/t)$ o $t^2 \text{sen}(1/t)$ que se excluyen por los requisitos (1) y (2).

En primer lugar se estudiarán las consecuencias de *truncar* la serie infinita de Fourier, lo cual significa que se estudiará la serie finita, en la que se rechazan todos los términos posteriores al *nésimo*. Se supondrá que esta suma parcial es $s_n(t)$. El *error de truncamiento* es la diferencia entre $f(t)$ y $s_n(t)$:

$$\epsilon_n = f(t) - s_n(t) \quad (15-60)$$

Una medida útil o cifra de mérito que se utiliza en estudios avanzados es el *error medio cuadrático*, que es

$$E_n = \frac{1}{T} \int_0^{T'} [\epsilon_n(t)]^2 dt \quad (15-61)$$

La llamada propiedad de los *mínimos cuadrados* de la serie de Fourier indica que la serie de Fourier truncada s_n minimiza el valor de E_n determinado por la ecuación (15-61) en el sentido de que no se puede encontrar un valor más pequeño de E_n para otra serie con el mismo número de términos.⁴ Para ilustrar esto se verá la serie de Fourier para una onda cuadrada, dada por la ecuación (15-26), con la simplificación de que $V = \pi/4$. Para esta serie, las primeras tres de las series truncadas son:

$$s_1 = \cos \omega_0 t \quad (15-62)$$

$$s_2 = \cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t \quad (15-63)$$

y

$$s_3 = \cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t \quad (15-64)$$

Si se compara la tercera de éstas con otras series,

$$p_3 = d_1 \cos \omega_0 t + d_3 \cos 3\omega_0 t + d_5 \cos 5\omega_0 t \quad (15-65)$$

entonces se sabrá que no hay valores de d_1 , d_3 y d_5 que minimicen el error en el sentido de los mínimos cuadrados mejor que los valores que se utilizan en la ecuación (15-64). El mismo postulado se aplica a p_3 con $d_5 = 0$, comparada con s_2 y p_3 con $d_3 = d_5 = 0$, comparada con s_1 .

De acuerdo con este análisis, se sabe que el error se minimizará, pero no se tiene un método general para asegurar que será menor que algún valor prescrito que no se obtenga sino a base de tanteos, usando más términos, hasta que se satisfagan las especificaciones.

⁴ Para un estudio detallado, véase E. A. Guillemin, *Mathematics of Circuit Analysis* (John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1949), páginas 482-496.

Convergencia en series truncadas 527

Las condiciones de Dirichlet permiten un número finito de discontinuidades en cada período de $f(t)$ de la forma de los saltos que se ilustran en la figura 15-13. Esto es importante en este estudio, porque con mucha frecuencia se utilizan las representaciones en serie de Fourier de tales funciones, siendo la onda cuadrada un ejemplo de ello. ¿Qué valor asumirá la serie de Fourier $f(t)$ o la truncada $s_n(t)$ en la discontinuidad? Supóngase que la función $f(t)$ es discontinua en t_1 , con distintos límites a la derecha y a la izquierda de t_1 . Estos valores se distinguirán como sigue: $f(t_1-)$ y $f(t_1+)$. El valor en $t = t_1$ será

$$f(t_1) = \frac{f(t_1+) + f(t_1-)}{2} \quad (15-66)$$

de modo que

$$f(t_1) - f(t_1-) = f(t_1+) - f(t_1) \quad (15-67)$$

lo que significa que la serie adopta un valor medio entre los dos valores de la función. Estos valores se indican con puntos en la figura 15-13.

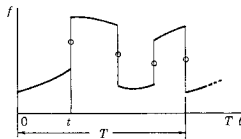


Figura 15-13. Discontinuidades de $f(t)$ en donde los círculos indican el valor dado por la serie truncada en la discontinuidad.

Por supuesto, es demasiado esperar que s_n , siendo sólo una suma parcial de la serie de Fourier, pase a través de los tres puntos, $f(t_1-)$, $f(t_1)$ y $f(t_1+)$; esto requeriría una pendiente infinita. Se espera que haya un error considerable cerca de la discontinuidad, lo que, en efecto, viene a ser el caso. Este efecto se conoce con el nombre de *fenómenos de Gibbs*,⁵ en honor del primer hombre que los investigó, Sir Willard Gibbs.

En la figura 15-14 se ilustra el rebase característico y el decremento oscilatorio amortiguado de los fenómenos de Gibbs. La magnitud del rebase es el 9% del salto total, cuando $n \rightarrow \infty$. La naturaleza de las oscilaciones cambia con n , la frecuencia angular aumenta y el intervalo de tiempo en el decremento disminuye.

⁵ E. A. Guillemin, *op. cit.*, páginas 85-496.

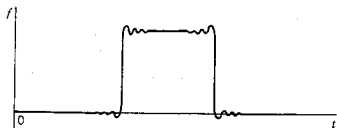


Figura 15-14. El rebase y el decremento oscilatorio que caracteriza a los fenómenos de Gibbs.

Al comparar la serie de Fourier para la onda cuadrada y la onda triangular del ejemplo 3 se observa que la serie para la onda triangular disminuye con mayor rapidez al aumentar n que en el caso de la onda cuadrada. Este es un ejemplo del caso más general que se verá a continuación.

Sean las formas de onda que se ilustran en la figura 15-15. Estas formas de onda son miembros de una familia que se vio ya en el capítulo 8, en que f_b es la derivada de f_a , f_c de f_b y f_d de f_c . Se desea estudiar la relación del contenido de frecuencias de las formas de onda en (a), (b) y (c), excluyendo sólo a (d) que contiene funciones de impulso. Intuitivamente se espera que se requieran más términos en una serie truncada de Fourier para representar a b que a a , y a c que a b , debido a la "continuidad" decreciente de las formas de onda f_a , f_b y f_c . Y, por supuesto, este hecho esperado coincide con lo que se vio en el ejemplo 3.

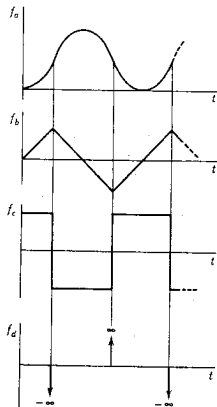


Figura 15-15. Cuatro formas de onda que se relacionan por derivación de arriba hacia abajo y por integración de abajo hacia arriba.

La ley que establece la forma en que los coeficientes de Fourier disminuyen al aumentar n se expresa convenientemente en función del número de veces que se debe diferenciar una función para producir una discontinuidad o salto.⁶ Sea esa derivada la k ésima. En ese caso, las siguientes desigualdades se aplican a los coeficientes de Fourier:

$$|a_n| \leq \frac{M}{n^{k+1}}, \quad |b_n| \leq \frac{M}{n^{k+1}} \quad (15-68)$$

en donde M es una constante que depende de $f(t)$ pero no de n . Es evidente que en estas ecuaciones el signo de igualdad representa el límite superior del decremento del coeficiente en función de n . La aplicación de las ecuaciones (15-68) a las formas de onda de la figura 15-15 (y otras formas de onda de diversos tipos) se resume en la tabla 15-2. Se observa que, para la rapidez más pequeña del decremento de los coeficientes, es $1/n$, que es una consecuencia de haber excluido de este análisis a las funciones de impulso.

La rapidez del decremento de los coeficientes de Fourier con n se puede expresar también en función de las pendientes de 6 db/octava, ya conocidas en el capítulo 13, expresando $|a_n|$ o $|b_n|$ en db y graficando a n (o $n\omega_0$) en una escala logarítmica. En la figura 15-16 se muestra una gráfica de $20 \log |a_n|$ db para $\log \omega$. Los límites superiores de las pendientes correspondientes a los tres primeros casos de la tabla 15-2 son -6 , -12 y -18 db/octava.

TABLA 15-2.

Condición		Ejemplo	Ley* que describe el límite superior de reducción de $ a_n $ y $ b_n $ con n
Salto en:	Impulso en:		
$f(t)$	$f'(t)$	Onda cuadrada	$\frac{1}{n}$
$f'(t)$	$f''(t)$	Onda triangular	$\frac{1}{n^2}$
$f''(t)$	$f'''(t)$	Forma de onda parabólica	$\frac{1}{n^3}$
f^{k-1}	$f^k(t)$	—	$\frac{1}{n^k}$

* Esta es también la relación $|a_n/a_1|$ y $|b_n/b_1|$, si todas las cantidades son distintas de cero.

⁶ I. S. Sokolnikoff y R. M. Redheffer, *Mathematics of Physics and Modern Engineering* (McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1958), página 211.

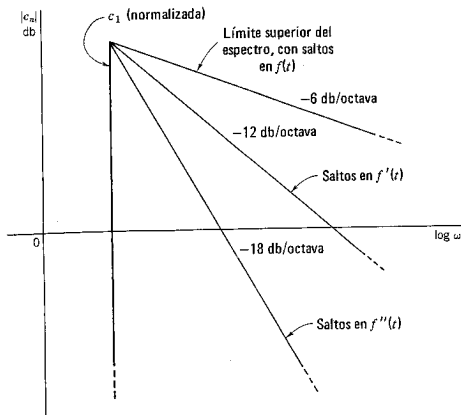


Figura 15-16. El límite superior para la magnitud de las líneas en el espectro en db, graficado en función de $\log \omega$. En la figura se ilustra la conclusión de que ese límite superior disminuye con una rapidez de $6(n+1)$ db/octava, donde n es el número de veces que la función se debe derivar para producir una discontinuidad de salto.

En términos de las nociones que se introducen en este estudio se puede anticipar el espectro de magnitud para una forma determinada en el dominio del tiempo y viceversa, se puede anticipar la forma de onda en el dominio del tiempo, con base en el espectro de magnitud. Esta es una gran ventaja para cualquier ingeniero. Si en una forma de onda hay saltos, se sabe que su espectro de magnitud contendrá líneas que disminuyen sólo como $1/n$. Una forma de onda en que la pendiente cambia bruscamente en algún punto durante el período, pero donde no hay saltos, requerirá cuando mucho una ley $1/n^2$. Una forma de onda con ondulaciones parabólicas intrincadas requerirá, cuando mucho, una ley $1/n^3$. Conforme las ondulaciones se hacen cada vez más pequeñas, se llega finalmente a la forma de onda más suave de todas, la senoidal propiamente dicha.⁷ En la figura 15-17 se muestran ejemplos para ilustrar esas observaciones.

⁷ Mason y Zimmerman describen las formas de onda y sus espectros en función de mediciones que denominan *contenido, variación y ondulación*. Véase S. J. Mason y H. J. Zimmerman, *Electronic Circuits, Signals and Systems* (John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1960), páginas 235-242.

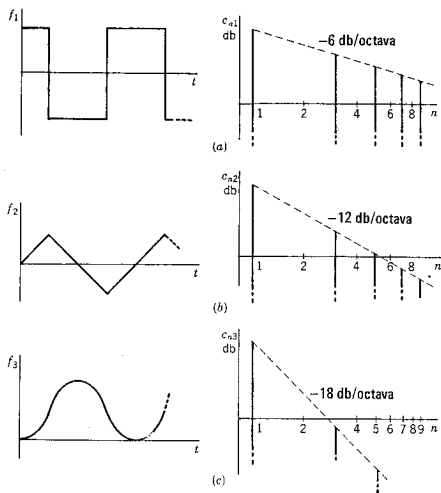


Figura 15-17. Tres ejemplos que ilustran la conclusión general que se muestra en la figura 15-16. Cada parte de la figura presenta una forma de onda y su espectro de magnitud con una magnitud normalizada para $n = 1$.

15-5. FORMA EXPONENCIAL DE LA SERIE DE FOURIER

La serie de Fourier se puede expresar en una forma equivalente, en función de las exponenciales $e^{\pm jn\omega_0 t}$. Supóngase que los términos en la serie se agrupan en la forma

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (15-69)$$

Como se hizo en el capítulo 6, el coseno y el seno se pueden expresar en función de las exponenciales como sigue:

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) \quad (15-70)$$

y

$$\sin n\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \quad (15-71)$$

Substituyendo estas ecuaciones en la expresión (15-69), se obtiene el resultado

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \right) \quad (15-72)$$

Para simplificar esta ecuación, se agrupan los términos con exponentiales similares. Observando que $1/j = -j$, la ecuación se convierte en

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_n - jb_n}{2} \right) e^{jn\omega_0 t} + \left(\frac{a_n + jb_n}{2} \right) e^{-jn\omega_0 t} \right] \quad (15-73)$$

Para simplificar esta expresión se introduce a continuación un nuevo coeficiente para reemplazar los coeficientes a y b . Por definición,

$$\tilde{c}_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, \quad \tilde{c}_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}, \quad \text{y} \quad \tilde{c}_0 = a_0 \quad (15-74)$$

La nueva forma de la ecuación (15-73) es

$$f(t) = \tilde{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{c}_n e^{jn\omega_0 t} + \tilde{c}_{-n} e^{-jn\omega_0 t}) \quad (15-75)$$

Ahora ya se pueden entender mejor las operaciones que se acaban de efectuar. Hacer que n varíe desde 1 hasta infinito en esta ecuación equivale a hacer que n varíe de $-\infty$ a $+\infty$ (incluyendo el cero) en una ecuación compacta,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n e^{jn\omega_0 t} \quad (15-76)$$

Y ésta es la forma exponencial de la serie de Fourier. Los coeficientes \tilde{c}_n se pueden evaluar fácilmente en función de a_n y b_n , que ya se conocen. Por tanto,

$$\begin{aligned} \tilde{c}_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t \, dt - \frac{j}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t \, dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) (\cos n\omega_0 t - j \sin n\omega_0 t) \, dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} \, dt \end{aligned} \quad (15-77)$$

Esta ecuación de \tilde{c}_n se aplica tanto si n es positiva, como se supuso, como si es negativa o cero, lo cual se puede demostrar exactamente mediante el mismo procedimiento. El tilde se usa para distinguir entre el valor real de c_n de la sección 15-1 y el complejo \tilde{c}_n de esta exposición. Si se hace que

$$\tilde{c}_n = |\tilde{c}_n| e^{j\phi_n}, \quad \tilde{c}_{-n} = \tilde{c}_n^* = |\tilde{c}_n| e^{-j\phi_n} \quad (15-78)$$

entonces

$$|\tilde{c}_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} c_n \quad (15-79)$$

y

$$\phi_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n} \quad (15-80)$$

para todas las n , excepto $n=0$, cuando $\tilde{c}_0 = a_0$, que es real y es el valor medio o c-d de $f(t)$. Esta diferencia entre \tilde{c}_n y c_n establece una diferencia en el espectro de la forma ordinaria y la exponencial de la serie de Fourier; pero la diferencia es sencillamente un factor escalar de 1/2 para todas las líneas, excepto para la de $n=0$. Se establece una distinción entre los dos casos utilizando la tilde, y también graficando los valores positivos y los negativos de n para los espectros obtenidos a partir de la forma exponencial de la serie.

EJEMPLO 4

La forma de onda del voltaje de barrido que se ilustra en la figura 15-18 se representa en un ciclo por la ecuación de una recta, $v = (V/T)t$, que se puede substituir en la ecuación (15-77) para obtener los coeficientes \tilde{c}_n de Fourier:

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{T} \int_0^T V t e^{-jn\omega t} dt \quad (15-81)$$

$$\tilde{c}_n = \begin{cases} \frac{jV}{2n\pi}, & n \neq 0 \\ \frac{V}{2}, & n = 0 \end{cases} \quad (15-82)$$

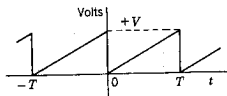


Figura 15-18. Forma de onda de voltaje de barrido del ejemplo 4.

Este resultado, que muestra que \tilde{c}_n disminuye con $1/n$, se podía haber previsto debido a la discontinuidad de saltos en la onda. Substituyendo estos valores de \tilde{c}_n en la ecuación (15-76), se obtiene la siguiente forma para la serie exponencial de Fourier:

$$v(t) = \dots - \frac{jV}{6\pi} e^{-j3\omega t} - \frac{jV}{4\pi} e^{-j2\omega t} - \frac{jV}{2\pi} e^{-j\omega t} + \frac{V}{2} + \frac{jV}{2\pi} e^{j\omega t} + \frac{jV}{4\pi} e^{j2\omega t} + \dots \quad (15-83)$$

Si se desea reducir este resultado a la otra forma de la serie de Fourier, los coeficientes a y b se pueden determinar a partir de las ecuaciones que se infieren de las definiciones de la ecuación (15-74).

$$a_n = \bar{c}_n + \bar{c}_{-n}, \quad b_n = j(\bar{c}_n - \bar{c}_{-n}), \quad a_0 = \bar{c}_0 \quad (15-84)$$

De acuerdo con esas ecuaciones, $a_n = 0$, $a_0 = V/2$ y $b_n = -V/n\pi$ y la serie de Fourier se convierte en

$$v(t) = V \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\text{sen } \omega t + \frac{1}{2} \text{sen } 2\omega t + \frac{1}{3} \text{sen } 3\omega t + \dots \right) \right] \quad (15-85)$$

Los espectros de línea derivados de la ecuación (15-83) se muestran en la figura 15-19.

Se puede interpretar cada término de la ecuación (15-83) o la ecuación más general, la (15-76), como un fasor giratorio, excepto para \bar{c}_0 , que es estacionario. Los términos de la forma $e^{jn\omega t}$ giran en sentido contrario de las manecillas del reloj y $e^{-jn\omega t}$ gira en el sentido de las

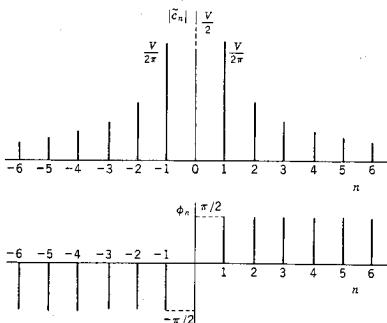


Figura 15-19. Espectros lineales para la forma de onda que se ilustra en la figura 15-18.

manecillas del reloj; \bar{c}_n y \bar{c}_{-n} determinan la posición de los fasores para $t=0$; véase la figura 15-20. Este número infinito de fasores giratorios, que tienen sólo rotaciones a velocidades múltiples de la frecuencia fundamental ω_0 , se suman para dar $f(t)$. Si la serie está truncada, los fasores se suman para dar s_n , que se aproxima a f . Para ilustrar este punto véase la serie del ejemplo 4 en la ecuación (15-83). Para esta serie, $\phi_n = -\phi_{-n}$, lo cual significa que se anulan las compo-

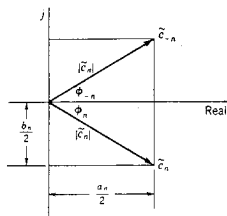
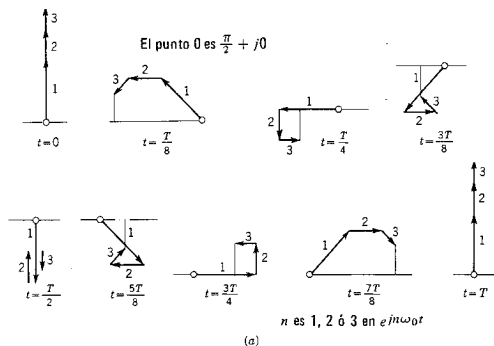
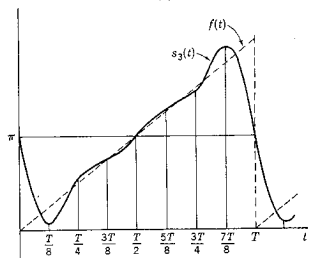


Figura 15-20. Dos fasores giratorios que tienen las posiciones \tilde{c}_{-n} y \tilde{c}_n para $t=0$.



(a)



(b)

Figura 15-21. (a) Nueve posiciones diferentes de los tres fasores giratorios. La parte real de la suma de estos fasores es la amplitud de $s_3(t)$. El pequeño círculo indica la posición $(\pi/2) + j0$ y el número de cada fasor es n en $e^{jn\omega_0 t}$.

nentes imaginarias de los términos de igual frecuencia, pero que las partes reales se suman. Siendo éste el caso, se puede dividir la serie en dos, incluyendo el término constante $V/2 = (V/4) + (V/4)$ y sumar sólo las n positivas. Una vez hecho esto, la parte real de la suma de los fasores tendrá la mitad de la amplitud de la función. En la figura 15-21 se ilustra una gráfica de este tipo para el ejemplo 4, simplificado al hacer que $V = 2\pi$. Se truncó la serie en $n = 3$; el valor de \bar{c}_0 es $\pi/2$, las magnitudes restantes son 1, $1/2$ y $1/3$ y los fasores son todos de 90° . En la figura 15-21(a) de la página anterior se muestran nueve posiciones distintas de los fasores giratorios, y los valores determinados en esta forma a partir de la suma de las partes reales se presentan como $s_3(t)$ junto con $f(t)$ en (b) de esta figura. Si se suman cada vez más fasores giratorios de menor longitud pero mayor velocidad de rotación, la suma fasorial formará una espiral en tal forma que la parte real aumente linealmente con el tiempo.

15-6. RESPUESTA DE ESTADO PERMANENTE A SEÑALES PERIÓDICAS

Ahora ya es posible estudiar el problema que se da al principio de este capítulo. De acuerdo con la figura 15-1, ¿cuál será la respuesta de estado permanente para una entrada periódica que se puede expresar en la forma de serie de Fourier? Se recordará que este tema se trató en el capítulo 8 y que aquí se busca un método alternativo de resolución. Se estudiarán dos planteamientos de este tema.

1. *Método fasorial directo.* Este método se basa en el planteamiento del capítulo 12 en que se utiliza superposición. Se sabe que el fasor que representa a la respuesta es igual al producto de la función de red y el fasor que representa a la excitación. Véase el caso del punto impulsor con

$$\mathbf{I} = \mathbf{YV} \quad (15-86)$$

Si \mathbf{V} se puede resolver en cierto número de otros fasores de modo que

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{V}_n \quad (15-87)$$

entonces

$$\mathbf{I} = \mathbf{YV}_1 + \mathbf{YV}_2 + \dots + \mathbf{YV}_n \quad (15-88)$$

Un término de esta suma se puede escribir como

$$\mathbf{I}_k = Y(jk\omega_0) \mathbf{V}_k \quad (15-89)$$

en donde Y se determina a la frecuencia del fasor V_k que es $k\omega_0$. A continuación se pasa del dominio de frecuencia al dominio del tiempo para dar la i_k correspondiente a I_k ,

$$i_k(t) = |I_k| \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \quad (15-90)$$

y la respuesta será la suma de los términos iguales a la ecuación (15-90) para todos los valores de k . Por supuesto, esto se aplica sólo a respuestas de *estado permanente*. De hecho, en este método se substituye una excitación por un número infinito de fuentes, como se indica en la figura 15-6, y luego se aplica el principio de superposición para obtener la respuesta de estado permanente.

EJEMPLO 5

Véase el problema de determinar la respuesta de estado permanente cuando una fuente de onda cuadrada excita a un circuito RL . La serie de Fourier para una onda cuadrada está dada por la ecuación (15-26); para simplificar sea $\omega_0 = 1$ radián/seg y $V = \pi/4$, de tal manera que la serie es

$$v(t) = \cos t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{1}{5} \cos 5t + \dots \quad (15-91)$$

Utilizando el método de la sección 12-5, los fasores correspondientes a los tres primeros términos son

$$V_1 = 1e^{j0^\circ}, \quad V_3 = \frac{1}{3}e^{-j180^\circ}, \quad V_5 = \frac{1}{5}e^{j0^\circ} \quad (15-92)$$

Si $R = 1$ ohm y $L = 1$ H, entonces, para este problema,

$$Y(jn) = \frac{1}{1 + jn} \quad (15-93)$$

y de acuerdo con esta ecuación, se determinan los valores

$$\begin{aligned} Y(j1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ} \\ Y(j3) &= \frac{1}{\sqrt{10}} e^{-j71.6^\circ} \end{aligned} \quad (15-94)$$

y

$$Y(j5) = \frac{1}{\sqrt{26}} e^{-j78.8^\circ}$$

De acuerdo con la ecuación (15-89), los fasores de corriente son

$$\begin{aligned} I_1 &= 0.707 e^{-j45^\circ} \\ I_3 &= 0.105 e^{-j251.6^\circ} \end{aligned} \quad (15-95)$$

e

$$I_5 = 0.039 e^{-j78.8^\circ}$$

Entonces, la corriente total tiene los siguientes tres primeros términos:

$$i(t) = 0.707 \cos(t - 45^\circ) + 0.105 \cos(3t - 251.6^\circ) + 0.039 \cos(5t - 78.8^\circ) + \dots \quad (15-96)$$

Conforme aumenta mucho el número de términos de la serie, la respuesta $i(t)$ se convierte en lo que se ilustra en la figura 15-22.

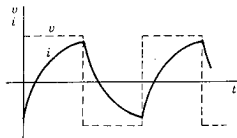


Figura 15-22. La excitación v y la respuesta i calculadas en el ejemplo 5.

2. *Método del producto de espectros.* El segundo método utiliza los espectros de amplitud y fase de la excitación, junto con el de la función de red. Por analogía con la ecuación (15-86), se observa que

$$\left(\begin{array}{c} \text{espectro de amplitud} \\ \text{de respuesta} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{magnitud de la} \\ \text{función de red} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{espectro de amplitud} \\ \text{de la excitación} \end{array} \right) \quad (15-97)$$

de tal manera que

$$\left(\begin{array}{c} \text{espectro de fase} \\ \text{de la respuesta} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{fase de la función} \\ \text{de red} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{espectro de fase} \\ \text{de la excitación} \end{array} \right) \quad (15-98)$$

En algunos casos el espectro de respuesta que se obtiene en esta forma basta para solucionar un problema, sobre todo si se usan los métodos de estimación de la última sección. Si se requiere la respuesta de tiempo en la forma de la ecuación (15-96), se pueden aplicar los métodos fasoriales del capítulo 12. Si se permite que $\tilde{c}_n = \mathbf{V}_n$ en la ecuación (15-76), la excitación se puede expresar como sigue:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{V}_n e^{jn\omega_0 t} \quad (15-99)$$

Multiplicando cada V_n por la admitancia apropiada, como en la ecuación (15-89), se obtiene la siguiente expresión para la respuesta de estado permanente:

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(jn\omega_0) V_n e^{jn\omega_0 t} \quad (15-100)$$

Este resultado se puede simplificar a la forma de la ecuación (15-96) si se combinan pares de exponenciales de la misma frecuencia $n\omega_0$. Se pueden escribir formas equivalentes de la ecuación (15-100) en términos de las partes Re o Im, con n que va de 0 a ∞ , utilizando los métodos de la sección 12-4.

EJEMPLO 6

Véase la onda cuadrada de la figura 15-5, con el origen trasladado a la izquierda en $T/4$ para quedar en la discontinuidad de salto. Sea $\omega_0 = 1$ y $V = \pi/8$ de tal modo que la serie de Fourier en la forma exponencial de la ecuación (15-99) está dada por

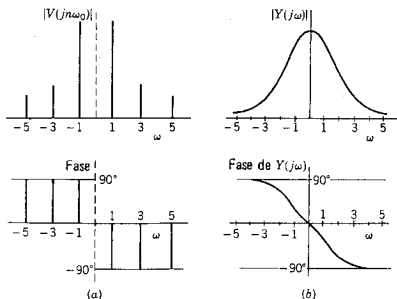
$$|V_n| = \frac{1}{4|n|}, \quad n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

$$\phi_n = -90^\circ, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (15-101)$$

y

$$\phi_n = +90^\circ, \quad n = -1, -3, -5, \dots$$

Los espectros de línea de la amplitud y la fase aparecen ilustrados en la figura 15-23(a). En (b) de esta misma figura se muestran la



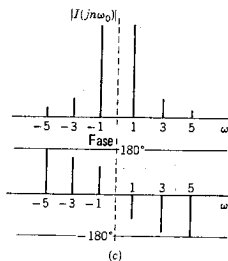


Figura 15-23. (a) Los espectros lineales del voltaje, (b) los espectros continuos de la función admitancia y (c) los espectros lineales de la corriente, que se determinan al multiplicar los dos espectros de magnitud y sumar los dos espectros de fase.

magnitud y la fase de $Y(j\omega)$. Al aplicar las ecuaciones (15-97) y (15-98) se obtienen los espectros de amplitud y fase de la respuesta, que se muestran en la figura 15-23(c). Los valores de Y de la ecuación (15-94) se pueden utilizar junto con los valores de V_n de la ecuación (15-101) para determinar $i(t)$ en la forma de la ecuación (15-100). El resultado se puede reducir algebraicamente a la forma de la ecuación (15-96).

15.7. EL ESPECTRO DE POTENCIA DE SEÑALES PERIÓDICAS

Para determinar el valor eficaz o rmc de una función no senoidal pero periódica se principia con la representación de la función en serie de Fourier, escrita en la forma exponencial de la ecuación (15-76):

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n e^{jn\omega_0 t} = \tilde{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|\tilde{c}_n| \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \quad (15-102)$$

Substituyendo esta forma de $f(t)$ en la ecuación de definición del valor eficaz, dada como la expresión (14-24),

$$F_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T f^2 dt \quad (15-103)$$

en donde se ha seleccionado al tiempo de referencia $t_0 = 0$, se tiene que

$$F_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [\tilde{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|\tilde{c}_n| \cos(n\omega_0 t + \phi_n)]^2 dt \quad (15-104)$$

La evaluación de esta suma infinita de integrales no es tan difícil como parece. Debido a las propiedades de ortogonalidad de estas integrales, que se vieron antes en este capítulo, sobre todo si se utilizan las ecuaciones (15-11) y (15-13), el resultado final es

$$F_{ef}^2 = \bar{e}_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|\bar{e}_n|^2 \quad (15-105)$$

El último término de esta ecuación se puede escribir en otras dos formas, utilizando las relaciones de las ecuaciones (15-78)

$$|\bar{e}_n|^2 = \bar{e}_n \bar{e}_n^* = \bar{e}_n \bar{e}_{-n} \quad (15-106)$$

En la ecuación (15-102), $2|\bar{e}_n|$ es el valor máximo de la función coseno. Si se cambia ahora la notación para hacer que $f(t)$ sea una corriente (o un voltaje), entonces el valor eficaz de cada componente es $I_{efn} = I_{m \acute{a}x n} / \sqrt{2} = \sqrt{2} |c_n|$ y la ecuación (15-105) se convierte en

$$I_{ef}^2 = I_0^2 + I_{ef1}^2 + I_{ef2}^2 + \dots \quad (15-107)$$

en donde un término típico I_{efk}^2 es el cuadrado del valor eficaz de la armónica k . En otras palabras, *el valor eficaz (o rmc) de la función periódica es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los valores eficaces de las componentes armónicas de la función y de I_0 .*

A continuación se pasa a una determinación de la potencia de una red, cuando la excitación es periódica pero no senoidal. Si se utiliza la notación de las ecuaciones (14-37) y (14-39) para el voltaje y corriente, la serie de Fourier para el voltaje es

$$v(t) = V_0 + V_1 \cos(\omega_0 t + \beta_1) + V_2 \cos(2\omega_0 t + \beta_2) + \dots \quad (15-108)$$

y la serie de Fourier para la corriente es

$$i(t) = I_0 + I_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1) + I_2 \cos(2\omega_0 t + \alpha_2) + \dots \quad (15-109)$$

en donde V_0, V_1, I_0, I_1 , etc., son valores máximos de las componentes armónicas del voltaje y la corriente. La potencia instantánea es $p(t) = v(t)i(t)$. Sin embargo, el interés se centra en la *potencia media*, que está dada por la ecuación (14-23), y considerando nuevamente $t_0 = 0$:

$$P_{media} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t) dt \quad (15-110)$$

Substituyendo las ecuaciones (15-108) y (15-109) en esta ecuación, para determinar P_{media} , se pueden utilizar una vez más las relaciones de ortogonalidad de la sección 15-2 para obtener una mayor simplifi-

cación. P_{media} se puede escribir como una suma, un término típico de la cual sería

$$P_{\text{media } k} = \frac{V_k I_k}{2} \cos \theta_k = V_{\text{ef } k} I_{\text{ef } k} \cos \theta_k \quad (15-111)$$

en donde, como en la ecuación (14-39), $\theta_k = \beta_k - \alpha_k$. La suma de términos de la forma de la ecuación (15-111) se puede escribir

$$P_{\text{media}} = P_{\text{media } 1} + P_{\text{media } 2} + P_{\text{media } 3} + \dots \quad (15-112)$$

en donde el término típico $P_{\text{media } k}$ es la potencia media de la armónica k . Por tanto, la potencia total para voltajes y corrientes periódicas pero no senoidales es la suma de las potencias medias de las componentes armónicas. En la potencia media no influye el hecho de que la corriente esté a una frecuencia voltaje a otra. Por supuesto, ésta es la base para construir un espectro de potencia muy semejante al que ya se construyó para el espectro de señales.

Como en el caso de los espectros de señales, hay dos convenciones para graficar los espectros de potencia. La primera se ilustra en la figura 15-24(a) y se construye a partir de la ecuación (15-112), utilizando una línea de longitud $P_{\text{media } k}$ a la frecuencia discreta $k\omega_0$. Por supuesto, todas las $P_{\text{media } k}$ son positivas, de tal manera que sólo existe un espectro de magnitud. Los espectros de dos lados se relacionan con espectros de un solo lado, asignando la mitad de $P_{\text{media } k}$ a la frecuencia positiva $k\omega_0$ y la otra mitad a la frecuencia negativa $-k\omega_0$, como se ilustra en la figura 15-24(b). Por lo común, estos espectros se utilizan en estudios avanzados tales como los espectros de densidad de potencia de señales aleatorias.

Las gráficas del espectro de potencia para una carga determinada son útiles para visualizar la distribución de la potencia media en función de la frecuencia. En la figura 15-25 se ilustra un método que permite medir tales espectros. En (a) de esta figura se muestra un

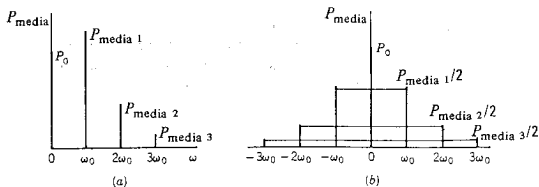


Figura 15-24. Ejemplos de las dos convenciones que se usan para graficar el espectro de potencia: (a) espectros de un solo lado y (b) espectros de dos lados.

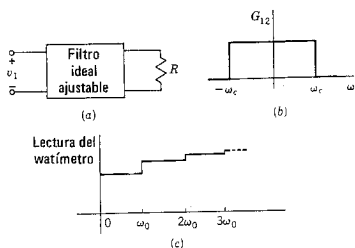


Figura 15-25. (a) Método mediante el cual se puede medir el espectro de potencia, empleando un filtro ideal ajustable con las características de magnitud que se indican en (b) donde ω_c es ajustable. (c) La potencia en R conforme aumenta ω_c .

filtro ideal que termina en una carga resistiva R , y se excita por una fuente de voltaje. El filtro ideal permite transmitir componentes de frecuencia menor que ω_c : pero se rechazan las componentes mayores que ω_c como lo ilustra la característica de magnitud (b) de la misma figura. Si la frecuencia de corte del filtro varía de un valor pequeño a otro grande, la potencia de la carga, medida con un watímetro, variará como se indica en la figura 15-25(c) con incrementos escalonados a frecuencias armónicamente relacionadas.

BIBLIOGRAFIA

- CHIRLIAN, PAUL M., *Basic Network Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969, capítulo 6.
- CLOSE, CHARLES M., *The Analysis of Linear Circuits*, Harcourt Brace Jovanovich, Nueva York, 1966, capítulo 9.
- CRUZ, JOSE B., Jr. y M. E. VAN VALKENBURG, *Signals in Linear Circuits*, Houghton Mifflin Company, Boston, Mass., 1974, capítulo 17.
- GABEL, ROBERT A. y RICHARD A. ROBERTS, *Signals and Linear Systems*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1973. Véase el capítulo 5.
- HAYT, WILLIAM H., Jr. y JACK E. KEMMERLY, *Engineering Circuit Analysis*, 2.ª ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1971. Véase el capítulo 17.
- MANNING, LAURENCE A., *Electrical Circuits*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1965, capítulo 20.

EJERCICIOS PARA COMPUTADORA DIGITAL

El análisis de Fourier se puede desarrollar con gran rapidez y precisión en programas de computadora que pueden conseguirse fácilmente. Las referencias que tratan de los métodos de computadora del análisis de Fourier se citan en el apéndice E-2.3. Las referencias específicas que pueden ser útiles son Huelsman,

referencia 7 del apéndice E-10, principiando en la página 25, capítulo 5 de Ley, referencia 11 en el apéndice E-10, y el capítulo 3 de Seely, Tarnoff y Holstein, referencia 14 del apéndice E-10.

PROBLEMAS

- 15-1. Se da la siguiente serie de Fourier:

$$v = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{2} \sin 2\omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \dots \right) \right]$$

En otros problemas de este capítulo se le pedirá que determine esa serie, pero en este caso se le da el resultado. Dibuje el espectro de amplitud y fase para este $v(t)$ similar a la gráfica que se muestra en la figura 15-4(b) y (c).

- 15-2. Repita el problema 15-1 para la serie de Fourier

$$v(t) = \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega_0 t + \frac{2}{3} \cos 2\omega_0 t - \frac{2}{15} \cos 4\omega_0 t + \dots \right)$$

- 15-3. Repita el problema 15-1 para la serie de Fourier que se da en el texto como la ecuación (15-26). Observe que no se le pide que derive esa ecuación, sino simplemente que la utilice para graficar los espectros de magnitud y fase.

- 15-4. Repita el problema 15-1 para la serie de Fourier que se da en la ecuación (15-55).

- 15-5. Repita las gráficas de amplitud y fase del problema 15-1 para la siguiente serie de Fourier:

$$v(t) = \frac{4V}{\pi} \left(\sin 2\pi t + \frac{1}{3} \sin 6\pi t + \frac{1}{5} \sin 10\pi t + \dots \right)$$

- 15-6. Repita el problema 15-1 para la serie

$$v(t) = \frac{V}{2} - \frac{V}{\pi} \left(\sin 2\pi t + \frac{1}{2} \sin 4\pi t + \frac{1}{3} \sin 6\pi t + \dots \right)$$

- 15-7. Repita el problema 15-1 para la serie de Fourier

$$v(t) = V[1 + 2(\cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \cos 6\pi t + \dots)]$$

- 15-8. Determine los coeficientes de Fourier para el tren de pulsos que se muestra en la figura para $a = T/2$ y $a = T/4$.

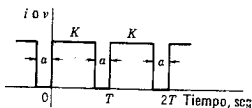


Fig. P15-8.

- 15-9. La forma de onda de la figura que se muestra a continuación se conoce con el nombre de diente de sierra. Para esta forma de onda, determine los coeficientes de Fourier y grafique los espectros de amplitud y fase.

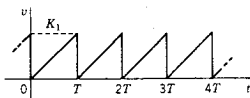


Fig. P15-9.

- 15-10. La forma de onda que se muestra a continuación se compone de un tren de triángulos isósceles. Determine los coeficientes de Fourier y grafique los espectros correspondientes de amplitud y fase de dicha forma de onda.

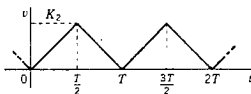


Fig. P15-10.

- 15-11. La forma de onda de la figura es de forma trapezoidal y tiene un período $T = 4a$. Para esta función periódica, determine los coeficientes de Fourier y grafique los espectros correspondientes de amplitud y fase.
- 15-12. La forma de onda de la figura siguientes es semejante a la que se muestra en el problema 15-7, excepto en que los triángulos del tren ya no son isósceles, a menos que $k_2 = 1/2$. Para esta función periódica, determine los coeficientes de Fourier y grafique los espectros correspondientes de amplitud y fase.

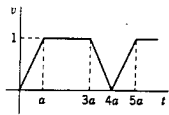


Fig. P15-11.

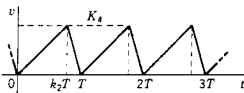


Fig. P15-12.

- 15-13. En la siguiente figura se muestra una forma de onda de rectificador de onda completa que es la magnitud de la función coseno. Determine los coeficientes de Fourier y grafique los espectros correspondientes de amplitud y fase de esa forma de onda.

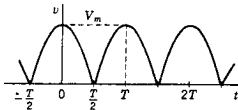


Fig. P15-13.

- 15-14. La forma de onda de este problema es semejante a la del problema 15-13; la gráfica corresponde a una función coseno cuando el coseno es positivo y cero cuando es negativo. Para esta forma de onda periódica

determine los coeficientes de Fourier y grafique los espectros de amplitud y fase correspondientes.

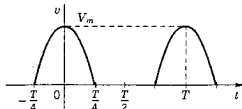


Fig. P15-14.

- 15-15. La siguiente figura muestra un tren de pulsos de coseno al cuadrado derivados de la forma de onda del problema 15-14 al elevar esa función al cuadrado. Para esa forma de onda periódica determine los coeficientes de Fourier y grafique los espectros correspondientes de amplitud y fase.

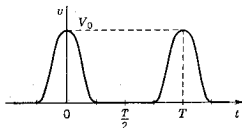


Fig. P15-15.

- 15-16. Se da la forma de onda periódica

$$v(t) = t^2, \quad 0 < t < T$$

Determine los coeficientes de Fourier y grafique los espectros de amplitud y fase para el caso especial en que $T=1$.

- 15-17. Se da la forma de onda periódica

$$v(t) = e^{kt}, \quad 0 < t < T$$

Estudie el caso especial con $k=1$ y $T=1$. Determine los coeficientes de Fourier y grafique los espectros de amplitud y fase.

- 15-18. Repita el problema 15-17 con $k=-1$ y $T=1$.

- 15-19. Se da la forma de onda periódica

$$v(t) = \cosh 2\pi t, \quad 0 < t < 1$$

Determine la serie de Fourier y trace los espectros de amplitud y fase.

- 15-20. La entrada a un generador de armónicas es la forma de onda periódica

$$v(t) = Ce^{-\alpha t}, \quad 0 < t < 1, \quad T=1$$

siendo $\alpha > 0$. La salida se debe tener a través de un filtro que dé paso sólo a una frecuencia. Si α se puede ajustar, ¿qué valor de α dará la máxima salida a través del filtro para la segunda armónica? ¿Para la tercera armónica? ¿Para la quinta armónica?

- 15-21. Para las siguientes formas de onda de señal utilice las ecuaciones (15-36)

Problemas 547

y (15-37) para determinar las partes par e impar de las funciones que se dan:

- (a) $v(t) = 1/(1+t)$ (d) $v(t) = e^{j\omega t}$
 (b) $v(t) = t \operatorname{sen} t$ (e) $v(t) = te^{-t}$
 (c) $v(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$ (f) $v(t) = 1/(1+t^2)$

15-22. En la siguiente figura se muestran formas de onda que son periódicas, pero se presentan para un solo período. Para cada una de estas formas de onda utilice las ecuaciones (15-36) y (15-37), con el fin de determinar las partes par e impar de la función que se da y grafique esas dos partes como se hizo en la figura 15-12.

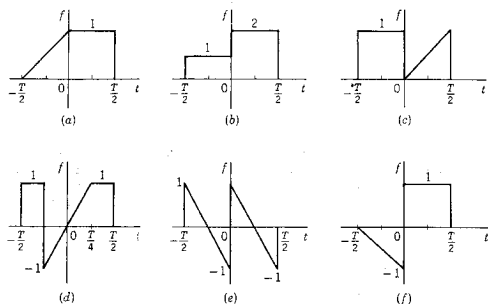


Fig. P15-22.

15-23. En la figura se ilustra una función $f(t)$ de $t=0$ a $t=T/2$, en donde T es el período de la forma de onda. Grafique cuatro $f(t)$ en el intervalo comprendido entre $t=T/2$ y $t=T$, de modo que la función del período satisfaga las siguientes especificaciones:

- (a) $a_0 = 0$. (c) $a_n = 0$ para todos los valores de n .
 (b) $b_n = 0$ para todos los valores de n . (d) a_n y b_n estén presentes sólo para valores impares de n .

En los siguientes problemas determine los coeficientes de la forma exponencial de la serie de Fourier y grafique los espectros de magnitud y fase de las formas de onda

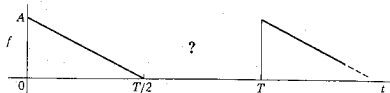


Fig. P15-23.

Problema

Use la forma de onda del problema

15-24.

Ejemplo 1, figura 15-5

15-25.

Ejemplo 2, figura 15-11

15-26.

15-8

15-27.

15-9

15-28.

15-10

15-29.

15-11

15-30.

15-12

15-31.

15-13

15-32.

15-14

15-33.

15-15

15-34. La entrada a un dispositivo es una onda senoidal

$$v_{en}(t) = V_m \text{ sen } \omega t$$

como se indica en (a) de la figura. Se obtiene una salida del dispositivo sólo cuando v_{en} sobrepasa a un valor constante V_g y, en este caso, la salida es igual a la entrada, como se indica en (b) de la figura. Por supuesto, las dos funciones v_{en} y v_{sal} son periódicas. Para v_{sal} determine la serie de Fourier en forma exponencial y grafique los espectros de magnitud y fase.

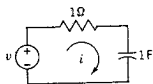


Fig. P15-35.

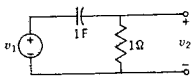


Fig. P15-36.

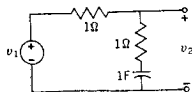


Fig. P15-37.

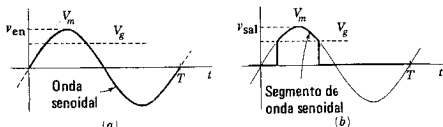
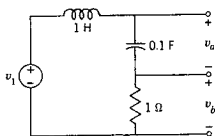


Fig. P15-34.

- 15-35. En la red que se ilustra en la figura, $v(t)$ es una forma de onda periódica para la que $\omega_0 = 1$ radián/seg. Para las siguientes formas de onda, determine el espectro de magnitud y el de fase de la función periódica $i(t)$: (a) la onda cuadrada de la figura 15-5, (b) la onda triangular de la figura 5-11 y (c) la forma de onda del voltaje de barrido de la figura 15-18.
- 15-36. En la red de la figura que se muestra a continuación, $v_1(t)$ es el voltaje de entrada a la red de dos puertos que es periódico con $\omega_0 = 1$ radián/seg. Para las siguientes tres formas de onda de $v_1(t)$, determine el espectro de magnitud y fase de la función periódica $v_2(t)$: (a) la onda cuadrada de la figura 15-5, (b) la onda triangular de la figura 5-11 y (c) la onda triangular de la figura 15-18.
- 15-37. En la red de dos puertos de la figura $v_1(t)$ es un voltaje periódico y el sistema opera en el estado permanente. Para las siguientes formas de onda de $v_1(t)$, con $\omega_0 = 1$ radián/seg, determine el espectro de magnitud y fase de la onda periódica $v_2(t)$: (a) la onda cuadrada de la figura 15-5, (b) la onda triangular de la figura 15-11 y (c) la onda triangular de la figura 15-18.

- 15-38. En la red de la figura $v_1(t)$ es el voltaje de entrada y $v_a(t)$ y $v_b(t)$ son voltajes de salida. Se está estudiando el caso de $v_1(t)$ como función periódica y se desea determinar los espectros de magnitud y fase de las salidas periódicas. Utilice la siguiente expresión para la entrada:

$$v_1(t) = t^2, \quad 0 < t < 1, \quad T = 1$$



Los valores de los elementos en H o F

Fig. P15-38.

- 15-39. Repita el problema 15-38 si

$$v_1(t) = e^{-t}, \quad 0 < t < 1, \quad T = 1$$

- 15-40. Repita el problema 15-38 si

$$v_1(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - n)$$

que es un tren de impulsos de extensión infinita.

- 15-41. Para la red de un puerto de la figura 14-2 se establece que

$$i = 10 \cos t + 5 \cos(2t - 45^\circ)$$

$$v = 2 \cos(t + 45^\circ) + \cos(2t + 45^\circ) + \cos(3t - 60^\circ)$$

(a) ¿Cuál es la potencia media de la red? (b) Grafique el espectro de potencia.

- 15-42. En la red de la figura se indica que

$$v_1 = 120 \sin \omega_0 t + 50 \cos 3\omega_0 t$$

$$v_2 = 80 \sin(\omega_0 t + 30^\circ) + 10 \sin 3\omega_0 t$$

$$i_1 = 15 \sin(\omega_0 t - 30^\circ)$$

$$i_2 = 0.5 \sin(3\omega_0 t - 45^\circ)$$

- (a) Determine la ecuación de $v_3(t)$. (b) Determine la ecuación de $i_3(t)$.
 (c) Calcule la potencia media a la red pasiva. (d) Grafique el espectro de potencia de este sistema.

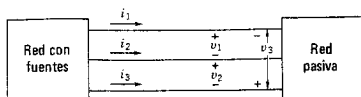
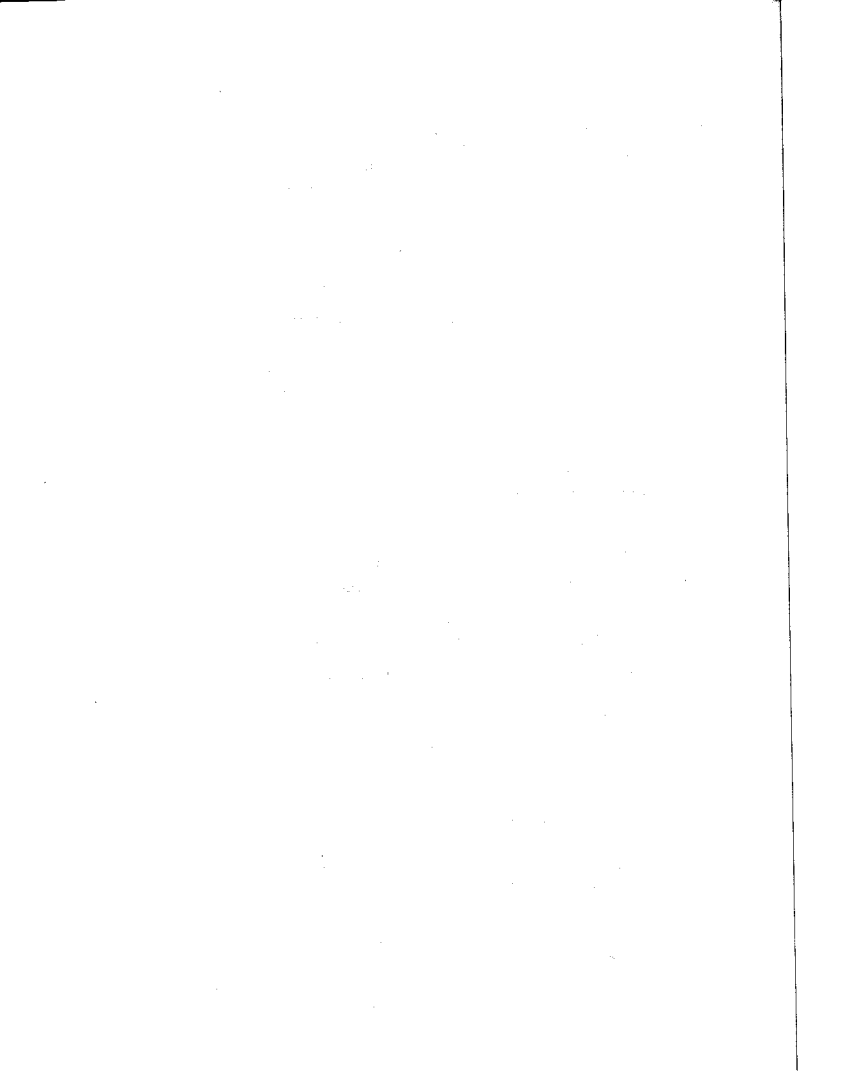


Fig. P15-42.



CAPITULO 16

16 Integral de Fourier y espectros continuos

En este capítulo se amplían los métodos de Fourier del capítulo 15 para incluir el caso de la señal que se produce una vez en un determinado intervalo de tiempo finito y nunca se repite, y para introducir la *integral de Fourier*. Esto se logra haciendo que el período T se haga infinito en la serie de Fourier. El espectro de líneas se convierte entonces en un *espectro continuo*.

16-1. ENVOLVENTE DE ESPECTRO PARA UN PULSO RECURRENTE

En la figura 16-1 se muestra la forma de onda de un pulso periódico cuya magnitud es V_0 y con una duración a . Las coordenadas se seleccionan de tal manera que

$$f(t) = \begin{cases} V_0, & -a/2 < t < a/2 \\ 0, & -T/2 < t < -a/2, a/2 < t < T/2 \end{cases} \quad (16-1)$$

En aplicaciones del radar es útil definir la relación a/T como el *factor de trabajo*. Es de interés el espectro de $f(t)$, conforme el factor del trabajo se hace cada vez más pequeño, tendiendo a 0 en el límite.

Los coeficientes de Fourier se pueden determinar para esta $f(t)$ a partir de la ecuación (15-77) para todos los valores de n ; por tanto,

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{T} \int_{-a/2}^{a/2} V_0 e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (16-2)$$

$$\tilde{c}_n = \frac{V_0}{n\pi} \left(\frac{e^{jn\omega_0 a/2} - e^{-jn\omega_0 a/2}}{2j} \right) = V_0 \frac{\omega_0 a}{2\pi} \left(\frac{\text{sen}(n\omega_0 a/2)}{n\omega_0 a/2} \right) \quad (16-3)$$

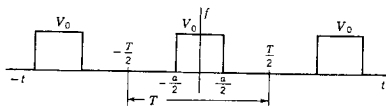


Figura 16-1. Un pulso periódico con amplitud V_0 , duración a y período T .

Ahora, puesto que $T = 2\pi/\omega_0$, la ecuación se puede escribir finalmente como

$$\tilde{c}_n = V_0 \frac{a}{T} \frac{\text{sen}(n\omega_0 a/2)}{n\omega_0 a/2} \quad (16-4)$$

Si se hace que $x = n\omega_0 a/2$, entonces la ecuación (16-4) tiene la forma $(\text{sen } x)/x$ que es muy conocida en las obras de matemáticas y aparece graficada en la figura 16-2. Se observará en la gráfica que la función tiene el valor 1, cuando $x = 0$, correspondiendo al caso $n = 0$ de la ecuación (16-4). Obsérvese también que \tilde{c}_n tiene valores tanto positivos como negativos, correspondiendo a una fase ϕ_n de θ° , o bien de 180° .

Ahora la ecuación (16-4) tiene valores sólo para las frecuencias discretas $n\omega_0$, éstos son los valores de frecuencia a los que se tendrán líneas en el espectro \tilde{c}_n . La *envolvente* de \tilde{c}_n es una función *continua* que se encuentra substituyendo $n\omega_0$ con ω , de manera que es

$$\text{Envolvente de } \tilde{c}_n = V_0 \frac{a}{T} \frac{\text{sen}(\omega a/2)}{(\omega a/2)} \quad (16-5)$$

Esta envolvente tiene un papel importante en el estudio del presente capítulo.

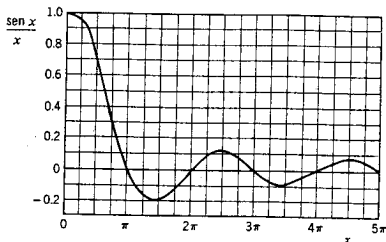


Figura 16-2. El $(\text{sen } x)/x$ de la ecuación 16-5, con $x = \omega a/2$.

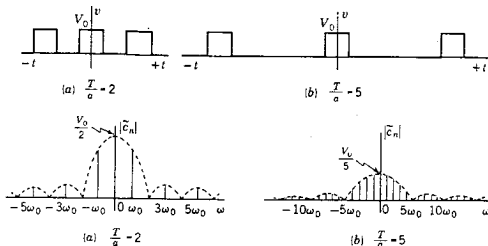


Figura 16-3. Se muestran dos pulsos periódicos para (a) $T/a = 2$ y (b) $T/a = 5$. Debajo de las formas de onda se ilustran los espectros lineales correspondientes a la amplitud.

A continuación se determina \tilde{c}_n , conforme cambia la relación a/T . Esto se hace primero para el factor de trabajo $1/2$ y luego para $1/5$, generalizando finalmente para $1/N$. Para $a/T = 1/2$, la envolvente de \tilde{c}_n es

$$\text{Envolvente de } \tilde{c}_n = \frac{V_0 \operatorname{sen}(\omega a/2)}{2 \omega a/2} \quad (16-6)$$

que se representa por la curva punteada de la figura 16-3(a). La envolvente tiene valor cero cuando

$$\frac{\omega a}{2} = \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots \quad (16-7)$$

o a las frecuencias

$$\omega = \frac{\pm 2\pi}{a}, \frac{\pm 4\pi}{a}, \frac{\pm 6\pi}{a}, \dots \quad (16-8)$$

Ahora la frecuencia fundamental en $f(t)$ es $\omega_0 = 2\pi/T$, de manera que para $T = 2a$, \tilde{c}_n tiene valores

$$n\omega_0 = \frac{n\pi}{a} \quad (16-9)$$

Comparando las ecuaciones (16-8) y (16-9) se observa que las armónicas pares tienen valor cero, excepto para \tilde{c}_0 . Esto se ilustra en la figura 16-3(a), en donde se demuestra que el espectro de amplitud tiene líneas en $\pm n\omega_0$ sólo para n impar.

Repetiendo, a continuación, el caso $a/T = 1/5$, la envolvente del espectro de amplitud es

$$\text{Envolvente de } \tilde{c}_n = \frac{V_0 \operatorname{sen}(\omega a/2)}{5 \omega a/2} \quad (16-10)$$

554 Integral de Fourier y espectros continuos

Se tendrán líneas en los espectros de amplitud y fase cuando

$$n\omega_0 = \frac{2n\pi}{5a} \quad (16-11)$$

Comparando con la ecuación (16-8), se observa que las líneas para $\pm 5\omega_0$, $\pm 10\omega_0$, etc, tendrán amplitud cero. El espectro de amplitud correspondiente a este caso se ilustra en la figura 16-3(b).

En el caso general, el espaciamiento entre las líneas será, para un factor de trabajo de $a/T = 1/N$,

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 \quad (16-12)$$

y la amplitud de las líneas será

$$|\tilde{\epsilon}_n| = \frac{V_0}{N} \left| \frac{\text{sen}(n\omega_0 a/2)}{n\omega_0 a/2} \right| \quad (16-13)$$

en donde

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{Na} \quad (16-14)$$

Conforme N se hace grande, por ejemplo 1000 ó 10,000, se hace grande el número de líneas en un determinado intervalo de frecuencia y la separación de ellas se hace muy pequeña; pero también se hará muy pequeña la amplitud de cada línea dada por la ecuación (16-13). En este caso se requerirán más componentes de frecuencia, para formar un pulso más breve; pero también será menor la amplitud de las componentes de frecuencia requeridas. Ahora ya se puede estudiar la situación para el límite $N \rightarrow \infty$.

16-2. LA INTEGRAL Y LA TRANSFORMADA DE FOURIER

De acuerdo con el pulso que se usó como ejemplo en la sección anterior, el límite para $N \rightarrow \infty$ es el mismo que el límite para el período $T \rightarrow \infty$, ya que $a/T = 1/N$. Por tanto, en la figura 16-1 el ancho del pulso a se mantiene constante conforme $T \rightarrow \infty$, y esto se puede interpretar como el caso de un solo pulso o un pulso no recurrente.

Este estudio principia considerando el producto de T y $\tilde{\epsilon}_n$ de la ecuación (15-77):

$$\tilde{\epsilon}_n T = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (16-15)$$

Puesto que se sabe que \tilde{c}_n es compleja, al producto se le asignará la notación

$$F(jn\omega_0) = \tilde{c}_n T = 2\pi \frac{\tilde{c}_n}{\Delta\omega} \quad (16-16)$$

que se obtiene utilizando la ecuación (16-12). De donde,

$$\tilde{c}_n = \frac{F(jn\omega_0) \Delta\omega}{2\pi} \quad (16-17)$$

Volviendo una vez más al ejemplo de la sección anterior, se observa que, conforme la amplitud de las líneas del espectro de amplitud se hace pequeña, también se reduce el espaciamiento entre líneas. En realidad, si se divide la ecuación (16-5) para \tilde{c}_n entre la ecuación (16-12) para $\Delta\omega$, se obtiene

$$\text{Envolvente de } \frac{\tilde{c}_n}{\Delta\omega} = a \frac{V_0 \text{sen}(\omega a/2)}{2\pi \omega a/2} \quad (16-18)$$

que es independiente de N y, por tanto, de T , y en consecuencia no cambiará conforme $T \rightarrow \infty$. Esta propiedad, que se ha ilustrado por medio de un pulso, se aplica para todas las $f(t)$ que no sean recurrentes. Puesto que, de acuerdo con la ecuación (16-17), $\tilde{c}_n/\Delta\omega = F(j\omega n_0)/2\pi$, las conclusiones a que se llega en lo que respecta a la ecuación (16-18) se aplican también a $F(j\omega n_0)$. Entonces, substituyendo \tilde{c}_n de la ecuación (16-17), en la $f(t)$ dada por la ecuación (15-76), se obtiene

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(j\omega n_0)}{2\pi} e^{-jn\omega_0 t} \Delta\omega \quad (16-19)$$

Ahora, conforme $T \rightarrow \infty$, se sabe, debido al cálculo integral, que $\Delta\omega \rightarrow d\omega$. El producto $n\omega_0 = n\Delta\omega \rightarrow \omega$, que es la frecuencia variable. Entonces, si se interpreta el límite de la suma de la ecuación (16-19) como la integral, se tiene para $f(t)$ de la ecuación (16-19),

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (16-20)$$

$F(j\omega)$ se encuentra directamente a partir de la ecuación (16-15) haciendo las mismas substituciones que se efectuaron en la ecuación (16-19),

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (16-21)$$

sujeta a la condición suficiente pero no necesaria

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (16-22)$$

que se vio en la sección 16-4. Las ecuaciones (16-20) y (16-21) constituyen el *par de transformadas de Fourier*, en el mismo sentido que $F(s)$ y $f(t)$ eran el par de transformadas de Laplace en el capítulo 7. En consecuencia,

$$F(j\omega) = \mathcal{F}f(t) \quad (16-23)$$

y

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}F(j\omega) \quad (16-24)$$

En términos de la ecuación (16-21), $F(j\omega)$ es la *integral de Fourier* de $f(t)$ y de acuerdo con la ecuación (16-23) es también la *transformada de Fourier* de $f(t)$. En otras palabras, la integral de Fourier se denomina también transformada de Fourier.

Existe otra terminología para $F(j\omega)$ que se deriva al comparar la ecuación (16-21) y \tilde{c}_n de la ecuación (15-77). Supóngase que $f(t)$ es un pulso de forma arbitraria y con una duración $a < T$. Entonces, los límites de integración para las dos ecuaciones son idénticos y

$$F(j\omega) = \int_{-a/2}^{a/2} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (16-25)$$

y

$$\tilde{c}_n = \int_{-a/2}^{a/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (16-26)$$

Al comparar estas dos ecuaciones se observa que la única diferencia entre $F(j\omega)$ y $\tilde{c}_n(jn\omega_0)$ es que una es una función continua y la otra no lo es, quedando definida sólo para valores discretos de frecuencia. Por tanto, es razonable que en

$$F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\phi(\omega)} \quad (16-27)$$

$|F(j\omega)|$ se conozca como el *espectro continuo de amplitud* y $\phi(\omega)$ sea el *espectro continuo de fase* para una $f(t)$ no recurrente. Entonces, los dos tipos de espectros que se han estudiado se conocen por los nombres de *línea*, o *discreto* y *continuo*. En lo que respecta a los espectros continuos, se pueden establecer las siguientes observaciones concretas:

- (1) La forma de los espectros continuos de amplitud y fase para una $f(t)$ no recurrente es idéntica a las envolventes de los espectros lineales de amplitud y fase para el mismo pulso recurrente.
- (2) Todas las frecuencias están presentes en el espectro continuo de amplitud, en el sentido que $F(j\omega)$ queda definida para todos los valores $\omega (-\infty < \omega < \infty)$; la amplitud de cualquier componen-

te de frecuencia es excesivamente pequeña, $F(j\omega)j\omega/2\pi$ de acuerdo con la ecuación (16-17).

Para la síntesis de un pulso por adición de las componentes de frecuencia, el espectro continuo requiere *todas* las componentes de frecuencia. De acuerdo con el análisis, se sabe que un solo pulso contiene todas las componentes de frecuencia. Esto se confirma por la experiencia común de que el pulso de un rayo da como resultado una explosión de estática en todos los receptores, desde las ondas de radio de baja frecuencia hasta los aparatos de televisión. De hecho, en un automóvil el pulso recurrente en una bujía sucia puede transmitir todas las componentes de frecuencia.

En las dos siguientes secciones se dan ejemplos de espectros continuos.

16.3. APLICACION EN EL ANALISIS DE REDES

La transformada de Fourier para una forma de onda de pulso ha servido para introducir la idea de la nueva transformada. Con base en las ecuaciones (16-20) y (16-21), pares adicionales de transformadas se pueden calcular para formas de onda útiles, en forma similar a la que se utilizó en el capítulo 7 para la transformada de Laplace. Como siguiente ejemplo, véase la forma de onda exponencial descrita por la ecuación

$$i_1(t) = I_0 e^{-kt}, \quad t \geq 0 \quad (16-28)$$

que tiene valor cero para t negativa y satisface la ecuación (16-22), a condición de que $k > 0$. Esta forma de onda se ilustra en la figura 16-4. De acuerdo con la ecuación (16-21), la transformada de Fourier correspondiente es

$$I_1(j\omega) = I_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt} u(t) e^{-j\omega t} dt \quad (16-29)$$

$$= \frac{I_0 e^{-(k+j\omega)t}}{-(k+j\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{I_0}{j\omega + k} \quad (16-30)$$



Figura 16-4. Forma de onda exponencial descrita por la ecuación (16-28).

Por tanto,

$$I_1(j\omega) = \mathcal{F}[i_1(t)] = \frac{I_0}{j\omega + k} \quad (16-31)$$

y la magnitud y la fase son

$$|I_1(j\omega)| = \frac{I_0}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \quad (16-32)$$

y

$$\theta(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{k}\right) \quad (16-33)$$

Estas dos ecuaciones aparecen graficadas en la figura 16-5. Se trata de espectros continuos para la función exponencial descrita por la ecuación (16-28). Debido a la propiedad de unicidad de la transformada de Fourier, la transformada inversa es

$$\mathcal{F}^{-1} \frac{I_0}{j\omega + k} = I_0 e^{-kt} u(t) \quad (16-34)$$

Una de las aplicaciones clásicas de las transformadas de Fourier es similar a la que se estudió en relación con la transformada de Laplace, es decir, la solución de un sistema descrito por una ecuación diferencial. Para ilustrar este uso, primeramente se determina la transformada

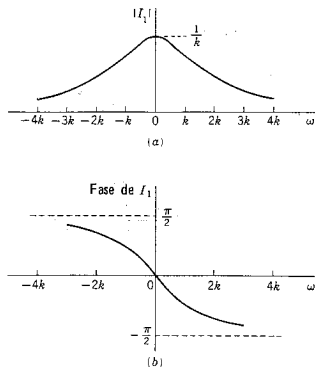


Figura 16-5. Espectros de magnitud y fase para la forma de onda exponencial de la ecuación (16-28).

de Fourier de la primera derivada de una función del tiempo. De acuerdo con la ecuación (16-20), se observa que

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (16-35)$$

Este resultado se infiere porque la única función dentro de la integral es $e^{j\omega t}$, y se ha utilizado el procedimiento acostumbrado para intercambiar el orden de diferenciación e integración. Al comparar esta ecuación con la (16-20) se observa que $j\omega F(j\omega)$ substituye a $F(j\omega)$, de tal manera que

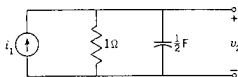
$$\mathfrak{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega F(j\omega) \quad (16-36)$$

Para continuar, se aplicará este resultado a la red que se ilustra en la figura 16-6(a). Sea la fuente de corriente

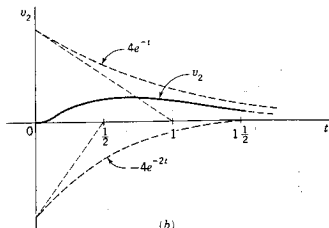
$$i_1(t) = 2e^{-t}u(t) \quad (16-37)$$

Para los valores de elementos que se dan en la figura 16-6, la red se describe mediante

$$\frac{1}{2} j\omega V_2(j\omega) + V_2(j\omega) = I_1(j\omega) = \frac{2}{j\omega + 1} \quad (16-38)$$



(a)



(b)

Figura 16-6. (a) Una red RC en la que $i_1(t)$ está descrita por la ecuación (16-37) y $v_2(t)$ se debe encontrar. (b) Gráficas de las dos partes de la ecuación (16-41) y de la respuesta $v_2(t)$.

Por operaciones algebraicas

$$V_2(j\omega) = \frac{4}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)} \quad (16-39)$$

Siguiendo el patrón que se utilizó en el capítulo 7, se desarrolla esta función por fracciones parciales y se obtiene

$$V_2(j\omega) = \frac{4}{j\omega + 1} - \frac{4}{j\omega + 2} \quad (16-40)$$

Ahora se está en condiciones de utilizar la transformada inversa de Fourier, y el par de transformadas necesario está dado por la ecuación (16-34). Por consiguiente,

$$v_2(t) = 4e^{-t} - 4e^{-2t}, \quad t \geq 0 \quad (16-41)$$

y valor cero para $t < 0$. Este resultado se ilustra en la figura 16-6(b).

Para ilustrar un segundo método que se puede usar mediante la transformada de Fourier, se reacomoda la ecuación (16-38) en la siguiente forma:

$$Y(j\omega)V_2(j\omega) = I_1(j\omega) \quad (16-42)$$

o bien, puesto que $Z(j\omega) = 1/Y(j\omega)$,

$$V_2(j\omega) = Z(j\omega)I_1(j\omega) \quad (16-43)$$

en donde

$$Z(j\omega) = \frac{2}{j\omega + 2} \quad (16-44)$$

y

$$I_1(j\omega) = \frac{2}{j\omega + 1} \quad (16-45)$$

En la ecuación (16-43) se observa que la transformada de respuesta $V_2(j\omega)$, se puede considerar como el producto de otras dos transformadas, $Z(j\omega)$ y $I_1(j\omega)$. Ahora, dado que cada una de éstas tiene una forma relativamente simple como se indica en la figura 16-5, las dos representativas espectrales se pueden multiplicar entre sí para determinar la respuesta total. Como se indica en la figura 16-7, la magnitud y la fase de la respuesta $V_2(\omega)$ se puede encontrar multiplicando las magnitudes y sumando las fases; en consecuencia, combinando los factores de la ecuación (16-43) en la forma acostumbrada para números complejos,

$$|V_2(j\omega)| = |Z(j\omega)||I_1(j\omega)| \quad (16-46)$$

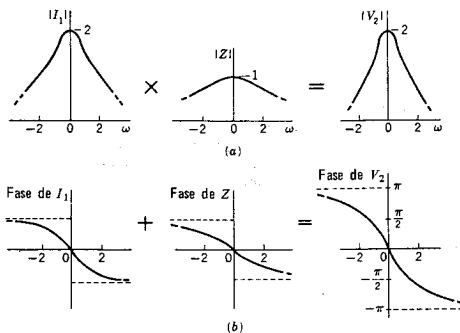


Figura 16-7. (a) El espectro de magnitud y (b) el espectro de fase de $V_2(j\omega)$, según los determinan las ecuaciones (16-46) y (16-47).

y

$$\text{Fase de } V_2(j\omega) = \text{Fase de } Z(j\omega) + \text{Fase de } I_1(j\omega) \quad (16-47)$$

El resultado es el mismo que se calculó a partir de la ecuación (16-39), que es

$$|V_2(j\omega)| = \frac{4}{[(2 - \omega^2)^2 + (3\omega)^2]^{1/2}} \quad (16-48)$$

y

$$\text{Fase de } V_2(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{3\omega}{2 - \omega^2} \quad (16-49)$$

Sin embargo, la visualización del espectro de respuesta como resultado de la multiplicación del espectro que caracteriza a un sistema por el espectro de excitación tiene ventajas conceptuales en aplicaciones de ingeniería.

16-4. ALGUNAS TRANSFORMADAS DE FOURIER UTILES

Ya se mencionó antes que una condición suficiente pero no necesaria para que exista una transformada de Fourier es que satisfaga las

condiciones de Dirichlet establecidas en la sección 15-4, la más importante de las cuales es el requisito de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (16-50)$$

Este requisito no se satisface para las formas de onda más conocidas que se usaron en capítulos anteriores, tales como la función de escalón, la de rampa y las funciones periódicas, como la onda senoidal. En esta sección se mostrará que si se permite que haya una función de impulso en la transformada de Fourier entonces se puede eliminar esta limitación o sea la ecuación (16-50).

Una de las más sencillas transformadas de Fourier es la correspondiente a la función de impulso unitario. De acuerdo con la ecuación de definición,

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt \quad (16-51)$$

La evaluación de esta integral se encuentra fácilmente en términos de la función de exploración o barrido que se estudió en el capítulo 8 en la forma de la ecuación (8-115), que es

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (16-52)$$

Por consiguiente, la integral de la ecuación (16-51) tiene el valor

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1 \quad \text{y} \quad \mathcal{F}^{-1}[1] = \delta(t) \quad (16-53)$$

teniendo el segundo resultado, dada la propiedad de unicidad de las transformadas de Fourier. Por tanto, la transformada de Fourier de un impulso es una constante simple, como se muestra en la figura 16-8.

Como siguiente ejemplo, véase una función exponencial definida tanto para t positivas como negativas, como se indica en la figura 16-9(a),

$$f(t) = e^{-a|t|}, \quad \text{para cualquier } t \quad (16-54)$$

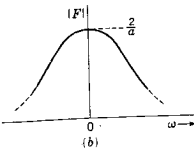
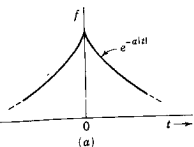


Figura 16-9. La función impulso de (a), descrita por la ecuación (16-54), tiene un espectro de magnitud como el que se muestra en (b) y se expresa mediante la ecuación (16-55).

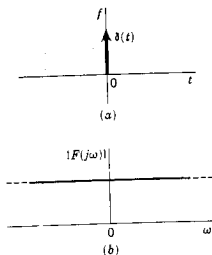


Figura 16-8. Una respuesta del impulso $\delta(t)$ ilustrada en (a) tiene un espectro de magnitud constante, como se ilustra en (b).

La transformada de Fourier correspondiente se determina a partir de la ecuación de definición y es

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \quad (16-55)$$

$$= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

Esta es una función real con una contribución de fase igual a cero para todas las ω y se representa como un espectro continuo en la figura 16-9(b).

Se utilizará este último ejemplo para calcular la transformada de Fourier correspondiente a una función de tiempo más difícil: $f(t) = 1$. Esto se logra principiando con la $f(t)$ que se da en la ecuación (16-54) y tomando el caso límite en que a tiende a cero. Esto se expresa en forma de ecuación como sigue:

$$\mathfrak{F}[1] = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt \quad (16-56)$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2a}{\omega^2 + a^2} \quad (16-57)$$

Ahora, este límite tiene el valor 0 para todas las a , excepto para $\omega = 0$. Para $\omega = 0$ se puede utilizar la regla de l'Hospital y derivar tanto el numerador como el denominador, antes de permitir que a tienda a cero. Así,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{2}{2a} = \infty \quad (16-58)$$

indicando una función de impulso para $\omega = 0$. La magnitud de la función de impulso se encuentra integrando $F(j\omega)$ para todas las ω a fin de obtener el área contenida por la función; por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{\omega^2 + a^2} d\omega = 2\pi \quad (16-59)$$

Entonces, se ha determinado que la transformada de Fourier de la constante uno es un impulso cuya intensidad es 2π , o sea

$$\mathfrak{F}[1] = 2\pi\delta(\omega) \quad (16-60)$$

como se ilustra en la figura 16-10.

Este resultado se puede generalizar para encontrar la transformada de Fourier de $e^{j\omega_0 t}$, en donde ω_0 es una constante. Puesto que se acaba de mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega) \quad (16-61)$$

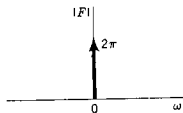


Figura 16-10. El espectro de magnitud de la constante 1 es un impulso para $\omega = 0$, dado por la ecuación (16-60).

entonces se infiere que

$$\mathfrak{F}[e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{j\omega_0 t - j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (16-62)$$

Dado que las funciones coseno y seno se pueden expresar en términos de los factores exponenciales $e^{\pm j\omega_0 t}$ como

$$\cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \quad \text{y} \quad \text{sen } \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \quad (16-63)$$

se puede usar la ecuación (16-62) para determinar las transformadas de Fourier de las funciones coseno y seno

$$[\cos \omega_0 t] = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (16-64)$$

$$[\text{sen } \omega_0 t] = -j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \quad (16-65)$$

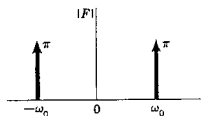


Figura 16-11. Espectro de magnitud de las funciones seno y coseno del tiempo.

En consecuencia, las dos funciones se expresan en términos de dos funciones de impulso, como se ilustra para la magnitud de $F(j\omega)$ en la figura 16-11. Por supuesto, los ángulos de fase asociados con las dos funciones difieren, tal como se indica en las ecuaciones (16-64) y (16-65).

Una función que se utiliza con frecuencia para describir formas de onda de señal es la función signum, cuya abreviatura es $\text{sgn}(t)$. Esta se ilustra en la figura 16-12 y se define como

$$\begin{aligned} \text{sgn}(t) &= +1, & t > 0 \\ &= 0, & t = 0 \\ &= -1, & t < 0 \end{aligned} \quad (16-66)$$

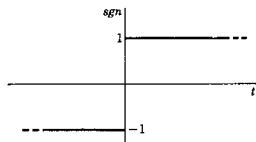


Figura 16-12. La función signum $\text{sgn}(t)$, definida por la ecuación (16-66).

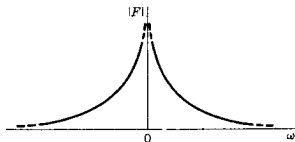


Figura 16-13. El espectro de magnitud de la función signum.

La evaluación directa de la transformada de Fourier para esta función presenta dificultades, debido a que la integral de la ecuación (16-50) es divergente. Como ya se vio antes, esta función se expresa como el caso límite de otras funciones y la transformada de Fourier es calculada en esta forma. También, al igual que antes, se utiliza la ecuación (16-54) y se hace que a tienda a cero. En este caso

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\text{sgn}(t)] &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} \text{sgn}(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^0 -e^{(a-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \right] \quad (16-67) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} \right] = \frac{2}{j\omega} \end{aligned}$$

El espectro de magnitud para la función signum se ilustra en la figura 16-13. Se trata de una gráfica de $|F(j\omega)| = 2/\omega$ y, por tanto, tiene un valor infinito para $\omega = 0$. La función de fase asociada es una constante $\phi(j\omega) = -\pi/2$ para $\omega > 0$ y $+\pi/2$ para $\omega < 0$.

La función signum hace posible la evaluación de la transformada de Fourier de la función escalón unitario, otra función que no satisface la ecuación (16-50). Se observa que

$$u(t) = \frac{1}{2}[1 + \text{sgn}(t)] \quad (16-68)$$

Puesto que se conoce la transformada de Fourier de cada una de las dos partes de esta ecuación, se puede escribir

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (16-69)$$

La magnitud de $F(j\omega)$ para el escalón unitario se ilustra en la figura 16-14 y es una combinación de la hipérbola equilátera y la función impulso de intensidad π para $\omega = 0$. Este es, en efecto, un espectro poco usual para una función sencilla del tiempo, pero la naturaleza poco usual es el precio que se paga por determinar las transformadas de funciones que no satisfacen las condiciones de Dirichlet.

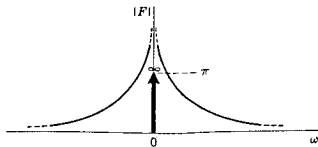


Figura 16-14. El espectro de magnitud de una función escalón unitario $u(t)$, determinado a partir de la ecuación (16-69).

Antes de dar otros ejemplos se verá una función periódica generalizada para la que se desea calcular la transformada de Fourier. Por supuesto, cualquier función periódica no logrará satisfacer la condición de la ecuación (16-50), de manera que se puede anticipar que el resultado contendrá funciones de impulso. Se principia con la expresión de la serie de Fourier para $f(t)$, expresada por la ecuación (15-76), que se repite a continuación:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n e^{jn\omega_0 t} \quad (16-70)$$

La transformada de Fourier de esta $f(t)$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] &= F(j\omega) = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n e^{jn\omega_0 t}\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n \mathcal{F}[e^{jn\omega_0 t}] \end{aligned} \quad (16-71)$$

Ahora, de acuerdo con la ecuación (16-62), se conoce la transformada de Fourier de la función exponencial de esta última ecuación, de manera que para cualquier función periódica se puede escribir

$$F(j\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (16-72)$$

Este es un resultado importante que con frecuencia se utiliza en aplicaciones de la teoría de la transformada de Fourier. A continuación se aplicará la ecuación (16-72) a un problema específico. En el capítulo 8 se estudió el tren de impulsos que era periódico pero principiaba en $t = 0$. Para este ejemplo se hará que el tren de impulsos se extienda de $-\infty$ a ∞ y tenga un período T con una intensidad unidad para cada impulso, como se indica en la figura 16-15. En este caso la ecuación (8-72) se convierte en

$$\text{III}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (16-73)$$

El coeficiente \tilde{c}_n se puede determinar considerando la función periódica en un período y es

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \quad (16-74)$$

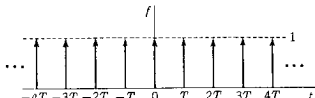


Figura 16-15. Un tren de impulsos definido para cualquier t , dado por la ecuación (16-73).

Relación entre la transformada de Fourier y la de Laplace 567

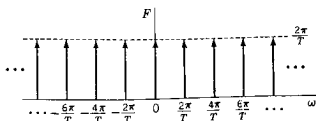


Figura 16-16. El espectro de un tren de impulsos en el dominio del tiempo es el tren de impulsos en el dominio de la frecuencia que se ilustra en esta figura, dado por la ecuación (16-75).

dado que la integral tiene un valor de 1, como se encontró en relación con la deducción de la ecuación (16-51). Substituyendo este resultado en la ecuación (16-72) se observa que

$$\mathcal{F}\{I_T(t)\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \text{III}_{\omega_0}(\omega) \quad (16-75)$$

en donde $\omega_0 = 2\pi/T$. En la figura 16-16 se ilustra este tren de impulsos. Esto ilustra una relación interesante entre los dominios del tiempo y de la frecuencia; en este caso, un tren de impulsos en el dominio del tiempo tiene, como transformada de Fourier, a un tren de impulsos en el dominio de la frecuencia.

16-5. RELACION ENTRE LA TRANSFORMADA DE FOURIER Y LA DE LAPLACE

Ahora se observa claramente que existe una relación entre las transformadas de Fourier y las de Laplace. En la tabla 16-1 se presenta un resumen de las ecuaciones de definición para los dos pares de transformadas —de las ecuaciones (7-1) y (7-10), y las ecuaciones (16-20) y (16-21). Las diferencias importantes son muy pocas:

- (1) El valor $j\omega$ de la transformada de Fourier tiene la misma posición que s en la transformada de Laplace.

TABLA 16-1. COMPARACION DE LOS PARES DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE Y FOURIER

Laplace	Fourier
Transformada directa $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$	$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$
Transformada inversa $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s)e^{st} ds$	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$

- (2) Los límites de integración en la transformada directa son diferentes, siendo uno de un lado y el otro de dos lados.
- (3) Los contornos de integración en las ecuaciones de la transformada inversa son distintos; uno está a lo largo del eje imaginario y el otro desplazado σ_1 .
- (4) La transformada de Laplace de $f(t)$ es idéntica a la transforma-

TABLA 16-2. ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER.

Nombre:	$If \mathfrak{F} f(t) = F(j\omega)$, entonces:
Definición	$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$
Superposición	$\mathfrak{F}[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1(j\omega) + bF_2(j\omega)$
Simplificación si:	
(a) $f(t)$ es par	$F(j\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$
(b) $f(t)$ es impar	$F(j\omega) = 2j \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$
t negativo	$\mathfrak{F} f(-t) = F^*(j\omega)$
Escala	
(a) tiempo	$\mathfrak{F} f(at) = \frac{1}{ a } F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
(b) magnitud	$\mathfrak{F} af(t) = aF(j\omega)$
Derivación	$\mathfrak{F} \left[\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] = (j\omega)^n F(j\omega)$
Integración	$\mathfrak{F} \left[\int_{-\infty}^t f(x) dx \right] = \frac{1}{j\omega} F(j\omega) + \pi F(0) \delta(\omega)$
Traslado en el tiempo	$\mathfrak{F} f(t - a) = F(j\omega) e^{-j\omega a}$
Modulación	$\mathfrak{F} f(t) e^{j\omega_0 t} = F[j(\omega - \omega_0)]$ $\mathfrak{F} f(t) \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [F(j(\omega - \omega_0)) + F(j(\omega + \omega_0))]$ $\mathfrak{F} f(t) \sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} [F(j(\omega - \omega_0)) - F(j(\omega + \omega_0))]$
Convolución en el tiempo	$\mathfrak{F}^{-1}[F_1(j\omega)F_2(j\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$
Convolución de frecuencia	$\mathfrak{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\lambda) F_2[j(\omega - \lambda)] d\lambda$

da de Fourier de $f(t)$ multiplicada por el factor de convergencia $e^{-\sigma t}$, si $f(t) = 0$ para $t < 0$; es decir,

$$\mathcal{L}f(t) = \mathfrak{F}[f(t)e^{-\sigma t}] \quad (16-76)$$

Una ventaja de esta unificación de los dos conceptos es que la tabulación de las propiedades para la transformada de Laplace, como la que se ilustra en la tabla 8-1, se aplica a las transformadas de Fourier con $s = j\omega$. En la tabla 16-2 se presenta un resumen por separado.

16-6. ANCHO DE BANDA Y DURACION DE PULSO

Se dice que un sistema de transmisión es *ideal* o *que no tiene distorsión* si la forma de onda de salida es de la misma forma que la onda de entrada, excepto que la magnitud queda a escala por una constante F_0 y la forma de onda tiene un atraso de a segs.

$$v_2(t) = F_0 v_1(t - a) \quad (16-77)$$

Si $F_0 > 1$, se dice que el sistema tiene ganancia; si $F_0 < 1$ se dice que el sistema tiene pérdida. De acuerdo con la ecuación (8-11), es evidente que

$$V_2(s) = F_0 V_1(s) e^{-sa} \quad (16-78)$$

de manera que, para el estado permanente senoidal,

$$\frac{V_2}{V_1} = G_{12}(j\omega) = F_0 e^{-j\omega a} \quad (16-79)$$

Por tanto, el sistema ideal tiene $|G_{12}| = F_0$, que es constante, y una fase que disminuye linealmente con ω . En la figura 16-17 se ilustran estas características ideales.

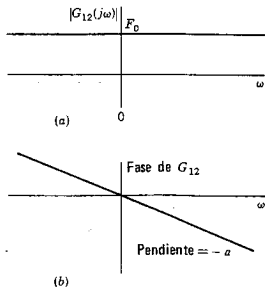


Figura 16-17. Las características de (a) magnitud y (b) fase de un sistema ideal de transmisión.

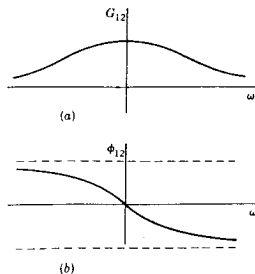


Figura 16-18. Las características de (a) magnitud y (b) fase de una red típica diseñada para aproximarse a las características de la figura 16-17.

Ahora bien, sistemas físicos tales como las redes de dos puertos o las líneas telefónicas no son ideales en el sentido de que se pueden describir mediante la ecuación (16-79). Por el contrario, la magnitud de $G_{12}(j\omega)$ disminuye en función de la frecuencia y la fase no es una función lineal de ω . Las variaciones reales de la magnitud y la fase se asemejan más a las que se ilustran en la figura 16-18. Para estos sistemas existe otra característica ideal que se puede describir. Se trata de la *característica de banda limitada* o *filtro ideal de paso bajo*, que tienen las características que se indican en la figura 16-19. El filtro ideal de paso bajo no existe en la realidad, como tampoco existe el que aparece en la figura 16-17; pero se puede aproximar mediante sistemas telefónicos de transmisión que se componen, por ejemplo, de 400 amplificadores en cascada. Los pulsos que pasan por los sistemas de banda limitada se distorsionan, como se ilustra en la figura 16-20. La distorsión de la señal depende tanto del ancho de banda del sistema de transmisión (o filtro, si se prefiere) como del ancho del pulso de la señal, como se verá más adelante.

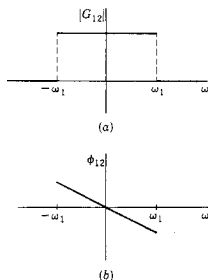


Figura 16-19. Las características de (a) magnitud y (b) fase para un sistema de banda limitada.

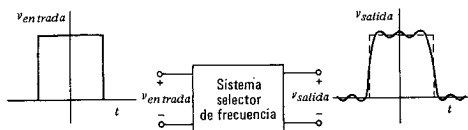


Figura 16-20. Ilustración de la distorsión que se produce cuando un pulso es el voltaje de entrada en un sistema de frecuencia selectiva y se registra el voltaje de salida.

Las formas de onda de señal que se estudian a continuación tienen límite de *tiempo* en el sentido de que satisfacen la ecuación (16-22). Por tanto, se excluye la función de rampa o la de escalón pero se admiten formas de onda descritas por el término genérico de pulso. A continuación se estudian varios tipos diferentes de pulsos y se determinan sus espectros de amplitud.

EJEMPLO 1

Sea $f(t)$ un pulso de magnitud V_0 y de ancho a , como se ilustra en la figura 16-21(a). De acuerdo con el estudio de la sección 16-1, que comprende esta forma de onda, se pueden utilizar las ecuaciones (16-5) y (16-16) con $n\omega_n \rightarrow \omega$ para escribir

$$F(j\omega) = V_0 a \frac{\text{sen}(\omega a/2)}{\omega a/2} \quad (16-80)$$

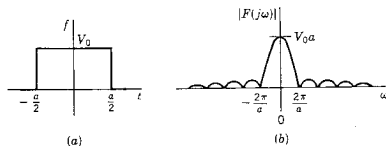


Figura 16-21. (a) La forma de onda de la señal y (b) el espectro continuo de amplitud del ejemplo 1.

El primer cero de esta ecuación se produce cuando $\omega a/2 = \pi$ o a la frecuencia $\omega = 2\pi/a$, como se indica en la figura 16-21(b). La parte más importante del espectro continuo de amplitud, en el sentido de que incluye componentes de frecuencia con valores relativamente grandes, es la parte entre $\omega = 0$ y el primer cero de $F(j\omega)$. Por supuesto, éste es un postulado cualitativo, pero es muy útil en la práctica de la ingeniería. Entonces se puede decir que un filtro ideal con

frecuencia de corte en ω_1 , definido por la figura 16-19(a) permitirá el paso de la mayor parte de la energía del pulso si $\omega_1 = 2\pi/a$. En este caso se observa que

$$\omega_1 a = 2\pi \quad (16-81)$$

o que el producto del ancho de banda por el ancho del pulso es una constante.

EJEMPLO 2

Para el segundo ejemplo, sea el pulso exponencial

$$f(t) = V_0 e^{-t/a}, \quad t \geq 0 \quad (16-82)$$

que tiene un valor cero para $t < 0$. De acuerdo con la ecuación (16-21), se tiene que

$$F(j\omega) = V_0 \int_0^{\infty} e^{-t/a} e^{-j\omega t} dt = \frac{V_0 a}{1 + j\omega a} \quad (16-83)$$

En este caso no desaparecen ni $f(t)$ ni $F(j\omega)$, de manera que se requiere una nueva medida del "ancho". La constante de tiempo a es una medida del ancho de $f(t)$; una línea tangente a $f(t)$ para $t=0$ corta la línea $f=0$ en $t=a$. En el capítulo 13 se presentó una medida del ancho de $F(j\omega)$. Las frecuencias "de media potencia" o las frecuencias a las que $|F(j\omega)| = 0.707F(0)$, se determinan igualando las partes real e imaginaria del denominador de la ecuación (16-83), es decir $\omega = 1/a$. Si se iguala esta frecuencia a la frecuencia de corte del filtro ideal se obtiene

$$\omega_1 a = 1 \quad (16-84)$$

que tiene la misma forma que la ecuación (16-81). Véase la figura 16-22.

EJEMPLO 3

El pulso triangular que se ilustra en la figura 16-23(a) tiene un espectro determinado a partir de

$$F(j\omega) = V_0 \int_{-a/2}^{a/2} \left(1 - \frac{2}{a}|t|\right) e^{-j\omega t} dt \quad (16-85)$$

Evaluando esta integral se obtiene

$$F(j\omega) = \frac{V_0 a \operatorname{sen}^2(\omega a/4)}{2(\omega a/4)^2} \quad (16-86)$$

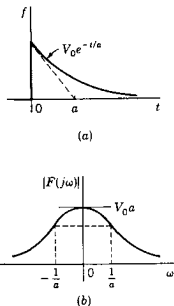


Figura 16-22. (a) Forma de onda de la señal y (b) Espectro continuo de amplitud del ejemplo 2.

que se ilustra en la figura 16-23(b). El primer cero de $F(j\omega)$ ocurre cuando $\omega = 4\pi/a$. Igualando esto a ω_1 para el filtro de paso bajo, se obtiene

$$\omega_1 a = 4\pi \quad (16-87)$$

que también es similar a la ecuación (16-81).

De acuerdo con estos tres ejemplos, así como otros que se encontrarán en los problemas que aparecen al final de este capítulo se observa que existe una base para el postulado conceptualmente útil:¹

$$(\text{ancho de banda requerido}) \times (\text{duración del pulso}) = \text{constante} \quad (16-88)$$

En otras palabras, el ancho de banda requerido para la transmisión es inversamente proporcional a la duración del pulso que se transmite.

Es interesante comprobar la ecuación (16-88) con el impulso, ya que tiene un ancho cero y, por tanto, representa un caso límite. De acuerdo con la ecuación (16-53),

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (16-89)$$

que se ilustra en la figura 16-24. Por tanto, $F(j\omega)$ es una constante para la función impulso, indicando que contiene todas las frecuencias con las mismas amplitudes y un ancho de banda infinito. La ecuación (16-88) se satisface en el sentido de que se indica que se requiere un ancho de banda infinito para transmitir un pulso de ancho igual a cero.

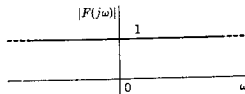


Figura 16-24. Espectro continuo de amplitud de un impulso unitario.

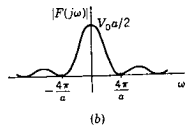
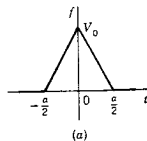


Figura 16-23. (a) Forma de onda de la señal y (b) Espectro continuo de amplitud del ejemplo 3.

16-7. ANCHO DE BANDA Y TIEMPO DE ELEVACION

En esta sección el interés se centra en la respuesta de la red cuando se aplica una entrada escalón a una red de banda limitada (o filtro ideal). En vez de estudiar este problema de forma directa se utiliza la técnica de la sección 8-2 y se estudia primeramente la res-

¹ Para un estudio avanzado de este tema, en función de la duración rmc, véase, de Athanasios Papoulis, *The Fourier Integral and Its Applications* (McGraw-Hill Inc., Nueva York, 1962), páginas 62-64.

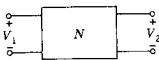


Figura 16-25. Una red de dos puertos N que se supone que tiene las características de respuesta de la figura 16-19.

puesta al impulso de la red a partir de la cual se puede determinar la respuesta al escalón por medio de integración. Según este método, se puede formular el problema en la siguiente forma: cuando $\delta(t)$ se aplica a un sistema de transmisión ideal que tiene las características de la figura 16-17, la respuesta es $\delta(t-a)$, en donde a es el atraso de tiempo del sistema. Ahora, cuando $\delta(t)$ se aplica a un sistema de banda limitada, la respuesta no será un impulso (sin ancho de banda infinito). ¿Cuál es la respuesta al impulso, $v_2(t)$?

De acuerdo con la figura 16-25, en donde la red N tiene las características de frecuencia de la figura 16-19, de tal modo que ω_1 es el ancho de banda (para ω positivo), se tiene que

$$V_2(j\omega) = G_{12}(j\omega)V_1(j\omega) \quad (16-90)$$

y si $v_1(t) = \delta(t)$, entonces, $V_1(j\omega) = 1$ como se encuentra en la ecuación (16-89). Entonces la respuesta está dada en función de la ecuación de la transformada inversa de Fourier:

$$v_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{12}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (16-91)$$

En este caso, $G_{12}(j\omega)$ se describe mediante la figura 16-19 y es

$$G_{12}(j\omega) = \begin{cases} F_0 e^{-j\omega a}, & -\omega_1 < \omega < \omega_1 \\ 0, & |\omega| > \omega_1 \end{cases} \quad (16-92)$$

Puesto que la magnitud de $G_{12}(j\omega)$ es cero para $|\omega| > \omega_1$, se substituyen los límites infinitos de la ecuación (16-91) por $\pm\omega_1$, y se obtiene

$$v_2(t) = \frac{F_0}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} e^{j\omega(t-a)} d\omega \quad (16-93)$$

Si se hace que $t-a = x$, entonces se obtiene el resultado

$$v_2(t) = \frac{F_0 \omega_1}{\pi} \frac{\text{sen } \omega_1 x}{\omega_1 x} \quad (16-94)$$

que tiene su valor máximo cuando $x = 0$ ó $t = a$. Este valor es

$$v_2(a) = \frac{F_0 \omega_1}{\pi} \quad (16-95)$$

y la respuesta al impulso se presenta en la figura 16-26. No es necesario preocuparse porque se tiene una respuesta incluso antes de aplicar el impulso a la red. La característica de amplitud de paso bajo que se ha supuesto, la de la figura 16-19, no se puede realizar con componentes físicos, de manera que no es sorprendente que se obtenga un resultado que predice el efecto antes que la causa. En los sistemas reales, la *causalidad* asegura que el efecto sigue a la causa y la viabili-

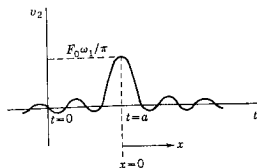


Figura 16-26. Respuesta al impulso de la red de la figura 16-25, que tiene las características de frecuencia de la figura 16-19.

dad se puede determinar a partir de la elegante formulación del criterio de Paley-Wiener.²

Para determinar la respuesta al escalón se integra la respuesta de impulso de la ecuación (16-94) para obtener

$$v_s(t) = \frac{F_0}{\pi} \int_{-\infty}^t \frac{\text{sen } \omega_1 x}{\omega_1 x} d\omega_1 x = \frac{F_0}{\pi} \text{Si } \omega_1 x \Big|_{-\infty}^t \quad (16-96)$$

En este caso Si es la función integral de seno³ en los textos de matemática. Una de las propiedades interesantes de esta función es que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \pi \quad (16-97)$$

que se puede usar para determinar el valor final de la respuesta al escalón:

$$v_s(\infty) = F_0 \quad (16-98)$$

La relación entre $(\text{sen } x)/x$ y Si x se ilustra en la figura 16-27, para x positivas. Esto es útil para determinar la respuesta de la función escalón según la ecuación (16-96) que se ilustra en la figura 16-28. Se observará que la pendiente máxima de la gráfica de Si x y también de $v_s(t)$ se produce cuando $(\text{sen } x)/x$ tiene su valor máximo; por supuesto, la derivada de la función Si x es $(\text{sen } x)/x$.

La definición del tiempo de elevación utiliza el valor máximo de la pendiente de $v_s(t)$. Esto ocurre cuando $t=a$ y, por tanto, es el valor numérico de la respuesta al impulso en $t=a$, $v_2(a)$. Esto se ha determinado y está dado por la ecuación (16-95). Ahora la recta de pendiente $v_2(a)$ que pasa por $v_s(a)$ cruza las líneas $v_s = 0$ y $v_s = F_0$ en los límites del rango de t que define el tiempo de elevación. Esta es una simple construcción geométrica que define al tiempo de elevación,

² Existe un estudio elemental excelente, dado por F. F. Kuo, *Network Analysis and Synthesis*, 2.^a edición (John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1966), páginas 291-294.

³ E. A. Guillemin, *The Mathematics of Circuit Analysis* (John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1949), páginas 491-496.

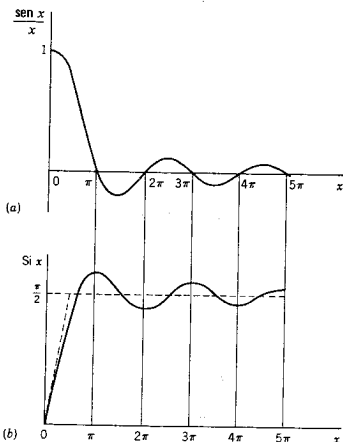


Figura 16-27. (a) La función $(\text{sen } x)/x$ en relación con (b) la función integral seno o $\text{Si } x$.

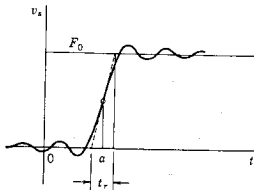


Figura 16-28. Respuesta de la función escalón correspondiente a la respuesta al impulso de la figura 16-24. En esta figura t_r es el tiempo de elevación de la ecuación (16-99).

t_r , como se ilustra en la figura 16-28. Utilizando esta definición y la ecuación (16-95), el tiempo de elevación es

$$t_r = \frac{F_a}{F_o \omega_1 / \pi} = \frac{\pi}{\omega_1} \quad (16-99)$$

de tal manera que

$$\omega_1 t_r = \pi \quad (16-100)$$

Se puede formular un postulado similar al de la ecuación (16-88):

$$(\text{Ancho de banda}) \times (\text{tiempo de elevación}) = \text{constante} \quad (16-101)$$

En otras palabras, *el tiempo de elevación de la respuesta de una red de banda limitada, a una entrada escalón, es inversamente proporcional al ancho de banda.* Se debe observar que existen otras definiciones del tiempo de elevación, pero la ecuación (16-101) se aplica a cada una de ellas.

BIBLIOGRAFIA

- CLOSE, CHARLES M., *The Analysis of Linear Circuits*, Harcourt Brace Jovanovich, Inc., Nueva York, 1966, capítulo 9.
- COOPER, GEORGE R. y CLARE D. MCGILLEM, *Methods of Signal and System Analysis*. Holt, Rinehart & Winston, Inc., Nueva York, 1967, capítulo 5.
- GABEL, ROBERT A. y RICHARD A. ROBERTS, *Signals and Linear Systems*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1973, capítulo 5.
- LATHI, B. P., *Signals, Systems, and Communication*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1965, capítulo 4.
- MANNING, LAURENCE A., *Electrical Circuits*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1965, capítulo 21.
- RUSTON, HENRY y JOSEPH BORDOGNA, *Electric Networks: Functions, Filters, Analysis*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1966, capítulo 8.
- SCHWARZ, RALPH J. y BERNARD FRIEDLAND, *Linear Systems*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1965, capítulo 5.

EJERCICIOS PARA COMPUTADORA DIGITAL

Un ejercicio apropiado para los temas de este capítulo será el uso de un programa de computadora para la transformada rápida de Fourier (FFT). Las referencias de este tema se encuentran en el apéndice E-5.2. Existen referencias adicionales en revistas de las que disponen normalmente los ingenieros electricistas, incluyendo las siguientes:

GAE Subcommittee on Measurement Concepts, "What is the Fast Fourier Transform?" *Proceedings of the IEEE*, 55, 1664-1674 (octubre de 1967).

G. Bergland, "A Guided Tour of the Fast Fourier Transform", *IEEE Spectrum*, 6, 51-52 (julio de 1969).

PROBLEMAS

- 16-1. (a) La forma de onda que se muestra en la figura es un pulso rectangular de 1 μseg de duración y una amplitud de 10 V. Dibuje el espectro continuo de amplitud de esta forma de onda indicando las frecuencias a las que la envolvente del espectro tiene un valor cero. (b) Repita la parte (a), si la duración del pulso es 0.01 μseg .

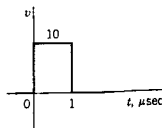


Fig. P16-1.

- 16-2. La forma de onda de la figura ilustra dos pulsos con una duración de $1 \mu\text{seg}$ cada uno, separados por un $1 \mu\text{seg}$. Dibuje el espectro continuo de amplitud de esta forma de onda. Utilice los resultados del problema 16-1.

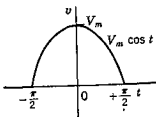


Fig. P16-3.

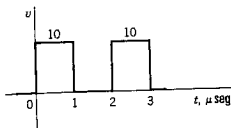


Fig. P16-2.

- 16-3. En la figura se muestra un pulso en coseno, $v = V_m \cos t$ que es cero para cualquier tiempo, excepto $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. (a) Determine la transformada de Fourier de esta $v(t)$. (b) Trace el espectro continuo de amplitud y el espectro continuo de fase para esta $v(t)$.
- 16-4. El pulso que se muestra en la siguiente figura es una función coseno al cuadrado derivada de la función del problema 16-3. Repita el problema 16-3 para esta de $v(t)$.

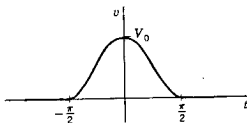


Fig. P16-4.

- 16-5. Repita el problema 16-3 para el pulso que se muestra en la figura.

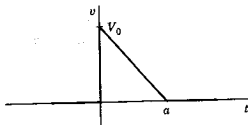


Fig. P16-5.

- 16-6. En la figura aparece un pulso escalonado que es simétrico con respecto a $t=0$ y con una duración T . Determine el espectro continuo de amplitud y el espectro continuo de fase para esta forma de onda. Dibuje los dos espectros.

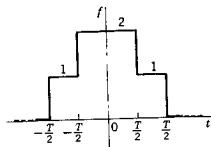


Fig. P16-6.

- 16-7. La forma de onda que se muestra en la figura se compone de segmentos rectos y es simétrica con respecto a $t=0$. Determine los espectros continuos de amplitud y fase de esta forma de onda y dibuje cada espectro.

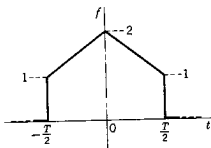


Fig. P16-7.

- 16-8. Determine la transformada de Fourier para las funciones de tiempo (a) $f(t) = tu(t)$ y (b) $\cosh tu(t)$, si es que existen.
- 16-9. Determine la transformada de Fourier para una forma de onda de señal que describe la ecuación

$$f(t) = [1 + m \cos \omega_1 t] \cos \omega_0 t, \text{ para todos los valores de } t$$

y dibuje los espectros de amplitud y fase.

- 16-10. Una red simple se compone de un inductor de $1/2$ H conectado en serie con un resistor de 1 ohm y la combinación está excitada por una fuente de voltaje $v_1(t)$. La corriente en cada uno de los elementos es $i_2(t)$. Si v_1 es la forma de onda que se ilustra en la figura del problema 16-6, determine el espectro de amplitud y el de fase para $i_2(t)$.
- 16-11. Repita el problema 16-10 para la forma de onda que se da en el problema 16-7.
- 16-12. Repita el problema 16-10 para la forma de onda correspondiente a $v_1(t)$ que se da en el problema 16-3.
- 16-13. Verifique el resultado indicado para la transformada de Fourier para t negativa que se da en la tabla 16-2.
- 16-14. Verifique el resultado que da para la escala de tiempo el factor a en la tabla 16-2.
- 16-15. Verifique el resultado que da para la transformada de Fourier la integral definida que se da en la tabla 16-2.
- 16-16. Verifique el resultado que se da en la tabla 16-2 para el traslado en el tiempo (adelanto o atraso) de $f(t)$ a $f(t-a)$ con respecto a la transformada de Fourier.
- 16-17. Para la forma de onda dada por la ecuación

$$v = V_0 e^{-at} \sin \omega_0 t, \quad t \geq 0$$

580 *Integral de Fourier y espectros continuos*

y $v = 0$ para $t < 0$, determine el espectro continuo de amplitud y el espectro continuo de fase correspondientes a esta oscilación amortiguada.

- 16-18. Repita el problema 16-17, considerando que el pulso exponencial críticamente amortiguado está dado por la ecuación

$$v(t) = V_0 \frac{t}{t_0} e^{-t/t_0}, \quad t \geq 0$$

para la que $v(t) = 0$ para $t < 0$.

- 16-19. Repita el problema 16-17 para un pulso gaussiano definido por la ecuación

$$v = V_0 e^{-(t/t_0)^2}, \quad \text{para todos los valores de } t$$

- 16-20. En la red de la figura i_1 tiene la forma de onda que se ilustra en el problema 16-6. Para los valores de elementos que se dan determine los espectros de amplitud y fase de las corrientes i_a e i_b .

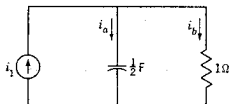


Fig. P16-20.

- 16-21. Repita el problema 16-20 si i_1 es la forma de onda de la señal que se describe en el problema 16-7.

- 16-22. En la red de la figura v_1 tiene la forma de onda que se muestra en el problema 16-6. Para los valores de elemento que se dan determine los espectros de magnitudes y fase para los voltajes v_a y v_b .

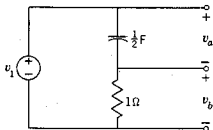


Fig. P16-22.

- 16-23. Repita el problema 16-21 si v_1 tiene la forma de onda que se señala en el problema 16-7.

- 16-24. Un sistema está descrito por la función de transferencia de relación de voltajes $G(s) = V_2(s)/V_1(s)$. Si $G(s) = 3/(s+2)$ y $v_1(t) = 5e^{-3t}u(t)$, utilice las transformadas de Fourier para encontrar $V_2(j\omega)$ y dibuje los espectros de magnitud y fase.

- 16-25. Repita el problema 16-24 para la misma $G(s)$ pero para $v_1(t) = 3 \text{ sen}(2t + 45^\circ)$.

- 16-26. Repita el problema 16-24 utilizando el mismo valor de $v_1(t)$, pero como función de transferencia se usará $G(s) = k_1 e^{-2s}$.

- 16-27. Repita el problema 16-24 utilizando el valor de $v_1(t)$ que se da en el problema 16-25, con la transferencia que se indica en el problema 16-26 para $k_1 = 10$.

- 16-28. Se tiene un sistema que se describe mediante la función de transferencia de relación de voltajes $G(s) = V_2(s)/V_1(s)$. Para este sistema se establece que

$$G(s) = \frac{1}{1 + Ts}$$

Si $v_1(t)$ es la forma de onda que se muestra en el problema 16-6, determine los espectros de amplitud y fase de $v_2(t)$.

- 16-29. Repita el problema 16-28 si $v_1(t)$ es la forma de onda que se ilustra en el problema 16-7.
- 16-30. El objetivo de este problema es demostrar que la conclusión de la ecuación (16-30) —es decir, que el producto del ancho de banda por la duración del pulso es una constante— se aplica a varias formas de onda de pulso específicas. En cada caso es necesario tomar alguna medida de la duración del pulso y también seleccionar alguna forma de medir el ancho de banda, por ejemplo el rango de frecuencia al primer cero de la envolvente del espectro continuo de amplitud. Para este problema véase el pulso en coseno que se da en el problema 16-3. Muestre que el producto del ancho de banda y de la duración del pulso es una constante y determine dicha constante.
- 16-31. Repita el problema 16-30 para el pulso en coseno cuadrado que se describe en el problema 16-4.
- 16-32. Repita el problema 16-30 para el pulso gaussiano que se describe en el problema 16-19. En este caso se sugiere la elección del tiempo $t = t_0$ para medir la duración del pulso.
- 16-33. Repita el problema 16-30 para el pulso triangular del problema 16-5.
- 16-34. Repita el problema 16-30 para el pulso exponencial que se describe en el problema 16-6.
- 16-35. En el estudio de la relación que hay entre el ancho de banda y el tiempo de elevación de la sección 16-6 se utilizan las características idealizadas G_{12} de la figura 16-19. En este problema estudie tal relación para la función de transferencia

$$G_{12} = \frac{1}{1 + Ts}$$

para la que el ancho de banda se toma casi siempre como el que define la frecuencia de media potencia, $\omega = 1/T$. Para esta función de transferencia, demuestre que el producto del ancho de banda por el tiempo de elevación es una constante y determine dicha constante.

- 16-36. Este problema es semejante al 16-35, excepto porque en este caso se considera la función de transferencia

$$G_{12} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \quad \zeta \leq 1$$

Se supondrá que el ancho de banda se define mediante la frecuencia $\omega = \omega_0$ y luego normalice la frecuencia, o sea que $\omega_0 = 1$. (a) Muestre que el producto del tiempo de elevación y del ancho de banda es una constante y determine esta constante. (b) Para $\zeta = 1/2$, determine el rebase que resulta cuando la entrada es una función escalón.

- 16-37. Sea la red del problema 15-36. Para las siguientes formas de onda de pulso de $v_1(t)$ determine el espectro continuo de amplitud y el espectro

582 *Integral de Fourier y espectros continuos*

continuo de fase de $v_2(t)$: (a) Sea $v_1(t)$ como se ilustra en la figura 16-22(a). (b) Sea v_1 la forma de onda que se ilustra en la figura 16-23(a). (c) Suponga que v_1 es la forma de onda que se muestra en el problema 16-3.

- 16-38. Repita el problema 16-37 para las tres formas de ondas de pulso que se indican pero utilizando la red que se muestra en el problema 15-37.

Apéndice A:

Algebra de números complejos (fasores)

A-1. DEFINICIONES

El número complejo $A = a + jb$ se representa en el plano complejo como se muestra en la figura A-1(a). Si la parte real se indica con el símbolo Re y la parte imaginaria con Im, entonces

$$\text{Re } A = a, \quad \text{Im } A = b \quad (\text{A-1})$$

Obsérvese que si $B = c + jd$ y $B = A$, entonces $a = c$ y $b = d$. En la forma polar o exponencial, el mismo número complejo se escribe como sigue:

$$A = Ae^{j\theta} \quad (\text{A-2})$$

y se representa como se indica en la figura A-1(b). La magnitud y la fase de A se escriben como sigue:

$$|A| = A, \quad \arg A = \theta \quad (\text{A-3})$$

Existen ecuaciones útiles para convertir una forma en la otra, que se derivan principiando con la identidad de Euler

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \text{sen } \theta \quad (\text{A-4})$$

Entonces la ecuación (A-2) se convierte en

$$A = A \cos \theta + jA \text{sen } \theta \quad (\text{A-5})$$

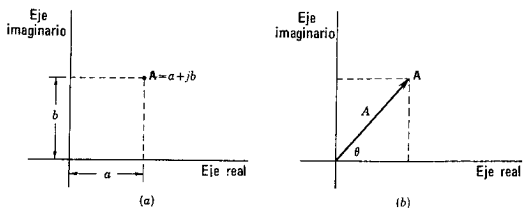


Fig. A-1.

Comparando esta ecuación con la expresión (A-1) se tiene que

$$a = A \cos \theta, \quad b = A \operatorname{sen} \theta \quad (\text{A-6})$$

Elevando al cuadrado las dos ecuaciones y sumando se obtiene

$$A^2 = a^2 + b^2 \quad (\text{A-7})$$

Dividiendo después b entre a , se tiene que

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) \quad (\text{A-8})$$

A-2 SUMA Y RESTA

Si $A = a + jb$ y $B = c + jd$, entonces

$$A + B = B + A = C \quad (\text{A-9})$$

y

$$C = (a + c) + j(b + d) \quad (\text{A-10})$$

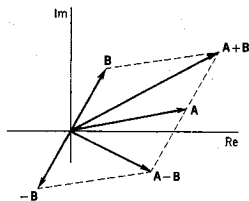


Fig. A-2.

Es decir, la suma de dos números complejos es otro número complejo que se encuentra al sumar las partes reales y las imaginarias. En la figura A-2 se ilustran las operaciones de suma y resta en el plano complejo.

EJEMPLO 1

Si $A = 1 + j2$ y $B = 1 - j1$, entonces

$$A + B = C = 2 + j1 \quad (A-11)$$

y

$$A - B = D = 0 + j3 \quad (A-12)$$

A-3. MULTIPLICACION

Utilizando los números complejos A y B de la sección anterior, su producto es

$$AB = BA = (a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc) \quad (A-13)$$

lo que indica que el producto de dos números complejos es otro número complejo. En la forma polar o exponencial, se tiene que

$$A = Ae^{j\theta_a}, \quad B = Be^{j\theta_b} \quad (A-14)$$

y

$$C = AB = AB e^{j(\theta_a + \theta_b)} \quad (A-15)$$

de tal manera que

$$|C| = AB \quad \text{y} \quad \arg C = \theta_a + \theta_b \quad (A-16)$$

En la figura A-3 se muestra el producto de dos números complejos en el plano complejo. Obsérvese que la multiplicación de números complejos se logra más fácilmente en la forma polar o exponencial que en la forma compleja.

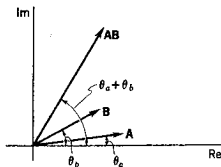


Fig. A-3.

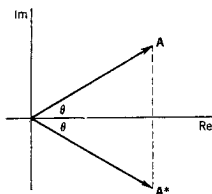


Fig. A-4.

Con frecuencia se requiere la multiplicación de un número complejo A por su conjugado A^* . Por definición, si $A = a + jb$, entonces $A^* = a - jb$. Nótese que

$$AA^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 \quad (\text{A-17})$$

lo cual demuestra que el producto es un número real. En la forma exponencial,

$$A = Ae^{j\theta}, \text{ entonces } A^* = Ae^{-j\theta} \quad (\text{A-18})$$

como se indica en la figura A-4. En este caso

$$AA^* = A^2 = a^2 + b^2 \quad (\text{A-19})$$

lo cual concuerda con la ecuación (A-7).

A-4. DIVISION

Si $CB = A$, entonces, para números complejos,

$$C = \frac{A}{B} = \frac{A B^*}{B B^*} = \frac{AB^*}{|B|^2} \quad (\text{A-20})$$

en donde la multiplicación por B^*/B^* se conoce como *racionalización*. Entonces

$$\frac{A}{B} = \frac{(a + jb)(c - jd)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \quad (\text{A-21})$$

En la forma polar o exponencial

$$\frac{A}{B} = \frac{Ae^{j\theta_a}}{Be^{j\theta_b}} = \frac{A}{B} e^{j(\theta_a - \theta_b)} \quad (\text{A-22})$$

de tal modo que

$$\left| \frac{A}{B} \right| = \frac{A}{B} \quad \text{y} \quad \arg \frac{A}{B} = \theta_a - \theta_b \quad (\text{A-23})$$

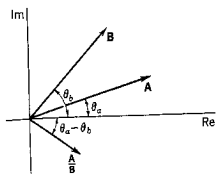


Fig. A-5.

Estas relaciones se ilustran en el plano complejo, en la figura A-5.

EJEMPLO 2

Supóngase que se debe dividir $1 + j\sqrt{3}$ entre $j1$ y expresar el resultado en la forma $a + jb$. En este caso

$$\frac{1 + j\sqrt{3}}{j1} \frac{-j1}{-j1} = \sqrt{3} - j1 = a + jb \quad (\text{A-24})$$

En forma exponencial,

$$\frac{2e^{j60^\circ}}{1e^{j90^\circ}} = 2e^{-j30^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - j1 \quad (\text{A-25})$$

Para obtener este resultado se utilizó la ecuación (A-5).

A-5. LOGARITMO DE UN NUMERO COMPLEJO

El logaritmo de un número complejo se encuentra expresando ese número en forma exponencial y observando también que $\theta = \theta + k2\pi$ para cualquier valor entero de k con θ en radianes. Entonces

$$\ln A = \ln Ae^{j\theta} = \ln Ae^{j(\theta + k2\pi)} = \ln A + j(\theta + k2\pi) \quad (\text{A-26})$$

El valor para $k = 0$ se conoce como *valor principal*.

EJEMPLO 3

Encuentre $\ln(3 + j4)$ en la forma $a + jb$. Entonces

$$\ln(3 + j4) = \ln 5 + j(\tan^{-1} \frac{4}{3} + k2\pi), \quad k = 0, 1, \dots \quad (\text{A-27})$$

A-6. RAICES Y POTENCIAS DE NUMEROS COMPLEJOS

Las raíces y las potencias de números complejos se encuentran utilizando la ley de los exponentes. Por tanto,

$$A^n = (Ae^{j\theta})^n = A^n e^{jn\theta} \quad (\text{A-28})$$

Si se substituye $1/m$ en lugar de n y también se suma $k2\pi$ a θ , se obtiene

$$A^{1/m} = +\sqrt[m]{A} e^{j(\theta+k2\pi)/m} \quad (\text{A-29})$$

en donde k es un entero y para $k=0$ se tiene el *valor principal*. Este resultado se conoce como *teorema de De Moivre*.

EJEMPLO 4

Se pide determinar las tres raíces de $+1+j0$. Utilizando la ecuación (A-29) se obtiene:

$$1e^{j0^\circ}, \quad 1e^{j120^\circ}, \quad \text{y} \quad 1e^{j240^\circ} \quad (\text{A-30})$$

que se ilustra en la figura A-6.

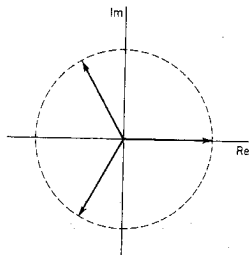


Fig. A-6.

PROBLEMAS

A-1. Expresar los siguientes números complejos en forma exponencial:

$$2 - j2, \quad 3 - j4, \quad 1 + j\sqrt{3}, \quad -1 - j1$$

A-2. Expresar lo siguiente en forma de números complejos $a + jb$:

$$2e^{j45^\circ}, \quad 5e^{-j30^\circ}, \quad 10e^{-j120^\circ}, \quad 2e^{j105^\circ}$$



Apéndice B: Algebra matricial

B-1. DEFINICIONES

El arreglo rectangular de números de funciones

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{B-1})$$

se conoce como *matriz* de orden (m, n) o matriz $m \times n$. También se utilizan dobles barras $\| \ \|$ y paréntesis $()$ en vez de los corchetes. Los números o funciones a_{ij} son los *elementos* de la matriz, en donde el primer subíndice indica la posición del renglón y el segundo la posición de la columna. También se emplea la notación $[a_{ij}]_{m \times n}$ para identificar una matriz de orden $m \times n$ cuyos elementos son a_{ij} .

Existen varias matrices que tienen nombres especiales. Una matriz de una columna pero con cualquier número de renglones se conoce como matriz *columna* o *vector*. Una matriz de orden (n, n) es una *matriz cuadrada de orden n*. La diagonal principal de una matriz cuadrada se compone de los elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. Una matriz cuadrada en la que todos los elementos son cero excepto los que están en la diagonal principal se denomina *matriz diagonal*. Es más, si todos los elementos de una matriz diagonal tienen el valor 1, la matriz se denomina *matriz unitaria* o *de identidad*, U . Si todos los elementos de la matriz son cero, $a_{ij} = 0$, la matriz se conoce con el nombre de

matriz *cero* 0. Si $a_{ij} = a_{ji}$ en una matriz, ésta se conoce como *matriz simétrica*.

Las tres matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-2})$$

ilustran las matrices de órdenes 2×3 para A , 3×2 para B y 3×1 para C . La matriz C es una matriz columna o vector. La matriz

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-3})$$

es cuadrada, diagonal, unitaria y también simétrica.

En la siguiente sección se dará atención a la *igualdad de matrices*. Si dos matrices son iguales, tienen el mismo orden y elementos correspondientes iguales.

B-2. SUMA Y RESTA DE MATRICES

La *suma* de dos matrices del mismo orden se encuentra sumando los elementos correspondientes. Por tanto, si los elementos de A son a_{ij} y los de B son b_{ij} , y si $C = A + B$, entonces

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (\text{B-4})$$

Es evidente que $A + B = B + A$ para matrices.

Si una matriz A se multiplica por una constante α , entonces cada elemento de A se multiplica por α :

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}] \quad (\text{B-5})$$

En particular, si $\alpha = -1$, entonces

$$-A = [-a_{ij}] \quad (\text{B-6})$$

De acuerdo con esto, se observa que para restar B de A se multiplican todos los elementos de B por -1 y se suman. Por ejemplo,

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B-7})$$

B-3. MULTIPLICACION DE MATRICES

La multiplicación de las matrices A y B se define sólo si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B . Así, si A es del orden $m \times n$ y B es del orden $n \times p$, entonces el producto AB es una matriz C de orden $m \times p$; por tanto,

$$A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p} \quad (\text{B-8})$$

Los elementos de C se determinan a partir de los elementos de A y B , multiplicando el i ésimo renglón de A y la j ésima columna de B y sumando estos productos para obtener c_{ij} . En forma de ecuación,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad (\text{B-9})$$

La multiplicación de matrices no es conmutativa en general esto es,

$$AB \neq BA, \quad \text{usualmente} \quad (\text{B-10})$$

incluso cuando BA quede definida [significando que se satisfacen los órdenes especificados por la ecuación (B-8)].

EJEMPLO 1

Las ecuaciones del capítulo 11

$$\begin{aligned} z_{11}I_1 + z_{12}I_2 &= V_1 \\ z_{21}I_1 + z_{22}I_2 &= V_2 \end{aligned} \quad (\text{B-11})$$

se escriben en la siguiente forma matricial:

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B-12})$$

como se puede verificar si se aplica la ecuación (B-9).

EJEMPLO 2

Varias multiplicaciones matriciales ilustrarán el uso de la ecuación (B-9):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B-13})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{B-14})$$

594 Algebra matricial

Finalmente se observa que

$$UA = AU = A \quad (\text{B-15})$$

si U y A son ambas cuadradas y de orden n .

B.4. OTRAS DEFINICIONES

Hay varias definiciones adicionales que se utilizarán al estudiar la solución de una ecuación matricial.

La *transpuesta* de una matriz A es A^T y se forma intercambiando los renglones y las columnas de A . Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ entonces } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-16})$$

El *determinante* de una matriz cuadrada tiene como elementos los mismos de la matriz. En otras palabras,

$$\det A = \det [a_{ij}] = |a_{ij}| \quad (\text{B-17})$$

Por ejemplo

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \quad (\text{B-18})$$

El cofactor A_{ij} del elemento de una matriz a_{ij} se define para una matriz cuadrada A . Tiene el valor $(-1)^{i+j}$ veces el determinante que se forma al eliminar el i ésimo renglón y la j ésima columna del $\det A$.

La *matriz adjunta* de una matriz cuadrada A se forma substituyendo cada elemento a_{ij} por A_{ij} y transponiendo. Por tanto,

$$\text{adjunta de } A = [A_{ij}]^T \quad (\text{B-19})$$

Por último, se define la *matriz inversa* de A , A^{-1} como la matriz adjunta dividida entre el determinante de A :

$$A^{-1} = \frac{\text{adjunta de } A}{\det A}, \quad \det A \neq 0 \quad (\text{B-20})$$

EJEMPLO 3

Supóngase que se requiere determinar A^{-1} siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-21})$$

Obsérvese que

$$\det A = 3, \quad [A_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad [A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-22})$$

Por tanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (\text{B-23})$$

B-5. SOLUCION MATRICIAL DE ECUACIONES LINEALES SIMULTANEAS

En aplicaciones del análisis de redes, se tienen ecuaciones formuladas, con base en una de las leyes de Kirchhoff. Esas ecuaciones tienen la forma

$$ZI = V \quad (\text{B-24})$$

en donde Z es una matriz cuadrada de orden n , I es una matriz columna, con elementos I_1, I_2, \dots, I_n , y V es una matriz columna cuyos elementos son V_1, V_2, \dots, V_n . En el capítulo 6 se demostró que I_j se puede encontrar utilizando la regla de Cramer, como sigue:

$$I_j = \frac{1}{\det Z} \sum_{i=1}^n V_i Z_{ij} \quad (\text{B-25})$$

en donde Z_{ij} es el cofactor de z_{ij} en el $\det Z$.

Para obtener este mismo resultado utilizando matrices se multiplica la ecuación (B-24) por Z^{-1} y se emplea la relación $Z^{-1}Z = U$. Por tanto,

$$Z^{-1}ZI = UI = I \quad (\text{B-26})$$

y la solución de la ecuación (B-24) es

$$I = Z^{-1}V \quad (\text{B-27})$$

Esto se puede escribir también en la forma

$$I = \frac{\text{adjunta de } Z}{\det Z} V \quad (\text{B-28})$$

que, como se puede ver, está en la misma forma que la ecuación (B-25) pero generalizada para todos los valores de I .

EJEMPLO 4

Una red de resistores y baterías se describe mediante las ecuaciones de voltajes de Kirchhoff expresadas en forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-29})$$

Como en el ejemplo 3, se encuentra que

$$Z^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B-30})$$

de tal manera que, de acuerdo con la ecuación (B-27),

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \quad (\text{B-31})$$

En el análisis de redes, sobre todo mediante computadora, se utilizan otros métodos, en vez de evaluar Z^{-1} . En la sección 3-7 se estudió el método de eliminación de Gauss y se mostró cómo se resuelve una ecuación matricial mediante pasos sucesivos de triangularización y sustitución inversa. El resultado es que la ecuación matricial

$$ZI = V \quad (\text{B-32})$$

se reduce a la forma

$$\begin{bmatrix} c_{11} & & & & & \\ & c_{22} & & & & \\ & & c_{33} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & c_{nn} & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 V_1 \\ k_2 V_2 \\ k_3 V_3 \\ \vdots \\ k_n V_n \end{bmatrix} \quad (\text{B-33})$$

en donde la matriz cuadrada tiene términos distintos de cero sólo en la diagonal principal. Directamente se obtiene la solución

$$I_1 = \frac{k_1}{c_{11}} V_1 \quad (\text{B-34})$$

o bien, en general,

$$I_i = \frac{k_i}{c_{ii}} V_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{B-35})$$

Una operación básica en la solución por computadora de las ecuaciones matriciales como la (B-32) es la *factorización LU*, en donde L es una matriz cuadrada con elementos distintos de cero en la diagonal principal y debajo de ella y U es una matriz cuadrada con elementos

distintos de cero en la diagonal principal y arriba de ella, siendo cada matriz $n \times n$ y

$$LU = Z \quad (\text{B-36})$$

Substituyendo esta ecuación en la expresión (B-32), se tiene

$$LUI = V \quad (\text{B-37})$$

Si se identifica $UI = y$, se puede resolver

$$Ly = V \quad (\text{B-38})$$

por medio de la eliminación directa de Gauss para y . Una vez que se conoce y , se resuelve

$$UI = y \quad (\text{B-39})$$

para I , aplicando el mismo procedimiento directo de eliminación de Gauss. La ventaja de este método es que si V cambia en la ecuación (B-32), entonces Z no se tiene que refactorizar.

Por último, la computación de L y U es directa. Si se hace que los elementos de Z sean z_{ij} , entonces

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-40})$$

$$= \begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} \\ l_{31} & l_{31}u_{12} + l_{32} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{B-41})$$

La solución de estas ecuaciones para las l y u es una simple rutina.

Si se desea hacer consultas posteriores acerca del tema, incluyendo un estudio de las técnicas especiales que se pueden emplear cuando Z es *no densa*, véanse: Donald A. Calahan, *Computer-Aided Network Design*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1972, o bien George Forsythe y Cleve B. Moler, *Computer Solution of Linear Algebraic Systems*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1967.

PROBLEMAS

B-1. Se dan las tres matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Determine (a) AB , (b) BC , y (c) ABC .

598 *Algebra matricial*B-2. Para B del problema B-1 encuentre $\det B$, B^T y B^{-1} .

B-3. Para la matriz

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

encuentre $\det D$, D^T y D^{-1} .

B-4. Para la matriz

$$E = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

encuentre $\det E$, E^T y E^{-1} .B-5. Demuestre que (a) $(A^T)^T = A$ y (b) $(AB)^T = B^T A^T$.

B-6. Utilizando matrices, resuelva las siguientes ecuaciones algebraicas simultáneas y compruebe sus soluciones

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

B-7. Efectúe las operaciones que se indican en las ecuaciones (B-40) y (B-41) para mostrar que

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & \frac{1}{2} & -2 \\ -1 & -2 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por factorización LU .

Apéndice C: Cambio de Escalas

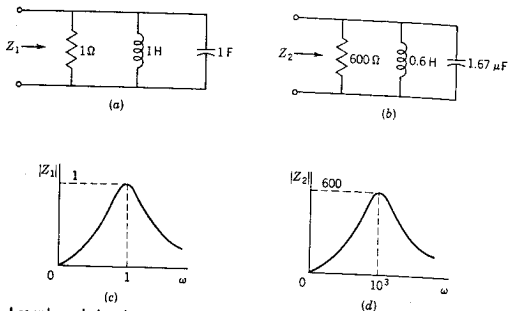
C-1. UN EJEMPLO DE CAMBIO DE ESCALA

El tema de las escalas se introduce estudiando las dos redes que se dan en (a) y (b) de la figura C-1. Para la red *RLC* en paralelo, la magnitud de la impedancia es

$$|Z| = \frac{1}{[(1/R)^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2]^{1/2}} \quad (C-1)$$

La variación de la magnitud de impedancia en función de ω , como se determinó en esta ecuación, se ilustra en (c) para el caso de la red de (a) y en (d) para la red de (b). Se observa que estas dos gráficas difieren en sólo dos aspectos: la escala de frecuencia de (d) está amplificada por un factor de 10^3 y a frecuencias correspondientes (relacionadas por 10^3), la variación de magnitud de $|Z_2|$ es 600 veces la de (c) para $|Z_1|$. Tomando en cuenta, estos dos factores las gráficas tienen la misma forma.

De acuerdo con este ejemplo, se observa que este tipo de escala es importante en el análisis. Las redes que tienen valores de elementos como los que se dan en la figura C-1(b) se pueden cambiar de escala para tener valores como los de (a) antes de efectuar el análisis. Por el contrario, una red diseñada con valores de elementos tales como los de (a) se puede cambiar de escala con valores como los de (b) para satisfacer cualquier especificación en lo que respecta al rango de frecuencias y al nivel general de impedancia.



Los valores de los elementos en H o F

Fig. C-1.

C-2. ESCALAS DE FRECUENCIA Y MAGNITUD

Considérese el problema de cambiar la escala de frecuencia y, al mismo tiempo, de cambiar los valores de elementos en una red, de tal manera que se mantenga constante la magnitud de la impedancia. Sea la frecuencia ω que se cambia de escala a un nuevo valor ω/ω_0 . Sea la frecuencia ω_0 es una constante, de tal modo que $Z(j\omega)$ tenga la misma magnitud que $Z(j\omega/\omega_0)$. De acuerdo con las ecuaciones

$$|Z_L| = \omega L = \frac{\omega}{\omega_0} \omega_0 L \quad (\text{C-2})$$

y

$$|Z_C| = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(\omega/\omega_0)\omega_0 C} \quad (\text{C-3})$$

se observa que, si ω se convierte en ω/ω_0 , es necesario que tanto L como C se multipliquen por ω_0 , a fin de que se mantenga constante la magnitud de la impedancia. Sólo es necesario tomar en cuenta L y C , ya que $Z_R = R$ no varía con la frecuencia.

Como problema independiente, véanse los cambios que se deben efectuar en los valores de los elementos con el fin de que la magnitud de la impedancia cambie en la misma proporción para cualquier valor de ω . Para las expresiones de impedancia, $Z_R = R$, $Z_L = j\omega L$, y $Z_C = 1/j\omega C$, se observa que si Z se debe multiplicar por una constante K , es necesario que R y L se multipliquen por K y que C se divida entre K .

Utilizando los dos grupos de reglas que se acaban de ver, se pueden cambiar de escala tanto la magnitud como la frecuencia. Para ilustrar

el uso de las reglas, primeramente se verá *el cambio de escala hacia arriba* de la magnitud y la frecuencia, como se hizo al pasar de la red (a) a la (b) en la figura C-1, y luego se verá *el cambio de escala hacia abajo* tanto de la magnitud como de la frecuencia. Por supuesto, se puede cambiar de escala la frecuencia en un sentido y la magnitud en otro.

Supóngase que se desea cambiar de escala la frecuencia de tal manera que ω_1 se ponga como ω_1/ω_0 para $\omega_0 > 1$ y, al mismo tiempo, que la magnitud se cambie de escala de un valor nominal Z_0 (por ejemplo, la impedancia a cierta frecuencia) a Z_0/K_1 para $K > 1$. En este caso, los valores de los elementos para la *red cambiada de escala hacia abajo* se pueden calcular a partir de las ecuaciones

$$R_{d1} = \frac{R}{K_1} \quad (C-4)$$

$$L_{d1} = \frac{\omega_0}{K_1} L \quad (C-5)$$

$$C_{d1} = \omega_0 K_1 C \quad (C-6)$$

en donde R , L y C son los valores de los elementos de la red que se va a cambiar de escala.

Supóngase que ahora se desea cambiar la escala de la frecuencia de tal manera que ω_2 se ponga como $\omega_0 \omega_2$, siendo $\omega_0 > 1$ y, al mismo tiempo, se desea incrementar la magnitud de un valor nominal (a cierta frecuencia) Z_0 a $K_2 Z_0$, $K_2 > 1$. Entonces los valores de los elementos de la *red cambiada a escala hacia arriba* se pueden calcular con base en las ecuaciones

$$R_{s1} = K_2 R \quad (C-7)$$

$$L_{s1} = \frac{K_2}{\omega_0} L \quad (C-8)$$

$$C_{s1} = \frac{1}{\omega_0 K_2} C \quad (C-9)$$

Es evidente, que bastará uno de los dos conjuntos de ecuaciones si se permite que K y ω_0 tengan valores inferiores a 1.

El procedimiento de cambio de escala de las magnitudes que se describe se aplica a impedancias de punto impulsor o de transferencia (Z ó Z_{12}) e *inversamente* a las admitancias de punto impulsor y transferencia (Y o Y_{12}). Es importante saber que el cambio de escala de la magnitud de la impedancia *no* afecta a la magnitud de G_{12} ó α_{12} o a las cantidades derivadas de la relación de voltaje ó de la

relación de corrientes tales como la pérdida de inserción.¹ A continuación se ilustrará esta proposición con un ejemplo.

EJEMPLO 1

Para el primer ejemplo se deducirán los valores de los elementos de la red (b) de la figura C-1, cambiando de escala hacia arriba la red (a). Utilizando las ecuaciones (C-7) a (C-9), con $\omega_0 = 10^3$ y $K_2 = 600$, se tiene que

$$R_{su} = 600 \times 1 = 600 \Omega \quad (\text{C-10})$$

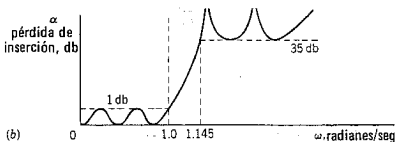
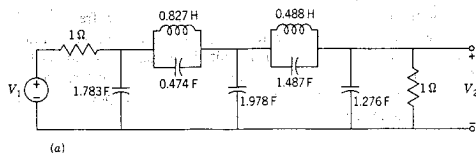
$$L_{su} = \left(\frac{600}{1000}\right) 1 = 0.6 \text{ H} \quad (\text{C-11})$$

y

$$C_{su} = \frac{1}{(600 \times 10^3)} = 1.67 \mu\text{F} \quad (\text{C-12})$$

EJEMPLO 2

La red y la característica de pérdida de inserción que aparecen en la figura C-2 se tomaron de un manual para diseñar filtros.² Se desea diseñar un filtro en el que los resistores terminales tengan un valor de 600 ohms y que la banda de frecuencias para la que la pérdida de

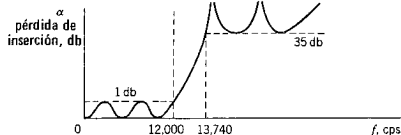
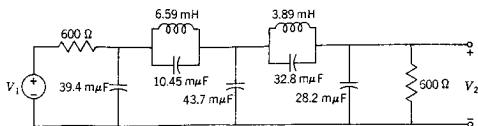


Los valores de los elementos en H o F

Fig. C-2.

¹ M. E. Van Valkenburg, *introduction to Modern Network Synthesis* John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1960, p. 53.

² Deverl S. Humpherys, *The Analysis, Design and Synthesis of Electrical Filters* (Prentice-Hall, Inc., Englewood-Cliffs, N. J., 1970).



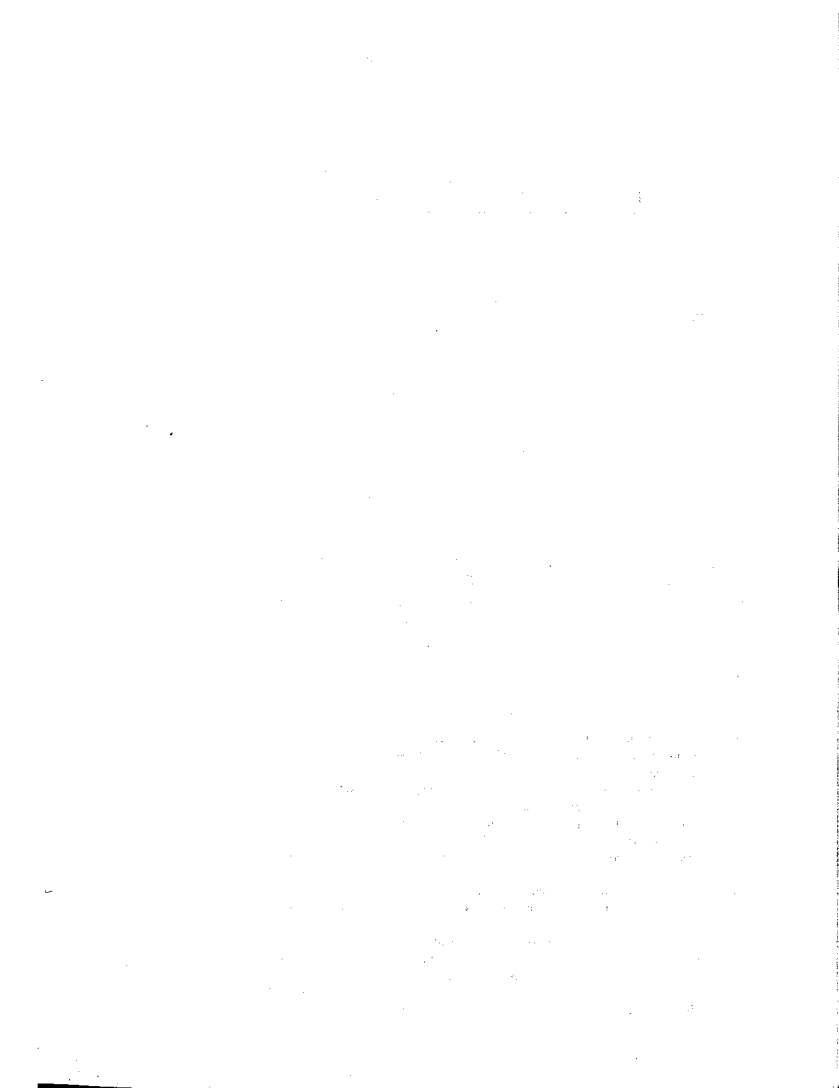
Los valores de los elementos en H o F

Fig. C-3.

inserción sea 1 db o menos, se extienda de 0 a 12.0 kilociclos/seg. Se sabe que si se satisface esta especificación es suficiente la pérdida mínima de 35 db a frecuencias elevadas. Este diseño se puede completar con el empleo de las ecuaciones (C-7) a (C-9) con $K_2 = 600$ y $\omega_0 = 2\pi \times 12,000$. La red puesta a escala y su pérdida de inserción se ilustran en la figura C-3. Obsérvese que la magnitud de la pérdida de inserción no cambia por las operaciones de cambio de escala.

PROBLEMAS



- C-1. Cambie la escala de la red de (a) de la figura C-1 de tal manera que la magnitud de Z_2 en (d) sea de 5000 ohms en su máximo y que este máximo ocurra a 10^6 radianes/seg.
- C-2. Repita el problema C-1 de tal modo que la magnitud máxima de Z_2 sea 0.001 ohms a $\omega = 0.1$ radian/seg.
- C-3. Tomando como base la red de la figura C-2, diseñe una red de tal modo que los resistores terminales tengan valores de 5000 ohms y que la banda de frecuencias para la que la pérdida de inserción sea menor de 1 db se extienda de 0 a 25,000 cps.
- C-4. Cambie la escala de magnitud de la red de la figura C-2 de modo que todos los valores de los elementos pasivos estén comprendidos, si es posible entre 1 y 10.
- C-5. Se necesita diseñar un filtro para proporcionar 35 db de pérdida de inserción para todas las frecuencias superiores a 16.4 kilociclos/seg y 1 db de pérdida de inserción para casi todo el rango de frecuencias de 0 a 16.4 kilociclos/seg. Los resistores terminales deben tener un valor de 72 ohms. Diseñe la red, indicando todos los valores de los elementos.



Apéndice D:

Tabla de transformadas inversas de Laplace

John A. Aseltine elaboró la siguiente tabla. En ella se expresan las transformadas inversas de Laplace según la geometría del plano s para una función $F(s)$ racional con uno, dos y tres polos. Al usar la tabla, se trazan flechas de polo o cero a polo o cero, como se indica. Cuando la flecha así trazada se dirige a la derecha, se toma como positiva y cuando se dirige a la izquierda, como negativa. Cuando una línea tiene flechas en ambos sentidos, se toma siempre como positiva. (Tomado de John A. Aseltine, *Transform Method in Linear System Analysis*, copyright 1958, McGraw-Hill, Inc. Usado con permiso.)

Un polo		
$F(s)$	Plano s	$f(t)$
$\frac{1}{s+a}$		e^{-at}
Dos polos		
$\frac{1}{(s+a_1)(s+a_2)}$		$\frac{1}{A} (e^{-a_1 t} - e^{-a_2 t})$

Dos polos (continúa)

$F(s)$	Plano s	$f(t)$
$\frac{(s+b)}{(s+a_1)(s+a_2)}$		$\frac{1}{A} (B_1 e^{-at} - B_2 e^{-a_2 t})$
$\frac{1}{(s+a)^2}$		$t e^{-at}$
$\frac{(s+b)}{(s+a)^2}$		$(Bt + 1)e^{-at}$
$\frac{1}{(s+a)^2 + \beta^2}$		$\frac{1}{\beta} e^{-at} \sin \beta t$
$\frac{s+b}{(s+a)^2 + \beta^2}$		$\frac{B}{\beta} e^{-at} \sin(\beta t + \theta)$

Tres polos

$\frac{1}{(s+a_1)(s+a_2)(s+a_3)}$		$\frac{1}{A_{21} A_{31}} e^{-a_1 t} - \frac{1}{A_{21} A_{32}} e^{-a_2 t} + \frac{1}{A_{31} A_{32}} e^{-a_3 t}$
$\frac{s+b}{(s+a_1)(s+a_2)(s+a_3)}$		$\frac{B_1}{A_{21} A_{31}} e^{-a_1 t} - \frac{B_2}{A_{21} A_{32}} e^{-a_2 t} + \frac{B_3}{A_{31} A_{32}} e^{-a_3 t}$
$\frac{s^2}{(s+a_1)(s+a_2)(s+a_3)}$		$\frac{a_1^2}{A_{21} A_{31}} e^{-a_1 t} - \frac{a_2^2}{A_{21} A_{32}} e^{-a_2 t} + \frac{a_3^2}{A_{31} A_{32}} e^{-a_3 t}$

Apéndice D 607

Tres polos (continúa)

$F(s)$	Plano s	$f(t)$
$\frac{1}{(s+a_1)^2(s+a_2)}$		$\frac{1}{A^2} [e^{-a_1 t} + (At - 1)e^{-a_1 t}]$
$\frac{s+b}{(s+a_1)^2(s+a_2)}$		$\frac{1}{A^2} [B_2 e^{-a_2 t} + (AB_1 t - B_2)e^{-a_1 t}]$
$\frac{s^2}{(s+a_1)^2(s+a_2)}$		$\frac{1}{A^2} [a_2^2 e^{-a_2 t} + (a_1^2 A t - a_1 A - a_1 a_2) e^{-a_1 t}]$
$\frac{1}{(s+a_2)((s+a)^2 + \beta^2)}$		$\frac{1}{A^2} e^{-a_2 t} + \frac{1}{A\beta} e^{-at} \text{sen}(\beta t - \theta)$
$\frac{s+b}{(s+a_2)((s+a)^2 + \beta^2)}$		$\frac{B_1}{A^2} e^{-a_2 t} + \frac{B}{\beta A} e^{-at} \text{sen}(\beta t - \theta)$
$\frac{s^2}{(s+a_2)((s+a)^2 + \beta^2)}$		$\frac{a_2^2}{A^2} e^{-a_2 t} + \frac{B^2}{\beta A} e^{-at} \text{sen}(\beta t - \theta_1 - 2\theta_2)$

The following table shows the results of the survey conducted in the year 1950-1951. The data is presented in a tabular format, with columns representing different categories and rows representing specific data points. The table is organized into several sections, each corresponding to a different aspect of the survey.

Category	Sub-category	Value
Section 1	Item A	12.5
	Item B	8.7
	Item C	15.3
	Item D	9.1
Section 2	Item E	20.4
	Item F	18.9
	Item G	22.1
Section 3	Item H	10.6
	Item I	14.2
Section 4	Item J	17.8
	Item K	13.5
	Item L	19.2
	Item M	11.4
	Item N	16.7
Section 5	Item O	25.3
	Item P	21.8
	Item Q	28.9
Section 6	Item R	18.4
	Item S	22.6
Section 7	Item T	15.7
	Item U	12.9
	Item V	17.1
	Item W	14.3
Section 8	Item X	23.5
	Item Y	19.8
	Item Z	26.2
Section 9	Item AA	16.1
	Item AB	13.8
Section 10	Item AC	21.4
	Item AD	18.7
	Item AE	24.9
	Item AF	17.2
	Item AG	20.5
Section 11	Item AH	14.6
	Item AI	12.3
	Item AJ	16.8
Section 12	Item AK	22.1
	Item AL	19.5
Section 13	Item AM	17.9
	Item AN	15.4
	Item AO	20.3
	Item AP	18.1
Section 14	Item AQ	24.7
	Item AR	21.2
	Item AS	27.8
Section 15	Item AT	19.6
	Item AU	17.3
Section 16	Item AV	23.4
	Item AW	20.8
	Item AX	26.1
	Item AY	18.5
	Item AZ	22.9
Section 17	Item BA	16.3
	Item BB	14.1
	Item BC	18.7
Section 18	Item BD	21.5
	Item BE	19.2
Section 19	Item BF	25.6
	Item BG	22.3
	Item BH	28.4
	Item BI	24.1
Section 20	Item BJ	18.9
	Item BK	16.7
	Item BL	21.4
Section 21	Item BM	23.8
	Item BN	20.5
Section 22	Item BO	27.2
	Item BP	24.6
	Item BQ	29.1
	Item BR	25.8
	Item BS	28.3
Section 23	Item BT	21.7
	Item BU	19.4
	Item BV	24.9
Section 24	Item BW	26.5
	Item BX	23.2
Section 25	Item BY	28.7
	Item BZ	25.4
	Item C1	30.1
	Item C2	27.6
Section 26	Item C3	29.8
	Item C4	26.3
	Item C5	31.2
Section 27	Item C6	28.5
	Item C7	25.9
Section 28	Item C8	32.4
	Item C9	29.1
	Item CA	33.7
	Item CB	30.2
	Item CC	34.5
Section 29	Item CD	31.8
	Item CE	28.4
	Item CF	33.1
Section 30	Item CG	30.6
	Item CH	27.3
Section 31	Item CI	34.9
	Item CJ	31.5
	Item CK	35.2
	Item CL	32.8
Section 32	Item CM	33.4
	Item CN	30.1
	Item CO	34.7
Section 33	Item CP	32.6
	Item CQ	29.3
Section 34	Item CR	36.1
	Item CS	32.8
	Item CT	37.4
	Item CU	34.2
	Item CV	38.5
Section 35	Item CW	35.7
	Item CX	32.4
	Item CY	37.1
Section 36	Item CZ	36.3
	Item D1	33.0
Section 37	Item D2	37.8
	Item D3	34.5
	Item D4	39.1
	Item D5	35.9
Section 38	Item D6	38.4
	Item D7	35.1
	Item D8	39.7
Section 39	Item D9	37.2
	Item DA	33.9
Section 40	Item DB	40.6
	Item DC	37.3
	Item DD	41.9
	Item DE	38.7
	Item DF	43.1
Section 41	Item DG	40.4
	Item DH	37.1
	Item DI	42.8
Section 42	Item DJ	41.5
	Item DK	38.2
Section 43	Item DL	44.9
	Item DM	41.6
	Item DN	45.2
	Item DO	42.7
Section 44	Item DP	43.4
	Item DQ	40.1
	Item DR	44.7
Section 45	Item DS	42.6
	Item DT	39.3
Section 46	Item DU	46.1
	Item DV	42.8
	Item DW	47.4
	Item DX	44.2
	Item DY	48.5
Section 47	Item DZ	45.7
	Item EA	42.4
	Item EB	47.1
Section 48	Item EC	46.3
	Item ED	43.0
Section 49	Item EE	49.8
	Item EF	46.5
	Item EG	50.1
	Item EH	47.6
Section 50	Item EI	48.4
	Item EJ	45.1
	Item EK	49.7
Section 51	Item EL	47.2
	Item EM	43.9
Section 52	Item EN	51.6
	Item EO	48.3
	Item EP	52.9
	Item EQ	49.7
	Item ER	54.1
Section 53	Item ES	50.4
	Item ET	47.1
	Item EU	52.8
Section 54	Item EV	51.5
	Item EW	48.2
Section 55	Item EX	54.9
	Item EY	51.6
	Item EZ	55.2
	Item FA	52.7
Section 56	Item FB	49.4
	Item FC	54.7
	Item FD	51.3
Section 57	Item FE	53.6
	Item FF	50.3
Section 58	Item FG	57.1
	Item FH	53.8
	Item FI	58.4
	Item FJ	55.2
	Item FK	59.5
Section 59	Item FL	56.4
	Item FM	53.1
	Item FN	58.7
Section 60	Item FO	57.2
	Item FP	53.9
Section 61	Item FQ	60.6
	Item FR	57.3
	Item FS	61.9
	Item FT	58.7
Section 62	Item FU	62.4
	Item FV	59.1
	Item FW	63.7
Section 63	Item FX	61.5
	Item FY	58.2
Section 64	Item FZ	64.9
	Item GA	61.6
	Item GB	65.2
	Item GC	62.7
	Item GD	66.1
Section 65	Item GE	63.4
	Item GF	60.1
	Item GH	65.7
Section 66	Item GI	64.6
	Item GJ	61.3
Section 67	Item GK	68.1
	Item GL	64.8
	Item GM	69.4
	Item GN	66.2
Section 68	Item GO	67.4
	Item GP	64.1
	Item GQ	69.7
Section 69	Item GR	68.2
	Item GS	64.9
Section 70	Item GT	71.6
	Item GU	68.3
	Item GV	72.9
	Item GW	69.7
	Item GX	73.1
Section 71	Item GY	70.4
	Item GZ	67.1
	Item HA	72.8
Section 72	Item HB	69.5
	Item HC	74.1
Section 73	Item HD	73.4
	Item HE	70.1
	Item HF	75.7
	Item HG	72.3
Section 74	Item HH	74.6
	Item HI	71.3
	Item HJ	76.9
Section 75	Item HK	75.2
	Item HL	71.9
Section 76	Item HM	78.6
	Item HN	75.3
	Item HO	79.9
	Item HP	76.7
	Item HQ	80.1
Section 77	Item HR	77.4
	Item HS	74.1
	Item HT	79.7
Section 78	Item HU	78.2
	Item HV	74.9
Section 79	Item HW	81.6
	Item HX	78.3
	Item HY	82.9
	Item HZ	79.7
Section 80	Item IA	80.4
	Item IB	77.1
	Item IC	82.8
Section 81	Item ID	81.5
	Item IE	78.2
Section 82	Item IF	84.9
	Item IG	81.6
	Item IH	85.2
	Item II	82.7
	Item IJ	86.1
Section 83	Item IK	83.4
	Item IL	80.1
	Item IM	85.7
Section 84	Item IN	84.6
	Item IO	81.3
Section 85	Item IP	88.1
	Item IQ	84.8
	Item IR	89.4
	Item IS	86.2
Section 86	Item IT	87.4
	Item IU	84.1
	Item IV	89.7
Section 87	Item IW	88.2
	Item IX	84.9
Section 88	Item IY	91.6
	Item IZ	88.3
	Item JA	92.9
	Item JB	89.7
	Item JC	93.1
Section 89	Item JD	90.4
	Item JE	87.1
	Item JF	92.8
Section 90	Item JG	91.5
	Item JH	88.2
Section 91	Item JI	94.9
	Item JJ	91.6
	Item JK	95.2
	Item JL	92.7
Section 92	Item JM	93.4
	Item JN	90.1
	Item JO	95.7
Section 93	Item JP	94.6
	Item JQ	91.3
Section 94	Item JR	98.1
	Item JS	94.8
	Item JT	99.4
	Item JU	96.2
	Item JV	100.1
Section 95	Item JW	97.4
	Item JX	94.1
	Item JY	99.7
Section 96	Item JZ	98.2
	Item KA	94.9
Section 97	Item KB	101.6
	Item KC	98.3
	Item KD	102.9
	Item KE	99.7
Section 98	Item KF	100.4
	Item KG	97.1
	Item KH	102.8
Section 99	Item KI	101.5
	Item KJ	98.2
Section 100	Item KK	104.9
	Item KL	101.6
	Item KM	105.2
	Item KN	102.7
	Item KO	106.1
Section 101	Item KP	103.4
	Item KQ	100.1
	Item KR	105.7
Section 102	Item KS	104.6
	Item KT	101.3
Section 103	Item KU	108.1
	Item KV	104.8
	Item KW	109.4
	Item KX	106.2
Section 104	Item KY	107.4
	Item KZ	104.1
	Item LA	109.7
Section 105	Item LB	108.2
	Item LC	104.9
Section 106	Item LD	111.6
	Item LE	108.3
	Item LF	112.9
	Item LG	109.7
	Item LH	113.1
Section 107	Item LI	110.4
	Item LJ	107.1
	Item LK	112.8
Section 108	Item LL	111.5
	Item LM	108.2
Section 109	Item LN	114.9
	Item LO	111.6
	Item LP	115.2
	Item LQ	112.7
Section 110	Item LR	113.4
	Item LS	110.1
	Item LT	115.7
Section 111	Item LU	114.6
	Item LV	111.3
Section 112	Item LV	118.1
	Item LW	114.8
	Item LX	119.4
	Item LY	116.2
	Item LZ	120.1
Section 113	Item MA	117.4
	Item MB	114.1
	Item MC	119.7
Section 114	Item MD	118.2
	Item ME	114.9
Section 115	Item MF	121.6
	Item MG	118.3
	Item MH	122.9
	Item MI	119.7
Section 116	Item MJ	120.4
	Item MK	117.1
	Item ML	122.8
Section 117	Item MN	121.5
	Item MO	118.2
Section 118	Item MP	124.9
	Item MQ	121.6
	Item MR	125.2
	Item MS	122.7
	Item MT	126.1
Section 119	Item MU	123.4
	Item MV	120.1
	Item MW	125.7
Section 120	Item MX	124.6
	Item MY	121.3
Section 121	Item MZ	128.1
	Item NA	124.8
	Item NB	129.4
	Item NC	126.2
Section 122	Item ND	127.4
	Item NE	124.1
	Item NF	129.7
Section 123	Item NG	128.2
	Item NH	124.9
Section 124	Item NI	131.6
	Item NJ	128.3
	Item NK	132.9
	Item NL	129.7
	Item NM	133.1
Section 125	Item NN	130.4
	Item NO	127.1
	Item NP	132.8
Section 126	Item NQ	131.5
	Item NR	128.2
Section 127	Item NS	134.9
	Item NT	131.6
	Item NU	135.2
	Item NV	132.7
Section 128	Item NW	133.4
	Item NX	130.1
	Item NY	135.7
Section 129	Item NZ	134.6
	Item OA	131.3
Section 130	Item OB	138.1
	Item OC	134.8
	Item OD	139.4
	Item OE	136.2
	Item OF	140.1</

Apéndice E:

Ejercicios para computadora digital

(Métodos numéricos elementales)

En este apéndice se indican las descripciones de ejercicios en computadora que son apropiados para un estudio adicional de los temas de varios capítulos de esta obra. Al final de cada capítulo del libro, se hacen referencias específicas a ejercicios apropiados.

Puesto que los ejercicios que se sugieren se efectuarán en el centro de computación al que el lector tenga acceso, se recomienda especialmente que se establezca contacto con dicho centro para determinar una lista o catálogo de las subrutinas que pueda usar. La forma en que se use la computadora depende de si tales subrutinas son similares o no a las que se describen en las referencias citadas.

En las listas que siguen se utiliza una abreviatura para las referencias del libro de texto, como se dan en las páginas 611-612, y un número de página que señala la ubicación del material apropiado.

E-1. METODOS NUMERICOS PARA ENCONTRAR RAICES

E-1.1 Raíces de cuadráticas: MCC, 126; SEE, 59.

E-1.2 Método Newton-Raphson: GUP, 300; HU2, 867; KIN, 520; LEY, 139, 179; MCC, 44; SEE, 61; WNG, 216.

E-2. INTEGRACION NUMERICA

E-2.1 Métodos de integración numérica: GUP, 19; HU1, 15; HU2, 173; KIN, 236; MCC, 142; LEY, 233; SEE, 73; WNG, 184.

E-2.2 Evaluación de una integral indefinida: GUP, 22; HU2, 185

610 Ejercicios para computadora digital

- E-2.3 Análisis de Fourier: GUP, 409; HU2, 794; MCC, 182; LEY, 252; SEE, 80.
E-2.4 Integrales de Convolución y Superposición: GUP, 267; HU2, 285; KIN, 224.

E-3. FORMULACION Y OPERACIONES MATRICIALES

- E-3.1 Multiplicación de matrices: GUP, 114; MCC, 103; LEY, 458.
E-3.2 Formulación de ecuaciones por matrices: HU2, 71; LEY, 473.

E-4. COMO RESOLVER ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES SIMULTANEAS

- E-4.1 Método de eliminación de Gauss: GUP, 132; HU2, 94; KIN, 272; LEY, 288; MCC, 154; STE, 282.
E-4.2 Conjuntos de ecuaciones simultáneas: HU1, 100; HU2, 81; MCC, 116; SEE, 65.
E-4.3 Solución de ecuaciones de estado: HU2, 81; KIN, Ch. 3; LEY, 768.
E-4.4 Ecuaciones simultáneas que comprenden impedancias y admitancias: GUP, 425; HU2, 431, 444; WNG, 403, 419.
E-4.5 Integración implícita: WNG, 467.

E-5. OPERACIONES ALGEBRAICAS

- E-5.1 Transformadas inversas de Laplace (Determinación de residuos): HU1, 118; HU2, 592; KIN, Ch. 9; LEY, 776; MCC, 196; STE, 120.
E-5.2 Transformada rápida de Fourier: KIN, 460; STE, 149.

E-6. SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

- E-6.1 Solución numérica de ecuaciones de primer orden: GUP, 243; HU1, 63; HU2, 271; KIN, 115.
E-6.2 Solución de un circuito *RLC* en serie: MCC, 28, 53; SEE, 153.
E-6.3 Solución numérica de ecuaciones diferenciales de orden superior. (Método Runge-Kutta, etc.): GUP, 238, HU1, 79, 86; HU2, 364; KIN, 176; LEY, 749; SEE, 75.

E-7. SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

- E-7.1 Solución de ecuaciones diferenciales no lineales: HU1, 43, 70; WNG, 219.

- E-7.2 Solución para redes con elementos que varían con el tiempo: HU1, 61.
 E-7.3 Solución para redes distribuidas: HU1, 167; WNG, 381.

E-8. ANALISIS DE REDES

- E-8.1 Soluciones para la red escalera: GUP, 141; LEY, 79; WNG, 132.
 E-8.2 Soluciones para redes de resistores: HU1, 164; KIN, 269; STE, 286; WNG, 275, 286.
 E-8.3 Soluciones para redes en estado permanente senoidal: HU1, 131; HU2, 110; KIN, 351; SEE, 37; STE, 294.
 E-8.4 Programas de análisis de redes generales: BOW, todo el libro; JEN, todo el libro.

E-9. DETERMINACION POR COMPUTADORA DE LA GRAFICACION DE MAGNITUD Y FASE

- E-9.1 Evaluación de magnitud y fase: GUP, 366, 371; HU1, 133; KIN, 404.
 E-9.2 Gráfica de la solución: GUP, 195; HU1, 27; HU2, 863, 871; LEY, 108; MCC, 108.
 E-9.3 Gráfica de la solución, dominio de la frecuencia: HU2, 488; WNG, 369, 372, 511.
 E-9.4 Gráfica de la solución, dominio del tiempo: GUP, 195.
 E-9.5 Técnicas especiales de graficación: (gráficas de Bode, gráficas del lugar geométrico de las raíces): HU1, 140, 149.

E-10. REFERENCIAS

1. BOW BOWERS, JAMES C. y STEPHEN R. SEDORE, *SCEPTRE: A Computer Program for Circuit and System Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1971, 455 p.
2. CA1 CALAHAN, DONALD A., *Computer-Aided Network Design*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1972, 350 p.
3. CA2 CALAHAN, DONALD A., ALAN B. MACNEE y E. L. McMAHON, *Computer-Oriented Circuit Analysis*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., Nueva York, 1974. Está por publicarse.
4. DER DERTOZOS, MICHAEL L., MICHAEL ATHANS, RICHARD N. SPANN y SAMUEL J. MASON, *Systems, Networks and Computation: Basic Concepts*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1972, 514 p.
5. DIR DIRECTOR, S. W., *Circuit Theory—The Computational Approach*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1974. Está por publicarse.
6. GUP GUPTA, SOMESHWAR C., JON W. BAYLESS y BEHROUZ PEIKARI, *Circuit Analysis with Computer Applications to Problem Solving*, Intext Educational Publishers, Scranton, Pa., 1972, 546 p.

612 *Ejercicios para computadora digital*

7. HU1 HUELSMAN, LAWRENCE P., *Digital Computations in Basic Circuit Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1968, 203 p.
8. HU2 HUELSMAN, LAWRENCE P., *Basic Circuit Theory with Digital Computations*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1972, 896 p.
9. JEN JENSEN, RANDALL W. y MARK D. LIEBERMAN, *IBM Electronic Circuit Analysis Program: Techniques and Applications*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1968, 401 p.
10. KIN KINARIWALA, B. K., FRANKLIN F. KUO y NAI-KUAN TSAO, *Linear Circuits and Computation*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1973, 598 p.
11. LEY LEY, B. JAMES, *Computer Aided Analysis and Design for Electrical Engineers*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., Nueva York, 1970, 852 p.
12. MCC McCRACKEN, DANIEL D., *FORTRAN With Engineering Applications*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1967, 237 p.
13. RAM RAMEY, ROBERT L., y EDWARD J. WHITE, *Matrices and Computers in Electronic Circuit Analysis*, McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1971, 390 p.
14. SEE SEELY, SAMUEL, NORMAN H. TARNOFF y DAVID HOLSTEIN, *Digital Computers in Engineering*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., Nueva York, 1970, 329 p.
15. STE STEIGLITZ, KENNETH, *An Introduction to Discrete Systems*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1974, 318 p.
16. WNG WING, OMAR, *Circuit Theory with Computer Methods*, Holt Rinehart & Winston, Inc., Nueva York, 1972, 529 p.

Apéndice F: Bibliografía

F-1. LIBROS DE TEXTO ELEMENTALES O INTERMEDIOS

- ALLEY, CHARLES L. y KENNETH W. ATWOOD, *Electronic Engineering*, 3.^a ed., John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1973, 864 p.
- ALLEY, CHARLES L. y KENNETH W. ATWOOD, *Semiconductor Devices and Circuits*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1971, 490 p.
- ASELTINE, JOHN A., *Transform Method in Linear System Analysis*, McGraw-Hill, Inc., Nueva York, 1958, 272 p.
- BALABANIAN, NORMAN, *Fundamentals of Circuit Theory*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1961, 555 p.
- BALABANIAN, NORMAN, y WILBUR R. LEPAGE, *Electrical Science: Book I: Resistive and Diode Networks*, McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1970, 301 p.
- BALABANIAN, NORMAN, y WILBUR R. LEPAGE, *Electrical Science: Book II: Dynamic Networks*, McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1973, 640 p.
- CHAN, S. P., S. Y. CHAN y S. G. CHAN, *Analysis of Linear Networks and Systems - A Matrix-Oriented Approach with Computer Applications*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1972, 635 p.
- CHENG, DAVID K., *Analysis of Linear Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1959, 431 p.
- CHIRLIAN, PAUL M., *Basic Network Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969, 624 p.
- CHUA, LEON O., *Introduction to Nonlinear Network Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969, 987 p.
- CLEMENT, PRESTON R. y WALTER C. JOHNSON, *Electrical Engineering Science*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1960, 588 p.
- CLOSE, CHARLES M., *The Analysis of Linear Circuits*, Harcourt, Brace & World, Inc. Nueva York, 1966, 716 p.
- COOPER, G. R. y C. D. MCGILLEM, *Methods of Signal and System Analysis*, Holt, Rinehart & Winston, Nueva York, 1965, 432 p.

- CRUZ, JOSE B., Jr., y M. E. VAN VALKENBURG, *Signals in Linear Circuits*, Houghton Mifflin Company, Boston, Mass., 1974, 596 p.
- DESOPER, CHARLES A. y ERNEST S. KUH, *Basic Circuit Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969, 876 p.
- DIRECTOR, STEPHEN W. y RONALD A. ROHRER, *An Introduction to System Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1972, 452 p.
- FRIEDLAND, B. J., OMAR WING y ROBERT ASH, *Principles of Linear Networks*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1961, 270 p.
- GHAUSI, MOHAMMED S., *Electronic Circuits: Devices, Models, Functions, Analysis, and Design*, Van Nostrand Reinhold Company, Nueva York, 1971, 731 p.
- GRAY, PAUL E. y CAMPBELL L. SEARLE, *Electronic Principles: Physics, Models, and Circuits*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1969, 1016 p.
- GUILLEMIN, E. A., *Introductory Circuit Theory*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1953, 586 p.
- HAMMOND, S. B. y D. K. GEHMLICH, *Electrical Engineering*, 2.^a ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1971, 535 p.
- HAYT, WILLIAM H., Jr. y JACK E. KEMMERLY, *Engineering Circuit Analysis*, 2.^a ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 647 p.
- HAYT, W. J., Jr., y G. W. HUGHES, *Introduction to Electrical Engineering*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1968, 443 p.
- HUANG, THOMAS S. y RONALD R. PARKER, *Network Theory: An Introductory Course*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1971, 653 p.
- HUELSMAN, L. P., *Circuits, Matrices, and Linear Vector Spaces*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1963, 281 p.
- HUGGINS, W. H. y DORIS R. ENTWISLE, *Introductory Systems and Design*, Ginn/Blaisdell Publishing Company, Waltham, Mass, 1968, 683 p.
- KARNI, SHLOMO, *Network Theory: Analysis and Synthesis*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966, 483 p.
- KARNI, SHLOMO, *Intermediate Network Analysis*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1971, 377 p.
- KIM, WAN H. y HENRY E. MEADOWS, Jr., *Modern Network Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1971, 431 p.
- KUO, FRANKLIN F., *Network Analysis and Synthesis*, 2.^a ed., John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1966, 515 p.
- LATHI, B. P., *Signals, Systems, and Communication*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1965, 607 p.
- LEON, BENJAMIN J., *Lumped Systems*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., Nueva York, 1968, 223 p.
- LEON, BENJAMIN J., y PAUL A. WINTZ, *Basic Linear Networks for Electrical and Electronics Engineers*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., Nueva York, 1970, 479 p.
- MANNING, LAURENCE A., *Electrical Circuits*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1965, 567 p.
- MASON, S. J. y HENRY J. ZIMMERMANN, *Electronic Circuits, Signals and Systems*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1960.
- MERRIAM, C. W., III, *Analysis of Lumped Electrical Systems*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1969, 580 p.
- MILLIMAN, JACOB y CHRISTOS C. HALKIAS, *Integrated Electronics: Analog and Digital Circuits and Systems*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1972, 911 p.
- MURDOCH, JOSEPH B., *Network Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1970, 525 p.

- PEDERSON, D. O., J. R. WHINNERY y J. J. STUDER, *Introduction to Electronic Systems, Circuits and Devices*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1966, 457 p.
- ROHRER, RONALD A., *Circuit Theory: An Introduction to the State Variable Approach*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1970, 314 p.
- RYDER, JOHN D., *Introduction to Circuit Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1973, 369 p.
- SCOTT, RONALD E., *Linear Circuits*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1960, 2 Vols., 922 p.
- SMITH, RALPH J., *Circuits, Devices and Systems*, 2.^a ed., John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1971, 734 p.
- SMITH, RALPH J., *Electronics: Circuits and Devices*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1973, 459 p.
- STRUM, ROBERT D. y JOHN R. WARD, *Laplace Transform Solution of Differential Equations* (texto programado), Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1968, 197 p.
- TRUXAL, JOHN G., *Introductory System Engineering*, McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1972, 596 p.
- TUTTLE, DAVID F., Jr., *Electric Networks. Analysis and Synthesis*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1965, 327 p.
- WARD, JOHN R. y ROBERT D. STRUM, *State Variable Analysis* (texto programado), Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1970, 270 p.
- WOLF, HELLMUTH, *Linear Systems and Networks*, Springer-Verlag, Nueva York, 1971, 268 p.
- ZIMMERMAN, HENRY J. y S. J. MASON, *Electronic Circuit Theory: Devices, Models and Circuits*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1959, 564 p.

F-2. TEXTOS AVANZADOS DE TEORIA DE CIRCUITOS

- BALABANIAN, NORMAN, THEODORE A. BICKART y SUNDARAM SESHU, *Electrical Network Theory*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1969, 931 p.
- BODE, H. W., *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, Van Nostrand Reinhold, Company, Nueva York, 1945, 551 p.
- CHAN, SHU-PARK, *Introductory Topological Analysis of Electrical Networks*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., 1969, 482 p.
- CHEN, W. K., *Applied Graph Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1971, 484 p.
- CHUA, LEON O., *Introduction of Nonlinear Network Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969, 987 p.
- FRANK, HOWARD e IVAN T. FRISCH, *Communication, Transmission, and Transportation Networks*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1971, 496 p.
- FRANKS, L. E., *Signal Theory*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. 1969, 317 p.
- GABEL, ROBERT A. y RICHARD A. ROBERTS, *Signals and Linear Systems*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1973, 415 p.
- GARDNER, MURRAY F. y J. L. BARNES, *Transients in Linear Systems*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1942, 382 p.
- GHAUSI, MOHAMMED S. y JOHN J. KELLY, *Introduction to Distributed-Parameter Networks*, Holt, Rinehart & Winston, Nueva York, 1968, 331 p.
- HAZONY, DOV, *Elements of Network Synthesis*, Reinhold Publishing Corp., Nueva York, 1963, 352 p.

- HUELSMAN, LAWRENCE P., *Theory and Design of Active RC Circuits*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1968, 297 p.
- HUMPHREYS, DEVERL S., *The Analysis Design and Synthesis of Electrical Filters*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1970, 675 p.
- KALMAN, R. E. y N. DeCLARIS, eds., *Aspects of Network and System Theory*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., Nueva York, 1971, 648 p.
- KIM, WAN HEE y ROBERT T. CHIEN, *Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks*, Columbia University Press, Nueva York, 1962, 310 p.
- KUH, ERNEST S. y R. A. ROHRER, *Theory of Linear Active Networks*, Holden-Day, Inc., San Francisco, 1967, 650 p.
- MAYEDA, WATARU, *Graph Theory*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1972, 588 p.
- MITRA, SANJIT K., *Analysis and Synthesis of Linear Active Networks*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1969, 565 p.
- NEWCOMB, ROBERT W., *Linear Multiport Synthesis*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1966, 397 p.
- PENFIELD, PAUL Jr., ROBERT SPENCE y SIMON DUINKER, *Tellegen's Theorem and Electrical Networks*, The M.I.T. Press, Cambridge, Mass, 1970, 141 p.
- REZA, FAZLOLLAH, *Linear Spaces in Engineering*, Ginn/Xerox, Waltham, Mass., 1971, 416 p.
- SAEKS, RICHARD, *Generalized Networks*, Holt, Rinehart & Winston, Nueva York, 1972, 433 p.
- SESHU, SUNDARAM y N. BALABANIAN, *Linear Network Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1959, 571 p.
- SESHU, SUNDARAM y MYRIL B. REED, *Linear Graphs and Electrical Networks*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1961, 315 p.
- SKWIRZYNSKI, J. K., *Design Theory and Data for Electrical Filters*, Van Nostrand Reinhold Co., Nueva York, 1965, 701 p.
- SPENCE, ROBERT, *Linear Active Networks*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1970, 359 p.
- VAN VALKENBURG, M. E., *Introduction to Modern Network Synthesis*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1960, 498 p.
- VLACH, JIRI, *Computerized Approximation and Synthesis of Linear Networks*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1969, 477 p.
- WEINBERG, LOUIS, *Network Analysis and Synthesis*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1962, 692 p.

F-3. TEXTOS DE TEORIA DE CIRCUITOS ORIENTADOS A LA COMPUTADORA

- BOWERS, JAMES C. y STEPHEN R. SEDORE, *SCEPTRE: A Computer Program for Circuit and Systems Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1971, 455 p.
- CALAHAN, DONALD A., *Computer-Aided Network Design*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1972, 350 p.
- CALAHAN, DONALD A., ALAN B. MACNEE y E. L. McMAHON, *Computer-Oriented Circuit Analysis*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., Nueva York, 1974. For publicarse.
- COMER, D. J., *Computer Analysis of Circuits*, Intext Educational Publishers, Scranton, Pa., 1971, 356 p.

- DERTOUZOS, MICHAEL L., MICHAEL ATHANS, RICHARD N. SPANN y SAMUEL J. MASON, *Systems, Networks, and Computation: Basic Concepts*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1972, 514 p.
- DIRECTOR, S. W., *Circuit Theory --The Computational Approach*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1974. Por publicarse.
- GUPTA, SOMESHWAR C., JON W. BAYLESS y BEHROUZ PEIKARI, *Circuit Analysis with Computer Applications to Problem Solving*, Intext Educational Publishers, Scranton, Pa., 1972, 546 p.
- HERSKOWITZ, GERALD J., *Computer-Aided Integrated Circuit Design*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1968, 432 p.
- HUELSMAN, LAWRENCE P., *Digital Computations in Basic Circuit Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1968, 203 p.
- HUELSMAN, LAWRENCE P., *Basic Circuit Theory with Digital Computations*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1972, 856 p.
- KINARIWALA, B. K., FRANKLIN F. KUO y NAI-KUAN TSAO, *Linear Circuits and Computation*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1973, 656 p.
- KUO, FRANKLIN F. y JAMES F. KAISER, eds., *System Analysis by Digital Computer*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1966, 438 p.
- KUO, FRANKLIN F., y WALDO G. MAGNUSON, Jr., eds., *Computer Oriented Circuit Design*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1969, 561 p.
- LEY, B. JAMES, *Computer Aided Analysis and Design for Electrical Engineers*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., Nueva York, 1970, 852 p.
- PRINCE, M. DAVID, *Interactive Graphics for Computed-Aided Design*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass, 1971, 301 p.
- RAMEY, ROBERT L. y EDWARD J. WHITE, *Matrices and Computers in Electronic Circuit Analysis*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1971, 390 p.
- SEELY, SAMUEL, NORMAN H. TARNOFF y DAVID HOLSTEIN, *Digital Computers in Engineering*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., Nueva York, 1970, 329 p.
- STEIGLITZ, KENNETH, *An Introduction to Discrete Systems*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1973.
- WING, OMAR, *Circuit Theory with Computer Methods*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., Nueva York, 1972, 529 p.
- WOLFENDALE, E., ed., *Computer-Aided Design Techniques*, Daniel Davey & Co., Inc., Hartford, Conn., 1970, 319 p.

F-4. MODELADO DE DISPOSITIVOS

- GRAY, PAUL E. y CAMPBELL L. SEARLE, *Electronic Principles*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1969, 1016 p.
- HAMILTON, D. J., F. A. LINDOLM y A. H. MARSHAK, *Principles and Applications of Semiconductor Device Modeling*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., Nueva York, 1971, 485 p.
- MILLMAN, JACOB, *Electronic Devices and Models*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, en prensa.
- MILLMAN, JACOB y CHRISTOS C. HALKIAS, *Integrated Electronics: Analog and Digital Circuits and Systems*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1972, 911 p.
- WEDLOCK, BRUCE D. y JAMES K. ROBERGE, *Electronic Components and Measurements*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1969, 338 p.

F-5. SISTEMAS

- DeRUSSO, P. M., R. J. ROY y C. M. CLOSE, *State Variables for Engineers*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1965, 608 p.
- FREDERICK, DEAN K. y A. BRUCE CARLSON, *Linear Systems in Communication and Control*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1971, 575 p.
- KIRK, DONALD E., *Optimal Control Theory: An Introduction*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1971, 452 p.
- KUO, BENJAMIN C., *Linear Networks and Systems*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1967, 411 p.
- MERRIAM, C. W. III, *Analysis of Lumped Electrical Systems*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1969, 580 p.
- PERKINS, WILLIAM R. y JOSE B. CRUZ, Jr., *Engineering of Dynamic Systems*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1969, 568 p.
- SCHWARZ, R. J. y B. FRIEDLAND, *Linear Systems*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1965, 521 p.
- TIMOTHY, LAMAR K. y BLAIR E. BONA, *State Space Analysis: An Introduction*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1968, 406 p.
- TRUXAL, JOHN G., *Introductory Systems Engineering*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1972, 596 p.

F-6. MATERIAL BASICO O DE INTERES HISTORICO

- GANTMACHER, F. R., *The Theory of Matrices*, Vols, I y II, Chelsea Publishing Company, Nueva York, 1959, 276 y 374 p.
- GANTMACHER, F. R., *Applications of the Theory of Matrices*, Interscience Publishers, Inc., Nueva York, 1959, 317 p.
- GREENBERG, MICHAEL D., *Application of Green's Functions in Science and Engineering*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1971, 150 p.
- JORDAN EDWARD C. y KEITH G. BALMAIN, *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*, 2.^a ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1968, 753 p.
- REED, MYRIL B. y GEORGIA B. REED, *Electric Network Theory: Laplace Transform Technique*, International Textbook Company, Scranton, Pa., 1968, 235 p.
- STEINMETZ, CHARLES PROTEUS, *Lectures on Electrical Engineering*, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1971, tres volúmenes.
- VAN VALKENBURG, M. E., *Classics of Circuit Theory*, Dowden, Hutchinson & Ross, Inc., Stroudsburg, Pa., 1974, 453 p.

Apéndice G: Respuestas a problemas selectos

Capítulo 1

1-3. 2 C. 1-5. $i = \omega C_0 V_0 (\cos \omega t - \cos 2\omega t)$ amp. 1-7. 7.2×10^{-8} F. 1-9. $C = 3\pi\epsilon R^2/d$ F. 1-15. $W_C = q^4/4K^3$ J. 1-16(b). $W = (2S_0/a^2) \sinh^2(aq/2)$ J. 1-17. 72×10^{-6} J. 1-19. (a) i tiene la forma de onda de la figura 1-11 y amplitud máxima $CV_{\text{máx}}$. 1-21. (a) 1 weber-vuelta, (c) 0.5 C. 1-24. (a) 0.37 amp/seg, (b) 0.63 weber, (d) 0.37 V, (e) 0.198 J. (g) 0.233 W. 1-25. (d) 0.37 V, (g) 0.137 W. 1-31. $v_C = 4(t-1)$, $1 \leq t \leq 2$; $v_C = 4 - 6(t-2)$, $2 \leq t \leq 3$; $v_C = -2$ V., $t \geq 3$. 1-38. $v_L = (\frac{1}{2}) \cos t$, $0 \leq t \leq \pi$.

Capítulo 2

2-3. i intersección = V/R_b , pendiente = $-1/R_b$. 2-4. Véase figura G-1. 2-8. (a) $L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + 2MH$. 2-9. (b) $200e^{-t}$ V. 2-11. Todas son planas. 2-13. a-1, b-4, c-3, d-2. 2-15. (a) 3, (b) 6.

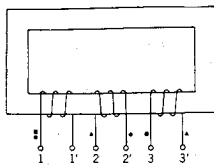


Fig. G-1.

Capítulo 3

- 3-1. (a) $C_{eq} = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$ F. 3-2. (b) $L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$ H. 3-3. (b) $L_{eq} = (L_1 L_2 - M^2) / (L_1 + L_2 + 2M)$ H. 3-6. 2.5 amps, 5 amps/seg. 3-7. $C = 0.15$ F. 3-8. (a) $v_1(t)$ se compone de segmentos rectos y tiene un valor doble como se indica en la siguiente tabla:

t	0	1	2	3	4	5	—
$v(t-)$	0	0	5	4	14	12	—
$v(t+)$	0	1	4	6	12	12	—

- 3-12. (b) Véase figura G-2(a). (f) Véase figura G-2(b). 3-29. (c) Las ecuaciones de nodo son:

$$\begin{aligned} 2C \frac{dv_a}{dt} + G_1 v_a + C \frac{dv_c}{dt} &= C \frac{dv}{dt} \\ C_1 \frac{dv_b}{dt} + 2G v_b - G v_c &= G v \\ -C \frac{dv_a}{dt} - G v_b + C \frac{dv_c}{dt} + (G + G_2) v_c &= 0 \end{aligned}$$

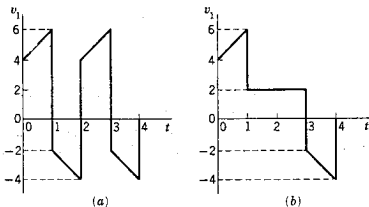


Fig. G-2.

- 3-30. Algunos términos: $b_{11} = 4 + (\frac{1}{2})d/dt$, $b_{33} = (\frac{3}{2})d/dt$, $b_{12} = -2$. 3-32. $i_1 = 405/159$, $i_2 = 210/159$, $i_3 = 270/159$. 3-34. (a) 9, (b) 113. 3-35. (b) La ecuación es

$$\begin{bmatrix} 1.5 & -0.25 & 0 & -1 \\ -0.25 & 1.5 & -0.25 & -1 \\ 0 & -0.25 & 1.5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \\ v_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

- 3-40. $v_a = -0.533$, $v_b = -0.2$, $v_c = 4.03$, $v_d = -0.267$ V. 3-58. $L_{eq} = R_0^2 C$, $R_{eq} = R_0^2 / R$. 3-61. Utilice $L_1 C_1 = L_2 C_2 = L_3 C_3 = 1$ y $Z_a = Z_b$ para obtener $C_1 = \frac{1}{2}$, $L_2 = 3$, $L_3 = 6$, $C_3 = \frac{1}{6}$.

Capítulo 4

- 4-1. $(V/R_1)e^{-(R_1+R_2)t/L}$. 4-3. (c) $v_2 = \frac{5}{3} - (\frac{2}{3})e^{-3t}$. 4-4. $v_2 = -(\frac{1}{2})e^{-3t/4}$. 4-6. $0.6 - 0.1e^{-100t}$. 4-7. $v_2 = e^{-t} - e^{-3t}$. 4-12. $[V/R_1(R_1 + R_2)](R_1 +$

$R_2 - R_2 e^{-Rt/L}$. 4-13. (b) $i = (Vt/L)e^{-Rt/L}$. 4-16. (h)

$$i = \frac{[(a-1) \operatorname{sen} 2t - 2 \cos t] e^{-t} + 2e^{-at}}{(a-1)^2 + 4}$$

4-17. $i_L = 0.6 + 0.067e^{-3.37t}$. 4-20. (a) $R = 10^4 \Omega$, (b) $C = 2.5 \mu\text{F}$.

4-21. (b) $i = 0.01(1 - e^{-16t})$ amp. 4-22. $w_C/w_T = (\frac{1}{2})(1 - e^{-t/RC})$.

Capítulo 5

- 5-1. 0.1, -100, 100,000. 5-3. $d^2i/dt^2(0+) = -9 \times 10^5$ amp/seg.² 5-5. -8 V/seg.², 26 V/seg.³. 5-6. 0 V/seg.². 5-8. 100, -10^4 , 10^6 . 5-13. (b) 0, $R_2 V/(R_1 + R_2)$, (c) V/CR_1 , 0, (d) $R_2 V/R_3 LC$. 5-15. $d^2v_i/dt^2(0+) = V_0/R$. 5-18. 1.406×10^{-5} amp/seg.² 5-20. (b) 66.7 V, (c) 3.33, 1.67 amps, (d) 33.3, $-83,300$. 5-21. $R_1 i(0+)$, 0, $R_1 [(di/dt)(0+) - Ri(0+)/L]$, 0. 5-25. (a) VR_1/R_2 , (b) $(1/C) - R_1$. 5-27. (a) 0, $v(0+)/R_3 C_1$, (b) 0, 0, (c) 0, 0. 5-28. (a) $v_K(0+) = VR_3/(R_1 + R_2 + R_3)$.

Capítulo 6

- 6-3. (f) $i = (A \cos \sqrt{1.75}t + B \operatorname{sen} \sqrt{1.75}t)e^{-t/2}$. (h) $i = Ae^{-2t} + Bte^{-2t}$. 6-5. (a) $i = 2e^{-t} - e^{-2t}$. (b) $i = 3e^{-2t} - 2e^{-3t}$. (f) $i = e^{-0.5t}(\cos 1.32t + 0.379 \operatorname{sen} 1.32t)$. (h) $i = e^{-2t} + te^{-2t}$. 6-9. $i = Ae^{-4.81t} + e^{-1.12t}(B \cos 1.06t + C \operatorname{sen} 1.06t)$. 6-11. $t_1 = 1/\alpha$. 6-14. $i = e^{-140t} \operatorname{sen} 1570t$. 6-15. $i_L = 10 \cos 316t$. 6-18. (b) $i = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t} - \frac{1}{4} + (5t/2)$, (e) $v = (K_1 + t)e^{-2t} + (K_2 - 5t)e^{-3t}$. 6-23. $i = 5t^2 e^{-t}$. 6-24. $i = 10^{-4} e^{-t}(\cos t - \operatorname{sen} t) - 10^{-4} e^{-10t}$. 6-28. $i = 10^{-3}(20.3 \cos 377t + 14.8 \operatorname{sen} 1414t - 0.8 \cos 1414t)$ amp. 6-29. $s(500) = -250 \pm j968$, $s(1000) = -500 \pm j866$, $s(3000) = -2,620$, -380 , $s(5000) = -4,790$, -210 . 6-31. Ecuación característica: $(5 - K_1)s^2 + (6 - 2K_1)s + (2 - K_1) = 0$; el sistema es estable para $K_1 < 2$. 6-33. (d) $w_S = w_R + w_L = (V^2/R)[t + (L/R)(e^{-Rt/L} - 1)]$.

Capítulo 7

- 7-9. $F_1(s) = 2/[s(s^2 + 4)]$. 7-16. $F_8(s) = s^2/[s^2 + a^2]^2$. 7-22. $(V/R_1)e^{-(R_1+R_2)t/L}$. 7-24. $(V/R) \cos(t/\sqrt{LC})$. 7-30. (a) $K_0 = \frac{2}{3}$, $K_2 = \frac{1}{3}$, $K_4 = \frac{2}{3}$. 7-35. $i = K_1 e^t + K_2 e^{-t} - 25 + (\frac{1}{3})e^{2t}$. 7-37. $i = (\frac{1}{3})t^2 + 2e^{-t} + 2$. 7-42. $v_a = 13(e^{-0.0215t} - e^{-0.1285t})$. 7-43. 16.7 seg. 7-44. 14 V en 29.2 seg. 7-45. (a) $3.33 + 1.21e^{-6.35t} - 4.5e^{-23.6t}$. 7-46. $1020(e^{-0.155t} - e^{-0.645t})$. 7-49. $v_a = 4 + e^{-0.75t}(-1.5 \cos 0.25t + 0.5 \operatorname{sen} 0.25t)$. 7-50. $i_2 = -5 - 1.34e^{-0.707t} + 16.3e^{0.707t}$.

Capítulo 8

- 8-1. $u(t-2) - u(t-3) + u(t-7) - u(t-8)$. 8-9. $v = K_0[t^2 u(t) - 4(t-1)u(t-1) - (t-2)^2 u(t-2)]$. 8-10. Respuesta parcial: $v = be^{1 \ln(b/a)t/c} \cdot u(t) - \dots$. 8-14. (c) $i = [5 \times 10^5 t - 1.25 + 1.25e^{-4 \times 10^4 t}]u(t) - [5 \times 10^5(t - 10^{-6}) - 1.25 + 1.25e^{-4 \times 10^4(t - 10^{-6})}]u(t - 10^{-6})$. 8-17. $i(t) = [1 - e^{-(t-1)}]u(t-1) + [1 - e^{-(t-2)}]u(t-2) + [1 - e^{-(t-3)}]u(t-3) + [1 - e^{-(t-4)}]u(t-4) - 4[1 - e^{-(t-5)}]u(t-5)$. 8-19. $F_1(s) = K[(1/s^2) + (r_0/s)]$. 8-26. $V(s) = (1/s)[e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + e^{-4s} - 4e^{-5s}]$. 8-31. $F(s) = 1/[s(1 - e^{-10s})]$. 8-33. $F(s) = \{1/[s + \frac{1}{2}](1 + e^{-(0.5+s)})\}$. 8-34. (a) $f(t) = te^{at}$.

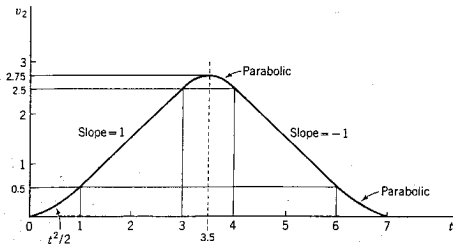


Fig. G-3.

8-36. Véase la figura G-3. 8-68. $v = (4e^t - 3)u(t)$. 8-69. $h_3 = (t^2/2)u(t) - [3(t-1)^2/2]u(t-1) + [3(t-2)^2/2]u(t-2) - [(t-3)^2/2]u(t-3)$. 8-70. $v_2 = 2(t-1 + e^{-t})u(t) - 4[1 - e^{-(t-1)}]u(t-1) - 2[t-3 + e^{-(t-2)}]u(t-2)$.

Capítulo 9

9-1. (a) $-2 \pm j1$, -3 , (b) $-1 \pm j3$, -1 , -4 . 9-6. Véase la figura G-4. 9-7. $Z = L_{eq}s$, $L_{eq} = (L_1L_2 + L_2L_3 + L_3L_1)/(L_2 + L_3)$. 9-8. $Z(s) = (s+1)/(s^2 + 3s + 1)$. 9-9. $Z(s) = [(s^2 + 1)(s^2 + 9)]/[s(s^2 + 4)]$. 9-11. $Y(s) = 1$. 9-27. $I_2(s) = 4 \times 10^2/[s(s+10)(s+30)]$. 9-29. Amplitud $= R_3/(R_1 + R_3)$, duración $= T$ seg. 9-30. $V_{Th} = 4s/[(s^2 + 4)(s+2)]$, $Z_{Th} = 1$. 9-31. (b) $V_{Th} = (2s+1)/s[(5-K_1)s+3-K_1]$, $Z_{Th} = [(3-K_1)s+2-K_1]/[(5-K_1)s+3-K_1]$. 9-32. $Z_{Th} = R_1 + R_2 + R_3 - \mu_1R_1 - \mu_2(R_1 + R_2) + \mu_1\mu_2R_1$, $v_{Th} = (\mu_1 + \mu_2 - \mu_1\mu_2)v_1$.

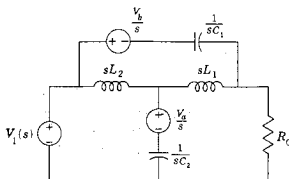


Fig. G-4.

Capítulo 10

10-1. $Z_{12} = 1/[C(s+1/RC)]$. 10-3. $Z_{in} = 1$, $G_{12} = (s+1)/(s^2 + 3s + 1)$. 10-4. (a) $G_{12} = 1/s^2$, (b) $G_{12} = 1/s^2$. 10-9. $K = -3$. 10-10. $V_2/V_1 = (s^2 + 1)^2/(5s^4 + 5s^2 + 1)$. 10-12. $V_2/V_1 = 1/(16s^4 + 12s^2 + 1)$. 10-14. $V_2/V_1 = 1/(s^4 + 3s^2 + 1)$. 10-16. $R = 1$, $L = \frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{10}$. 10-20. (a) 0,0,3, (b) 0,0,3, (c) 2,0,1. 10-21. (a) $K > \frac{1}{2}$, (b) Cuando $K = \frac{1}{2}$, desaparece la parte real. 10-23. (a) 0, 0, 5, (b) 0, 0, 5, (c) 1, 0, 4, (d) 2, 2, 1, (e) 2, 2, 2.

10-29. $K < (R_1 + R_2)/R_2$ para el amplificador estable, $K = (R_1 + R_2)/R_2$ produce oscilación a la frecuencia $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

Capítulo 11

11-3.

$$z = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

11-4.

$$z = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.4 \\ -3.2 & 1.2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ 4 & -0.5 \end{bmatrix}$$

11-10. Sea $D = 2(s + 6)$. $y_{11} = (s^2 + 8s + 8)/D$, $y_{12} = -(s^2 + 6s + 8)/D$, $y_{21} = -(s^2 + 6s + 4)/D$, $y_{22} = (s^2 + 10s + 8)/D$. 11-13. $h_{11} = R_1 + [(1 - \alpha)R_2R_3/(R_2 + R_3)]$, $h_{22} = 1/(R_2 + R_3)$, $h_{12} = R_2/(R_1 + R_3)$, $h_{21} = -(\alpha R_3 + R_2)/(R_2 + R_3)$. 11-26. (a) $R_1 = \frac{1}{2}$, $R_2 = \frac{2}{3}$, $R_3 = \frac{1}{2}$. 11-27. (b) $C_a = \frac{2}{3}$, $C_b = \frac{2}{3}$, $C_o = \frac{2}{3}$. 11-29. $z_{11} = z_{22} = (\frac{1}{2})(Z_a + Z_b)$, $z_{12} = (\frac{1}{2})(Z_b - Z_a)$. 11-32. $Z_{\text{serie}} = R_0 Z_a / (2R_0 + Z_a)$, $Z_{\text{paralelo}} = R_0 + 2Z_b$. 11-34. Vea la red bisectada en la figura G-5.

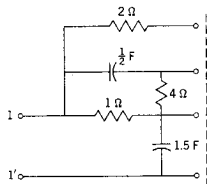


Fig. G-5.

Capítulo 12

12-4. $A = 5$, $\phi = -\tan^{-1} \frac{1}{2} = -53^\circ$. 12-7. (a) $i_{zz} = 1/(2\sqrt{2}) \sin(2t - 45^\circ)$. 12-9. $i_{zz} = (2/\sqrt{R^2 + (1/2C)^2}) \cos(2t + \tan^{-1} 1/2RC)$. 12-16. $v_a = 26.5 \sin(10^6 t + 128^\circ)$. 12-19. (a) $v_1 = 2\sqrt{2} \sin(t/2 + 15^\circ)$. 12-34. $A = \frac{1}{3}$, $\phi = -90^\circ$. 12-35. Vea la figura G-6.

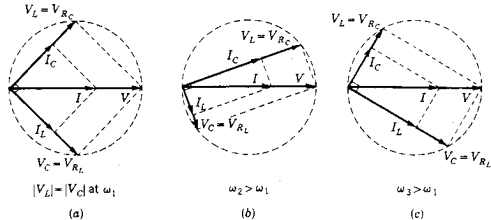


Fig. G-6.

Capítulo 13

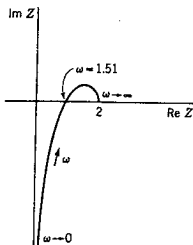


Fig. G-7.

- 13-3. $G_{12}(j\omega) = (R^2/R^2 + \omega^2 L^2) - j(\omega RL/R^2 + \omega^2 L^2)$. 13-12. (a) Vea la figura G-7. 13-13. (b) Vea la figura G-8. 13-16. Polo en $s = -220$. 13-17. Polos en $s = -50 \pm j208$, cero en $s = 0$. 13-18. (a) 4.04, (b) 0.124, (f) 0.5, (h) $LC = 0.0616$, $R = L$. 13-22. El ancho de banda es 2.1 veces mayor con el cero. 13-24. $Q = 5$. 13-34. $G(s) = [0.1s/(s/50 + 1)^3]$. 13-39. $M_{\max} = 20$ db, $\zeta = 0.05$, las pendientes asintóticas son 0 y -12 db/octava.

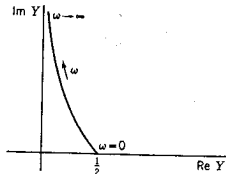


Fig. G-8.

Capítulo 14

- 14-6. $V_{ef} = K_1/\sqrt{3}$. 14-11. $V_{ef} = V_m/2$. 14-14. $V_{ef} = (\sqrt{3}/4)V_0$. 14-16. 12, 16, 7 or 25 V. 14-17. $L = 1$ H. 14-26. (b) 125 μF . 14-30. $Z_X = R_X = 1 \Omega$. 14-31. (a) $\alpha = 10 \log(1 + \omega^6)$ db, (b) $\alpha = 10 \log(1 + \omega^8)$ db, (c) Vea la figura G-9.

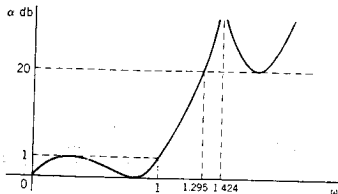


Fig. G-9.

Capítulo 15

- 15-8. Para $a = T/2$, $v = K[\frac{1}{2} + (2/\pi) \text{sen } \omega_0 t - (2/3\pi) \text{sen } 3\omega_0 t + \dots]$. 15-9. $v = K_1[\frac{1}{2} - (1/\pi) \text{sen } \omega_0 t - (1/2\pi) \text{sen } 2\omega_0 t - \dots]$. 15-10. $a_0 = K_1/2$, $a_n = -(4K_2/\pi^2 n^2)$, n impar. 15-12. $|c_n| = [K_4 \sqrt{(1 - \cos 2\pi n k_2)}] / [\sqrt{2} \pi^2 n^2 k_2 (1 - k_2)]$, Angulo de $c_n = \tan^{-1}(-\text{sen } 2\pi n k_2) / (\cos 2\pi n k_2 - 1)$. 15-13. $v = (4V_m/\pi)[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos \omega_0 t - \frac{1}{15} \cos 2\omega_0 t + \frac{1}{33} \cos 3\omega_0 t - \dots]$. 15-14. Vea la solución del problema 15-32. 15-22. (c) Vea la figura G-10. 15-26. (a) $\tilde{c}_n = -jK/\pi n$, n impar, $\tilde{c}_0 = K/2$. 15-32. $\tilde{c}_0 = V_m/\pi$, $\tilde{c}_1 = V_m/4$, $\tilde{c}_2 = V_m/3, \dots$. 15-41. $P_{media} = 7.07$ W. 15-42. (a) $I_1 = 15e^{j(\omega_0 t - 30^\circ)}$, $I_2 = 0.5e^{j(3\omega_0 t - 45^\circ)}$. (b) $P_1 = 1080$ W, $P_3 = 1.77$ W, (c) 1081.77 W.

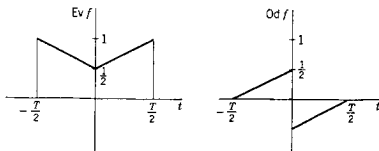


Fig. G-10.

Capítulo 16

- 16-1.** $|F(j\omega)| = |(2V_0/\omega) \text{sen}(\omega a/2)|$. **16-3.** $[2V_m/(1 - \omega^2)] \cos \omega(\pi/2)$.
16-4. $F(j\omega) = 4V_0/\omega(4 - \omega^2) \text{sen}(\omega\pi/2)$. **16-5.** $F(j\omega) = V_0 a \{ (1 - \cos \omega a)/(a^2 \omega^2) + j[(\text{sen} \omega a) - (\omega a)]/(a^2 \omega^2) \}$. **16-17.** $\omega_0 V_0 / (\alpha^2 + \omega_0^2 - \omega^2 + 2j\alpha\omega)$. **16-18.** $|F(j\omega)| = (V_0 t_0)/(1 + \omega^2 t_0^2)$. Angulo = $-2 \tan^{-1} \omega t_0$.
16-19. $F(j\omega) = \sqrt{\pi} V_0 t_0 e^{-\omega^2 t_0^2/4}$. **16-30.** Use el ancho de banda al cruce del primer cero, la duración es π . **16-31.** El primer cero cuando $\omega_1 a/3 = 2\pi$, el producto se hace $\omega_1 a = 4\pi$. **16-35.** Sea el tiempo de elevación $t_r = T$ y la frecuencia de media potencia es $\omega_1 = 1/T$ así que $t_r \omega_1 = 1$. **16-36.** (b) Rebase = $v_{2m} - v(\infty) = e^{-(\alpha\omega)/(\sqrt{1-\alpha^2})}$.

Apéndice H: ***Notas históricas***

En el estudio de los aspectos fundamentales del análisis de redes se encuentran los nombres de muchas personas que han contribuido a la comprensión del tema por medio de sus colaboraciones. En la siguiente tabla se hace una breve presentación de algunos de ellos.

<i>Nombre</i>	<i>Año de naci.-muer.</i>	<i>Ocupación</i>	<i>Contribución citada en el libro de texto</i>
André Marie Ampère	1775-1836	Profesor de matemáticas, París	Leyes fundamentales de la electrodinámica (unidad de corriente)
Hendrik Wade Bode	1905-	Bell Telephone; Laboratories; profesor, Universidad de Harvard	Sistema de coordenadas de magnitud y fase
Charles Augustin Coulomb	1738-1806	Experimentador, Francia	Relación de fuerza para cuerpos cargados (unidad de carga)
Peter Gustav Lejeune Dirichlet	1805-1859	Profesor de matemáticas, Breslau; posteriormente, en Göttinga	Condiciones para que exista una serie de Fourier
Leonhard Euler	1707-1783	Matemático, Academia de Berlín; posteriormente en la Academia de San Petesburgo	Relaciones de números complejos

<i>Nombre</i>	<i>Año de naci-muer.</i>	<i>Ocupación</i>	<i>Contribución citada en el libro de texto</i>
Michael Faraday	1791-1867	Asistente, Royal Institute, Londres	Inducción electromagnética (unidad de capacitancia)
Joseph Fourier	1768-1830	Profesor de matemáticas, Ecole Polytechnique Polytechnique, París	Serie trigonométrica e integral
Benjamín Franklin	1706-1790	Impresor, filósofo; Filadelfia	Esquema conceptual primitivo de la electricidad, sentido de la corriente
Karl Friedrich Gauss	1777-1855	Profesor de matemáticas, Göttinga	Leyes del magnetismo; método para operaciones con matrices
Ernst Adolph Guillemin	1898-1970	Profesor de ingeniería eléctrica, M.I.T.	Fundamentos de la teoría moderna de circuitos; redes RC
Oliver Heaviside	1850-1925	Ingeniero electricista, Inglaterra	Matemática operacional; método para evaluar residuos, concepto moderno de impedancia
Hermann L. F. von Helmholtz	1821-1894	Profesor de física, Heidelberg	Teorema para la reducción de redes (véase Thévenin)
Joseph Henry	1797-1878	Profesor de filosofía natural, Universidad de Princeton	Electromagnetismo (unidad de inductancia)
Heinrich Hertz	1857-1894	Profesor de física, Bonn	Ondas electromagnéticas (unidad de frecuencia)
A. Hurwitz	1862-1909	Matemático, Alemania	Ubicación de los ceros de polinomios (véase Routh)
James P. Joule	1818-1889	Experimentador, Inglaterra	Ley del calentamiento (unidad de energía)
Gustav Kirchhoff	1824-1887	Profesor de física, Heidelberg	Conservación del voltaje y la corriente
Pierre Simon Laplace	1749-1825	Profesor de Matemáticas, Escuela Militar, París	Ecuación de la transformada
James Clerk Maxwell	1831-1879	Profesor de matemáticas, Londres y Cambridge	Leyes del electromagnetismo

<i>Nombre</i>	<i>Año de naci.-muer.</i>	<i>Ocupación</i>	<i>Contribución citada en el libro de texto</i>
Edward Lawry Norton	1898-	Ingeniero electricista, Bell Telephone Laboratories	Teorema para la reducción de redes (véase Thévenin)
Harry Nyquist	1884-	Ingeniero electricista, Bell Telephone Laboratories	Criterio de estabilidad
Hans Christian Oersted	1777-1851	Profesor de física, Universidad de Copenhague	Descubrimiento del electromagnetismo
Georg Simon Ohm	1789-1854	Maestro, Colonia	Ley que relaciona al voltaje con la corriente (unidad de resistencia)
Edward John Routh	1831-1907	Profesor de mecánica, Universidad de Londres	Ubicación de los ceros de los polinomios (estabilidad)
Charles Proteus Steinmetz	1865-1923	Ingeniero electricista, General Electric Co.	Uso de los números complejos para el análisis de redes en el estado puramente senoidal
Bernard D. H. Tellegen	1900-	Philips Research Laboratories, Holanda y Universidad Tecnológica, Delft	Teorema relacionado con el producto de voltajes y corrientes de una red
Leon Charles Thévenin	1857-1926	Ingeniero de telégrafos, Francia	Teorema para la reducción de redes
Alessandro Volta	1745-1827	Profesor de física, Pavia	Celda eléctrica generadora (unidad de voltaje)
James Watt	1738-1819	Ingeniero e inventor escocés	(unidad de potencia)
Charles Wheatstone	1802-1875	Profesor de física, Kings College, Londres	Red en forma de puente; se utiliza para mediciones

Indice

A

- Abscisa de convergencia, 206
- Admitancia, 292
 - 1 de estado permanente senoidal, 411
 - 2 de punto impulsor de entrada, 324
 - 3 de transferencia, 325
 - 4 transformada de la, 292
- Adición, propiedad de, 299
- Aislador, 18
- Algebra de matrices, 591
- Algebra de números complejos, 583
- Ampere ley de, 25, 54
- Ampere, André M., 627
- Ampere (Unidad), 17
- Amplificador conectado en cascode, 114
- Amplitud (magnitud), 403
 - 1 de un espectro, 556
 - 2 de un número complejo, 583
 - 3 de una senoide, 403, 511
- Análisis en base de mallas, 86
- Análisis en base de nodos, 92
- Analogía del gato, 232
- Ancho de banda, 437
 - 1 relacionada con tiempo de elevación, 577
 - 2 relacionada con la duración del pulso, 569
- Antilogaritmo, 123, 202
- Arbol, 60
- Aproximación por elementos de circuito, 38
- Argumento de una función, 238
- Arreglo de una función, 238
- Arreglo Routh-Hurwitz, 358
- Atraso de fase, 403, 482

B

- Bartlett, teorema de bisección de, 398
- Bashkow, matriz A de, 106
- Bashkow, Theodore R., 104

- Bilateral, 40
- Bisección, teorema de, 398
- Bode, diagrama (gráfica) de 440
- Bode, Hendrick W., 440, 627

C

- Cálculo operacional, 201
- Cambio de fuentes E, 78
- Campo eléctrico, 21, 32
- Capacitores, malla de, 145
- Capacitor, 22
 - 1 elemento, 22
 - 2 energía, 476
 - 3 malla, 145
 - 4 potencia, 477
- Carga, 16
- Carga conservación de la, 30
- Carga del electrón, 17
- Caso sobreamortiguado, 186
- Casualdad, 574
- Ceros, 335
- Circuito acoplado, 53
- Coefficiente de transmisión, 492
- Coefficiente de Fourier, serie, 513
 - 1 forma exponencial, 533
- Coefficientes, no determinados, métodos de los, 177, 406
 - tabla de elecciones, 177
- Cofactores, 97
- Concatenamientos de flujo, 26
 - ley de conservación, 30
- Condición (estado) inicial, 123, 141
 - 1 en un capacitor, 143
 - 2 en un inductor, 143
 - 3 en un resistor, 142
- Condiciones observables, 300
- Conductancia, 34
- Conductividad, 33

Conductor, 18
 Conexión en cascada (cadena), 381
 Conexión en (delta), 507
 Conexión en estrella, 506
 Conexión en paralelo de elementos, 293
 Conexión en paralelo de redes de dos puertos, 388
 Conexión en serie de elementos, 293
 Conversión de la cantidad de movimiento, 30
 564
 Conservación, leyes de, 30
 1 de energía 30, 56, 496
 2 de potencia compleja, 497
 Conversión de parámetros, carta de, 387
 Constante de tiempo, 126
 Constnates de producto, 569
 1 ancho de banda-duración de pulso, 569
 2 ancho de banda-tiempo de elevación, 577
 Contornos en el plano s , 348
 Convención de punto, 53
 Corriente, 17
 sentido de referencia, 49
 Corriente convencional, 49
 Corriente electrónica, 49
 Corriente de malla, 74
 Coulomb, ley de, 21
 Cramer, regla de, 97, 595
 Criterio de Routh-Hurwitz, 357
 Cuerdas, 60
 Curvatura de la curva de respuesta, 148

D

Decibel (unidad), 440
 De Moivre, teorema de, 588
 Densidad de corriente, 33
 Desarrollo en fracción continua, 331
 Desarrollo en fracciones parciales, 214, 560
 Desierto matemático, 337
 Determinante m 96, 594
 Determinante del sistema, 98
 Devanado primario, 53
 Devanado secundario, 53
 Diagonal principal, 91, 95
 Diagramas fasoriales, 412
 Diagrama fasorial poligonal, 431
 Diferencia de grado, regla de, 341
 1 funciones de entrada o de punto impulsor,
 341
 2 funciones de transferencia, 345
 Dirichlet, condiciones de, 525
 Dirichlet Peter, G.L. 625
 Discontinuidad de salto, 529
 División de números complejos, 586
 Dual, 101
 construcción de, 102

Dualidad, 101

E

Ecuación característica, 166
 1 raíces complejas, 171
 2 raíces distintas, 166
 3 raíces repetidas, 169
 4 resumen, 173
 Ecuación diferencial, 121
 solución clásica, 165
 Ecuación diferencial homogénea, 122
 Ecuación diferencial no lineal, solución, 610
 Ecuación integrodiferencial, 80, 298
 Ecuaciones matriciales, 67, 591
 Ecuaciones de red, 67
 Elementos no lineales, 40, 48
 Electrón libre, 17
 Efectos parásitos, 38
 Eficiencia de transferencia de potencia, 490
 Elastancia, 22
 Elemento:
 1 de circuito activo, 51
 3 de determinante, 95
 4 de matriz, 591
 Energía, 18, 140, 474
 Elementos lineales, 40
 Envoltente, 192
 Envoltente del espectro, 552
 Error cuadrático medio, 526
 Error de truncamiento, 526
 Escalas, 35, 599
 1 de frecuencia, 600
 2 de magnitud, 601
 3 de transformadas, 241
 Eslabones
 Espectro continuo, 556
 Espectro de potencia, 540
 Espectro de pulso recurrente, 551
 Espectros de línea, 534
 Esquema conceptual, 15
 Estabilidad de las redes activas, 339, 353
 Estado cero, 123
 Estado inicial, 106
 Estado permanente senoidal, 401
 Estado permanente, valor de, 130
 Euler Leonhard, 59, 627
 solucion de, al problema del puesto de Königs-
 berg, 59
 Evaluación de la condición inicial, procedimiento
 de, 149
 Excitación, 121
 Exponencial de decrecimiento, 127

F

Factor de escala, 335
 Factor de integración, 129, 138
 Factor de potencia, 482
 Factor de potencia, 482
 Factor de potencia, corrección de, 486
 Factores cero, 335
 Factores de primer orden, (gráfica de Bode), 444
 Factores de segundo orden (gráfica de Bode), 445
 Factorización LU, 598
 Faraday, Michael, 628
 Farad (unidad), 22
 Fase, 189, 403, 512
 1 de funciones de red, 423
 2 determinación por computadora, 611
 Fase de adelanto, 403, 482
 Fasores cero, 439
 Fazor giratorio, 285
 Fazor giratorio, 404
 Fenómeno de Gibbs, 527
 Filtro de paso bajo, 535, 320
 Flujo concatenado, constante, 29
 Flujo en el transformador, 54
 Forma de estado, 104
 Forma de onda del rayo, 197
 Fórmula cuadrática, 173
 Fourier, Joseph, 509,
 Fourier, transformada de, 554
 1 tabla, 505
 2 transformada rápida de Fourier, 513
 Franklin, Benjamin, 49, 628
 Frecuencia, 283
 1 angular, 283
 2 armónicas, 510
 3 compleja, 283
 4 fundamental, 510
 5 neper, 284
 6 resonante, 434
 Frecuencia angular, 510
 Frecuencia armónica, 510
 Frecuencia compleja, 283
 Frecuencia crítica, 336
 Frecuencia de esquina, 442
 Frecuencia de media potencia, 426
 Frecuencia de ruptura, 442
 Frecuencia fundamental, 510
 Frecuencia natural, 183
 Frecuencia neper, 284
 Fuente controlada (dependiente), 52
 Fuente de corriente, 52
 Fuente dependiente (controlada), 52
 Fuente en vacío, 51
 Fuente unilateral, 53
 Fuerza electromotriz (fem), 19

Función complementaria, 129
 Función de compuerta, 252-253
 Función delta de Dirac (función de impulso), 245
 Función de pulso, 250
 Función de rastreo, 266
 Función de red, 323
 gráficas de fasores, 431
 Función doblete, 246
 Función de magnitud, 423
 Función del a (impulso), 245 n
 Función escalera de muestras, 256
 Función escalón unitario, 205
 trasladada en el tiempo, 237
 Funciones hiperbólicas, 187
 Funciones unitarias:
 1 escalón, 205
 2 escalón trasladado, 237
 3 impulso, 243
 4 rampa, 242
 Función exponencial, 122
 Función exponencial, 404
 Función impar, 517
 Función impelente, 121
 Función impulso, 24, 146, 242
 Función par, 357, 517
 Función rampa, 242
 Función real y positiva, 343 n

G

Ganancia, 440
 Gauss, Karl F., 628
 Gauss, método de eliminación, 99, 596
 Geometría del plano s , 431
 Girador, 117
 Grado y orden, empleo de, 174, 214, 326
 Gráficas de lugares geométricos, 427
 Gráfica de red, 58
 1 no plana, 60
 2 orientada, 58
 3 plana, 59
 Gráfica no plana, 60
 Gráfica plana, 59
 Guillemin, Ernst A., 628

H

Heaviside, Oliver, 201, 628
 Heaviside, teorema del desarrollo de, 218
 Helmholtz, Hermann, 628
 Henry, Joseph, 628
 Hertz, Heinrich, 628
 Hertz (unidad), 284
 Histéresis, 40
 Homogeneidad, propiedad de, 299

ggins, W. H., 284
 rwitz, A., 628

I

mitancia, 324
 pedancia:
 1 de estado permanente senoidal, 411
 2 de punto impulsor, 324
 3 de transferencia, 325
 4 transformada de la, 287
 dependencia de ecuaciones, 71
 tegral de convolución, 260
 tegral de Faltung (convolución), 261
 tegral de inversión compleja, 206
 tegral particular, 129
 tegración numérica, 609
 terpretación de la derivada, 147
 tensidad del impulso, 247
 ductancia, 28
 ductancia inversa, 29
 ductancia mutua, 28
 ductor:
 1 elemento, 28
 2 energía, 475
 3 potencia, 476

J

oule (unidad), 36, 474
 oule, James P., 628

K

irchhoff, Gustav, 628
 onigsberg, problema del puente de, 59
 uratowski, gráfica no plana de, 64

L

aplace, Pierre S., 628
 Ley de Faraday, 27, 55
 Ley de Gauss, 21
 Ley de Lenz, 55
 Ley de Ohm, 33
 Leyes de Kirschhoff, 67
 1 circuitos acoplados, 82
 2 ley de corrientes, 68, 92
 3 ley de voltajes, 67, 88
 Logaritmo, 122, 202
 de un número complejo, 587

M

Magnetismo, 25

Malla, 60
 Mapeo en un plano complejo, 449
 Margen de fase, 456
 Margen de ganancia, 456
 Matriz A 106
 Matriz columna, (vector), 89
 Matriz cuadrada, 89
 Matriz inversa, 594
 Matriz transpuesta, 594
 Maxwell, ecuaciones de, 15
 Maxwell, James C., 628
 Menores, 96
 Método de unidad de salida, 332
 Método de ventana, 75
 Métodos de dos vatímetros, 507
 Métodos numéricos, 609
 Mho (unidad), 34
 Modelo de un transistor, 42
 Modelo MOSFET, 41
 Multiplicidad de polos o ceros, 335
 Multiplicación:
 1 de matrices, 592
 2 de números complejos, 585

N

Neper (unidad), 440
 Neperus, 284
 Nodo (vértice), 58
 Nodo de referencia, 68
 Nodo de referencia, (datun), 68
 Norton, Edward L., 629
 Norton, teorema de, 304
 Número de cuerdas, 60
 Número de ecuaciones, 70
 Número de ramas, 60
 Nyquist, criterio de, 448
 Nyquist, Harry, 448, 629

O

Octava, 440
 Oersted, experimento de, 25
 Oersted, Hans C., 629
 Ohm (unidad) 32
 Ohm, George Simon, 629
 Orden de las ecuaciones, 121, 174
 Orden de las matrices, 591
 Oscilaciones forzadas, 338
 Oscilaciones libres, 338
 Oscilaciones sostenidad, 192
 Oscilador de cambio de fase, 370

P

Par de nodos, 60
 Pared de terminales, 323
 Parámetros *ABCD*, 380
 Parámetros de admittancia en corto circuito, 374
 Parámetros de cadena, 380
 Parámetros de circuito general, 380
 Parámetros de impedancia, en circuito abierto, 377
 Parámetros de transmisión, 380
 Parámetros *g*, 384
 Parámetros *h*, 383
 Parámetros híbridos, 383
 Parámetros *y*, 374
 Parte imaginaria de *ejwt*, 408
 Parte imaginaria de *G(ja)*, 423
 Parte real de *ejwt*, 407
 Parte Real de *G(ja)*, 423
 Partes (separadas) de una red, 82
 Parco conjugado, 488
 Parco de impedancia, 487
 Pendiente:
 db/década, 442
 db/octava, 442
 Pérdida de inserción, 490
 Período de una señal, 403, 509
 Permitividad, 21
 Plano *s*, 182
 Polos, 335
 factores de polo, 335
 fasores de polo, 439
 Potencia, 19, 474
 1 compleja, 483
 2 instantánea, 474
 3 medición, 507
 4 promedio, 482
 5 reactiva, 483
 6 resistiva, 426
 7 señales periódicas, 542
 Potencia compleja, 483, 497
 Potencia aparente, 483
 Potencia media, 482
 Potencia reactiva, 483
 Producto *Cy*, 25
 Producto *Li*, 28
 Productos de espectro, 538
 Propiedad de ortogonalidad, 513
 Puente de Wheatstone, 59
 Puerto, 323
 Punto impulsor, 324
Q de un circuito, 183, 435
 Quadrats (de raíces), 363

R

Radiación, pérdida de, 38

Ramas, 58
 Rampa truncada, 243
 Raíces de ecuaciones, 174
 Raíces distintas (simples), 335
 Raíces de números complejos, 588
 Raíces repetidas, 169
 Raíces simples (distintas), 335
 Reciprocidad, 301
 Red *rr*, 59, 376
 Red celosía, 59, 333, 345, 438
 Red de fase mínima, 344
 Red de paso completo, 439
 Red de *T* doble, 79, 390
 Red en *T*, 59, 378
 Red en *T* paralela doble, *T*, 333
 Red equivalente con dos generadores, 379
 Red equivalente con un generador, 379
 Red escalera, 59
 Redes equivalentes, 69, 77
 Redes no balanceadas, 58
 Redes no recíprocas, 302
 Redes recíprocas, 301
 Red *T* punteada, 59, 333, 391
 Referencia de polaridad, 49
 Reflexión, coeficiente de, 492
 Regla de la mano derecha, 54
 Regla de L' Hospital, 204, 248
 Relación amortiguación, 182
 Relación de potencia de inserción, 492
 Relaciones voltaje-corriente, 35
 Residuos, 216
 Resistencia crítica, 182
 Resistor:
 1 elemento,
 2 energía, 474
 3 potencia, 482
 Respuesta (dominio del tiempo), 121
 de polos y ceros, 350
 estado cero, 154
 Respuesta al impulso, 264
 Respuesta de estado cero, 154
 Respuesta de estado permanente a una señal periódica, 536
 Respuesta de frecuencia, 424
 de polos y ceros, 350
 Routh, Edward J., 629
 Restricciones sobre polos y ceros, 338
 Resonancia, 434
 Resumen de parámetros de redes de dos puertos, 373
 Resumen de símbolos, 36
 Resumen de unidades, 36

S

- Semi-conductores, 18
- Senoido amortiguada, 286
- Señal no recurrente, 237
- Señal periódica, 509
- Señal recurrente, 237
- Serie de Fourier, 509
 - 1 efecto de referencias de tiempo, 525
 - 2 forma exponencial, 531
 - 3 forma trigonométrica, 509
- Serie exponencial de Fourier, 531
- Serie truncada, 525
- Schwartz, distribuciones de, 245 n
- Signo de coeficientes, regla del, 93
- Simetría de formas de onda en relación con los coeficientes de Fourier, 517
- Simetría de la matriz del sistema (determinante), 91, 95
- Simetría de media onda, 520
- Síntesis de forma de onda, 250
- Sistema de banda limitada, 570
- Sistema magnético no lineal, 28
- Slepian, problema de, 316
- Solución general, 123
- Solución particular, 123
- Solución total, 176
- Solución transitoria, 130
- Steinmetz, Charles P., 406, 629
- Subgráfica, 60
- Suma de fasores, 584
- Suma de matrices, 592
- Superposición, teorema de, 298

T

- Tabla de transformadas de Laplace, 206, 226, 605
- Tallegen, Bernard D.H., 494, 629
- Tallegen, teorema de, 494
- Teorema del cambio, 239
- Teorema del valor final, 258
- Teorema del valor inicial, 258
- Tevenin, Leon C., 302, 629
- Tevenin, teorema de, 302
- Topología de redes, 58
- Transferencia de máxima potencia:
 - 1 eficiencia de, 490
 - 2 por ajuste de transformador, 489
 - 3 por parco conjugado, 488
- Transferencia de potencia, 486
- Transferencia, 490
- Transformada de circuitos, 287
- Transformada de impedancia, 287

30105

- Transformada de Laplace, 201
 - 1 definición, 204
 - 2 tabla, 226, 605
- Transformada inversa, 202, 206
- Transformada de operaciones, 226, 267, 605
- Transformada rápida de Fourier (TRF), 578
- Transformadas (Laplace), 204
 - 1 de combinaciones lineales, 207
 - 2 de derivadas, 208
 - 3 de funciones unitarias, 248
 - 4 de integrales, 209
- Transformador, 53
- Traslación real, teorema de, 239
- Transformación T-r, 397
- Transformaciones de fuentes, 75
- Transmisión de distorsión, 569
- Tren de impulsos, 247, 256, 566
- Transformada de Laplace, 258
- Triangulación, 99
- Truncamiento, 511

U

- Unicidad de las transformadas de Laplace, 206
- Unilateral, 40

V

- Va (volt-ampere), 483
- Valores eficaces rmg, 479
- Valores de raíz media cuadrática (rmg), 479
- Var, 484
- Variable dependiente, 121
- Variable ficticia, 20
- Variables de estado, análisis de, 103
- Variables independientes, 121
- Variables para redes de dos puertos, 373
- Vector de estado, 106
- Vértice (nodo), 58
- Volt (unidad), 19
- Voltaje, 19
 - 1 caída de, 68
 - 2 de nodo a nodo, 74
 - 3 de nodo a referencia, 74
 - 4 elevación de, 68
 - 5 fuente de, 51
- Volta, Alessandro, 629

W

- Watt (unidad), 36
- Watt, James, 629
- Wheatstone, Charles, 629
- Wheeler, H.A., 284

FECHA	10/7/03
PEDIDO	
ORDEN	
PROCESADO	C. Ferrer
GOSTO	726 S